MVŠO

MATEMATIKA PRO EKONOMICKOU PRAXI – APLIKACE

STUDIJNÍ OPORA PRO KOMBINOVANÉ STUDIUM

Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., 2024

MATEMATIKA PRO EKONOMICKOU PRAXI – APLIKACE

doc. RNDr. Martina PAVLAČKOVÁ, Ph.D.

Autor: doc. RNDr. Martina PAVLAČKOVÁ, Ph.D.

Olomouc 2024

Obsah

Úvod

Porozumění základům matematiky a jejich využití v ekonomických aplikacích je často nezbytný předpoklad pro to, aby studenti ekonomických oborů úspěšně zvládli pochopit látku probíranou i v nematematických předmětech. Cílem tohoto studijního textu je proto seznámit studenty 1. ročníku ekonomických oborů s aplikacemi lineární algebry, číselných posloupností a číselných řad v ekonomické praxi. Text je koncipován převážně jako soubor řešených aplikačních příkladů, a u čtenáře se z toho důvodu předpokládá předchozí základní znalost matematické teorie týkající se matic a soustav lineárních rovnic a také číselných posloupností a řad.

Student po prostudování textu umí využít operace s maticemi pro řešení nejrůznějších ekonomických úloh jakými jsou např. výpočet zisku, řešení jednoduchých optimalizačních úloh nebo porovnání různých zemí pomocí indexu bídy.

V textu se čtenář také dozví, jak lze aplikovat teorii o inverzních maticích při šifrování a dešifrování nebo jak ji využít pro stanovení minimální produkce nutné k zaručení návratnosti investičních nákladů.

Velmi důležitou matematickou problematikou, která se v praktických aplikacích hojně využívá, jsou soustavy lineárních rovnic a jejich řešení. V rámci textu je ukázáno, jak jdou soustavy lineárních rovnic využít při sestavování diety, při regulování silniční dopravy nebo pro stanovení produkce, která pokryje jak externí, tak interní poptávku.

Poslední dvě kapitoly textu jsou věnovány číselným posloupnostem a řadám a jejich využití např. při složeném úročení nebo v oblasti spoření. Také je zde ukázána aplikace konečných číselných řad - Herfindahlův–Hirschmannův index, který se používá k měření koncentrace v tržním odvětví, a který je využíván mj. antimonopolním úřadem jako pomocný indikátor při fúzích.

Při řešení složitějších nebo obsáhlejších úloh je samozřejmě vhodnější využít pro zdlouhavé výpočty výpočetní techniku. Výsledek je tak získán snadněji, rychleji a často i s menší chybovostí. Kromě ručních výpočtů proto tento studijní text obsahuje také návody jak složitější úlohy řešit s využitím MS Excel nebo WolframAlpha (`https://www.wolframalpha.com`).

Jednotlivé kapitoly studijního textu obsahují náhled učiva, které se v dané kapitole bude probírat, klíčová slova, cíle kapitoly i čas přibližně potřebný k jejímu prostudování. Na konci kapitoly jsou vždy uvedeny neřešené příklady s výsledky pro zopakování probraného učiva. Text obsahuje celou řadu řešených příkladů, na nichž je probíraná látka ilustrována, a díky nimž by pro čtenáře mělo být řešení opakovacích příkladů trivialitou.

Za podrobné pročtení rukopisu a cenné odborné připomínky, které přispěly ke zkvalitnění studijního textu, patří díky RNDr. Jiřímu Fišerovi, Ph.D.

Je pravděpodobné, že se i přes pečlivé korektury vyskytují v textu chyby a překlepy. Autorka proto bude čtenářům vděčná za každou připomínku, která povede k vylepšení textu a odstranění nedostatků.

Kapitola 1

Matice a jejich využití v ekonomické praxi

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- vypočítat pomocí maticových operací index bídy v různých zemích a letech,
- vypočítat pomocí maticových operací zisk,
- využít maticových operací pro optimalizaci tržeb, nákladů a zisku.

Klíčová slova:

Matice, maticové operace, zisk, tržby, náklady, index bídy.

Náhled kapitoly
V první kapitole se budeme zabývat využitím základních operací s maticemi, tj. jejich součtem a součinem, v praktických ekonomických aplikacích. Ukážeme si, jak pomocí maticových operací zjistit, který z produkovaných výrobků přináší nejvyšší zisk nebo jak vybrat optimálního dodavatele pro zakázku obsahující více druhů položek.

Cíle kapitoly
Cílem kapitoly je ilustrování využití základních maticových operací v ekonomické praxi zejména při výpočtu indexu bídy, zisku, nákladů a tržeb.

Odhad času potřebného ke studiu
2 hodiny

1.1 Index bídy

Nejprve se budeme zabývat tím, jak lze součet matic použít při výpočtu tzv. indexu bídy, který se vypočítá sečtením míry inflace a míry nezaměstnanosti v procentech.

Příklad 1.1. V následujících tabulkách je uvedena míra inflace a míra nezaměstnanosti ve vybraných státech v letech 2008-2010. Vypočítejte index bídy pro jednotlivé státy a roky.

Inflace v %:

	UK	Německo	Japonsko	ČR	SR
2008	3,6	2,6	1,4	6,3	6,4
2009	2,2	0,4	-1,3	1,0	1,6
2010	3,3	1,1	-0,7	1,5	1,0

Tab. 1: Inflace v %

Nezaměstnanost v %:

	UK	Německo	Japonsko	ČR	SR
2008	5,7	7,3	4,0	4,4	9,6
2009	7,6	7,8	5,1	6,7	12,0
2010	7,8	7,1	5,1	7,3	14,4

Tab. 2: Nezaměstnanost v %

Řešení Nejprve z tabulek vyrobíme matice. Jejich sečtením pak získáme novou matici popisující index bídy pro jednotlivé státy a roky.

$$\mathbf{A}_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 3{,}6 & 2{,}6 & 1{,}4 & 6{,}3 & 6{,}4 \\ 2{,}2 & 0{,}4 & -1{,}3 & 1{,}0 & 1{,}6 \\ 3{,}3 & 1{,}1 & -0{,}7 & 1{,}5 & 1{,}0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{3\times 5} = \begin{pmatrix} 5{,}7 & 7{,}3 & 4{,}0 & 4{,}4 & 9{,}6 \\ 7{,}6 & 7{,}8 & 5{,}1 & 6{,}7 & 12{,}0 \\ 7{,}8 & 7{,}1 & 5{,}1 & 7{,}3 & 14{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3{,}6 & 2{,}6 & 1{,}4 & 6{,}3 & 6{,}4\\ 2{,}2 & 0{,}4 & -1{,}3 & 1{,}0 & 1{,}6\\ 3{,}3 & 1{,}1 & -0{,}7 & 1{,}5 & 1{,}0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5{,}7 & 7{,}3 & 4{,}0 & 4{,}4 & 9{,}6\\ 7{,}6 & 7{,}8 & 5{,}1 & 6{,}7 & 12{,}0\\ 7{,}8 & 7{,}1 & 5{,}1 & 7{,}3 & 14{,}4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9{,}3 & 9{,}9 & 5{,}4 & 10{,}7 & 16{,}0\\ 9{,}8 & 8{,}2 & 3{,}8 & 7{,}7 & 13{,}6\\ 11{,}1 & 8{,}2 & 4{,}4 & 8{,}8 & 15{,}4\end{pmatrix}.$$

Z výsledné matice je patrné např. to, že index bídy dosáhl nejvyšší hodnoty na Slovensku v roce 2008, naopak nejnižší byl v Japonsku v roce 2009. Z tohoto výsledku vyplývá i jeden z hlavních nedostatků indexu bídy, kterým je deflace, tj. snižování cenové hladiny. Deflace je obvykle považována za negativní ekonomický projev, a přesto snižuje index bídy, a může tak zkreslovat jeho vypovídací hodnotu.

1.2 Výpočet zisku

Další ekonomickou aplikací, u které se dají využít základní operace s maticemi, je výpočet zisků z vyráběných výrobků.

Příklad 1.2. Papírenská firma vyrábí bloky, diáře a školní sešity. Počet hodin práce člověka, hodin práce stroje a množství materiálu v gramech, které jsou potřeba na výrobu jednoho výrobku jsou popsány následující tabulkou:

Výrobek	Lidská práce (h)	Práce stroje (h)	Materiál (g)
Blok	0,02	0,08	40
Diář	0,045	0,1	90
Sešit	0,15	0,095	50

Ceny jednotlivých výrobních faktorů jsou následující:

Výrobní faktor	Cena (Kč)
Lidská práce (h)	100
Práce stroje (h)	50
Materiál (g)	0,1

Prvotní nastavení prodejních cen za 1 ks výrobku je popsáno následující tabulkou:

Výrobek	Cena (Kč)
Blok	34
Diář	37
Sešit	14

Jsou ceny na 1 ks každého z výrobků nastaveny správně tak, aby firmě přinesly zisk? Pokud ano, který z výrobků přinese největší zisk za 1 prodaný kus?

Řešení Nejprve z tabulek vyrobíme matice a vektory - matici $\mathbf{V}$ popisující potřebné množství výrobních faktorů, vektor $\mathbf{n}$ popisující náklady na 1 ks a vektor $\mathbf{c}$ popisující prodejní ceny za

1 ks. Jejich správných vynásobením a odečtením pak získáme výsledný vektor popisující zisky za 1 ks každého z výrobků.

$$\mathbf{V}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}08 & 40 \\ 0{,}045 & 0{,}1 & 90 \\ 0{,}15 & 0{,}095 & 50 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0{,}1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 34 \\ 37 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{z}$ popisující zisky z 1 ks jednotlivých výrobků můžeme vypočítat jako:

$$\mathbf{z} = \mathbf{c} - \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 34 \\ 37 \\ 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}08 & 40 \\ 0{,}045 & 0{,}1 & 90 \\ 0{,}15 & 0{,}095 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18{,}5 \\ -10{,}75 \end{pmatrix}.$$

Z výsledné matice je patrné, že při prodeji bloků realizuje firma zisk 24 Kč/ks a při prodeji diářů 18,5 Kč/ks. Naopak prodej sešitů je realizován se ztrátou 10,75 Kč/ks.

Příklad 1.3. Jakou cenu za 1 sešit by měla papírenská firma z předchozího příkladu stanovit, aby na 1 prodaném sešitu relizovala zisk 5 Kč?

Řešení Označíme x prodejní cenu za jeden sešit. Protože řešíme jen sešity, omezíme se v maticích a vektorech jen na části, které se jich týkají. Matici $\mathbf{V}$ popisující potřebné množství výrobních faktorů je v tomto případě pouze vektorem, protože se týká jen 1 vyráběného produktu. Vektor $\mathbf{n}$ popisující potřebné náklady na výrobní faktory je stejný jako v původním příkladu a vektor $\mathbf{c}$ popisující ceny za 1 ks je matice typu 1×1 obsahující x. Výsledný vektor popisující zisk za 1 ks prodaného sešitu je také matice typu 1×1 obsahující 5.

Celkově tedy:

$$\mathbf{V}_{1\times 3} = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}095 & 50 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0{,}1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}_{1\times 1} = \begin{pmatrix} x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{z}_{1\times 1} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

Ze vztahu

$$\mathbf{z} = \mathbf{c} - \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}095 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

vyjádříme x:

$$x - (0{,}15 \cdot 100 + 0{,}095 \cdot 50 + 50 \cdot 0{,}1) = 5,$$

$$x - 24{,}75 = 5,$$

$$x = 29{,}75.$$

Aby firma měla zisk za 1 prodaný sešit požadovaných 5 Kč, musela by je prodávat za 29,75 Kč/ks.

1.3 Optimalizace tržeb, nákladů a zisku

Důležitou oblastí ekonomického využití maticových operací je optimalizace tržeb, nákladů a zisku.

Příklad 1.4. Uvažujme firmu, která ve 3 výrobních halách vyrábí 4 druhy produktů.

Objem produkce v 1. měsíci je popsán následující tabulkou:

	1. produkt	2. produkt	3. produkt	4. produkt
1. hala	7 000 ks	5 000 ks	0 ks	1 000 ks
2. hala	0 ks	4 000 ks	3 000 ks	7 000 ks
3. hala	3 000 ks	2 000 ks	0 ks	2 000 ks

Objem produkce ve 2. měsíci je popsán následující tabulkou:

	1. produkt	2. produkt	3. produkt	4. produkt
1. hala	4 000 ks	2 000 ks	0 ks	1 000 ks
2. hala	0 ks	2 000 ks	2 000 ks	5 000 ks
3. hala	1 000 ks	1 000 ks	0 ks	1 000 ks

Určete pomocí maticových operací objem produkce za oba měsíce dohromady (v jednotlivých halách) a také velikost zisku za oba měsíce (za celou firmu), pokud víme, že 1 ks 1. produktu přinese zisk 3 Kč, 1 ks 2. produktu přinese zisk 9 Kč, 1 ks 3. produktu přinese zisk 6 Kč a 1 ks 4. produktu přinese zisk 8 Kč.

Řešení Nejprve z tabulek vytvoříme příslušné matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7\,000 & 5\,000 & 0 & 1\,000 \\ 0 & 4\,000 & 3\,000 & 7\,000 \\ 3\,000 & 2\,000 & 0 & 2\,000 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4\,000 & 2\,000 & 0 & 1\,000 \\ 0 & 2\,000 & 2\,000 & 5\,000 \\ 1\,000 & 1\,000 & 0 & 1\,000 \end{pmatrix}.$$

Abychom určili objem produkce za oba měsíce dohromady, je potřeba pouze matice **A** a **B** sečíst:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11\,000 & 7\,000 & 0 & 2\,000 \\ 0 & 6\,000 & 5\,000 & 12\,000 \\ 4\,000 & 3\,000 & 0 & 3\,000 \end{pmatrix}.$$

Pro zjištění celkového zisku za 2 měsíce v rámci celé firmy je potřeba vynásobit matici **A** + **B** vektorem

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

popisujícím zisky za jednotky produkce. Tj.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{Z}=\begin{pmatrix}11\,000 & 7\,000 & 0 & 2\,000\\ 0 & 6\,000 & 5\,000 & 12\,000\\ 4\,000 & 3\,000 & 0 & 3\,000\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\9\\6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}112\,000\\180\,000\\63\,000\end{pmatrix}.$$

Produkce 1. haly tedy za dva měsíce přinesla zisk 112 000 Kč, produkce 2. haly 180 000 Kč a produkce 3. haly 63 000 Kč. Celkový zisk (za celou firmu) je tedy za dva měsíce roven 112 000+180 000+63 000 = 355 000 Kč.

Příklad 1.5. Tři lidé - Aneta, Beáta a Cyril chtějí koupit rohlíky, housky, koláče a mouku. Celý nákup může každý z nich realizovat buď v Bille nebo v Albertu. Určete pomocí maticových operací, který obchod bude pro kterého z nich výhodnější, když víme, že množství, která potřebují koupit a jednotkové ceny jsou popsány následujícími tabulkami:

	Rohlíky	Housky	Koláče	Mouka
Aneta	6 ks	5 ks	3 ks	1 ks
Beáta	3 ks	6 ks	2 ks	2 ks
Cyril	3 ks	4 ks	3 ks	5 ks

	Cena v Bille	Cena v Albertu
Rohlík	1,50 Kč/ks	1 Kč/ks
Houska	2 Kč/ks	2 Kč/ks
Koláč	5 Kč/ks	4,50 Kč/ks
Mouka	16 Kč/ks	17 Kč/ks

Řešení Nejprve z tabulek vytvoříme příslušné matice (první z nich popisuje poptávku a druhá jednotkové ceny):

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}6&5&3&1\\3&6&2&2\\3&4&3&5\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1{,}5&1\\2&2\\5&4{,}5\\16&17\end{pmatrix}.$$

Pokud vypočítáme součin matic $\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}$, získáme matici, v jejíchž řádcích budou ceny, které jednotliví spotřebitelé zaplatí v daných obchodech:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}6&5&3&1\\3&6&2&2\\3&4&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1{,}5&1\\2&2\\5&4{,}5\\16&17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50&46{,}5\\58{,}5&58\\107{,}5&109{,}5\end{pmatrix}.$$

Pro Anetu a Beátu je tedy výhodnější nakoupit v Albertu (Aneta zaplatí 46,5 Kč a Beáta 58 Kč), pro Cyrila je výhodnější Billa, kde zaplatí 107,5 Kč.

Příklad 1.6. Uvažujme firmu, která vyrábí 5 druhů produktů a dodává je do 3 obchodních řetězců. Každý z řetězců může prodávat jak za maloobchodní, tak za velkoobchodní ceny. V následující tabulce jsou uvedeny počty prodaných produktů u jednotlivých řetězců.

	1. produkt	2. produkt	3. produkt	4. produkt	5. produkt
1. řetězec	2 ks	0 ks	5 ks	4 ks	10 ks
2. řetězec	15 ks	3 ks	5 ks	2 ks	6 ks
3. řetězec	4 ks	1 ks	1 ks	4 ks	3 ks

Maloobchodní a velkoobchodní ceny za 1 ks produktu jsou následující:

	Maloobchodní cena	Velkoobchodní cena
1. produkt	2 400 Kč	2 000 Kč
2. produkt	5 700 Kč	5 100 Kč
3. produkt	4 500 Kč	3 900 Kč
4. produkt	6 800 Kč	6 300 Kč
5. produkt	3 300 Kč	2 900 Kč

Určete pomocí maticových operací celkové tržby za jednotlivé produkty u každého z řetězců při použití maloobchodních, resp. velkoobchodních, cen.

Řešení Nejprve z tabulek vytvoříme příslušné matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 & 10 \\ 15 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\,400 & 2\,000 \\ 5\,700 & 5\,100 \\ 4\,500 & 3\,900 \\ 6\,800 & 6\,300 \\ 3\,300 & 2\,900 \end{pmatrix}.$$

Abychom určili celkové tržby za jednotlivé produkty u každého z řetězců při použití maloobchodních, resp. velkoobchodních, cen, je potřeba pouze matice **A** a **B** vynásobit:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 & 10 \\ 15 & 3 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,400 & 2\,000 \\ 5\,700 & 5\,100 \\ 4\,500 & 3\,900 \\ 6\,800 & 6\,300 \\ 3\,300 & 2\,900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87\,500 & 77\,700 \\ 109\,000 & 94\,800 \\ 56\,900 & 50\,900 \end{pmatrix}$$

Z výsledné matice vyplývá, že např. tržby u prvního řetezce při použití velkoobchodních cen byly 77 700 Kč nebo, že tržby u třetího řetězce při použití maloobchodních cen byly 56 900 Kč.

Poznámka 1.7. V praktických aplikacích obvykle pracujeme s maticemi podstatně větších rozměrů než měly ty v předchozích příkladech. Počítat u větších matic jejich součin „ručně“ je pracné a zbytečné. Proto je vhodné využít nějaký počítačový program, který umí s maticemi pracovat (např. Maple nebo Matlab). V případě, že speciální matematický software není k dispozici, je možné pro práci s maticemi využít i MS Excel. V něm lze součin matic vypočítat jednoduše pomocí příkazu SOUČIN.MATIC(Pole1, Pole2), u kterého do Pole1 nakopírujeme první matici a do Pole2 druhou.

Transponování matic (tj. záměna řádků a sloupců v matici) se v MS Exel provádí pomocí příkazu TRANSPOZICE a inverzní matice, kterou se budeme zabývat v další kapitole, se hledá pomocí příkazu INVERZE. V následující kapitole budeme pracovat také s pojmem determinant matice; ten se v MS Excel vypočítá pomocí příkazu DETERMINANT.

V této kapitole bylo ukázáno, jak lze využít základní operace s maticemi, tj. jejich součet a součin, v praktických ekonomických aplikacích. Bylo v ní mj. řešeno, jak pomocí maticových operací zjistit, který z produkovaných výrobků přináší nejvyšší zisk nebo jak vybrat optimálního dodavatele pro zakázku obsahující více druhů položek.

1. Firma vyrábí dva typy výrobků, V_1 a V_2. Počet hodin práce člověka, hodin práce stroje a množství kilogramů materiálu, které jsou potřeba na výrobu jednoho výrobku, jsou popsány následující tabulkou:

Výrobek	Lidská práce (h)	Práce stroje (h)	Materiál (kg)
V_1	1	1,5	5
V_2	2	3	4

   Ceny jednotlivých výrobních faktorů jsou následující:

Výrobní faktor	Cena
Lidská práce	250 Kč/h
Práce stroje	30 Kč/h
Materiál	100 Kč/kg

   Nastavení cen za 1 ks výrobku je popsáno touto tabulkou:

Výrobek	Cena (Kč)
V_1	800
V_2	1 000

   Jaký zisk přinese 1 ks prodaného výrobku V_1 a jaký výrobku V_2?

2. Firma z minulého příkladu chce dosáhnout zisku 10 Kč za 1 ks prodaného výrobku V_1 a 20 Kč za 1 ks výrobku V_2. Jaké ceny za ks má zvolit?

3. Uvažujme firmu, která ve 2 výrobních halách vyrábí 4 druhy produktů.
   Objem produkce v 1. roce je popsán následující tabulkou:

	1. produkt	2. produkt	3. produkt	4. produkt
1. hala	1 000 ks	15 000 ks	10 000 ks	9 000 ks
2. hala	1 500 ks	0 ks	3 000 ks	6 000 ks

   Objem produkce ve 2. roce je popsán následující tabulkou:

	1. produkt	2. produkt	3. produkt	4. produkt
1. hala	1 500 ks	22 000 ks	12 000 ks	1 000 ks
2. hala	2 000 ks	0 ks	4 000 ks	7 000 ks

   Určete velikost zisku za oba roky (za celou firmu), pokud víme, že 1 ks 1. produktu přinese zisk 50 Kč, 1 ks 2. produktu přinese zisk 19 Kč, 1 ks 3. produktu přinese zisk 29 Kč a 1 ks 4. produktu přinese zisk 38 Kč.

4. Tři ženy na mateřské dovolené si přivydělávají pletením, kvůli kterému potřebují tři druhy materiálů. Vzhledem k výši poštovného chce každá z nich objednávku materiálu, který potřebuje, realizovat pouze v 1 z e–shopů, který materiál nabízí. Který e–shop bude pro jednotlivé ženy nejvýhodnější, když víme, že množství materiálů, která potřebují koupit, a jednotkové ceny jsou popsány následujícími tabulkami:

	Materiál 1	Materiál 2	Materiál 3
1. žena	9 ks	4 ks	4 ks
2. žena	4 ks	5 ks	3 ks
3. žena	5 ks	5 ks	5 ks

	Cena v 1. e–shopu	Cena ve 2. e–shopu	Cena ve 3. e–shopu
Materiál 1	28 Kč/ks	27 Kč/ks	28 Kč/ks
Materiál 2	20 Kč/ks	25 Kč/ks	29 Kč/ks
Materiál 3	24 Kč/ks	20 Kč/ks	22 Kč/ks

Výsledky příkladů k procvičení:

1. 5 Kč a 10 Kč.
2. 805 a 1 010 Kč.
3. 2 718 000 Kč.
4. Pro 1. ženu je nejvýhodnější 2. e–shop, pro 2. ženu 1. e–shop a pro třetí jsou oba e–shopy stejně výhodné.

Literatura k tématu:

[1] BAUER, L., LIPOVSKÁ, H., MIKULÍK, M., MIKULÍK. V. *Matematika v ekonomii a ekonomice*, Grada, 2015. ISBN 978-80-247-4419-3.

[2] BOHDALOVÁ, M., BOHDAL R. *Matematika nielen pre manažérov.* Univerzita Komenského v Bratislavě, 2022. ISBN 978-80-223-5392-2.

[3] DVOŘÁKOVÁ, L. *Lineární algebra 2.* 2. vyd., ČVUT Praha, 2020. ISBN 978-80-01-06721-5.

Kapitola 2

Determinant matice, inverzní matice a jejich využití v ekonomické praxi

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- využít inverzní matice pro jednoduché šifrování zpráv,
- využít inverzní matice pro jednoduché dešifrování zpráv,
- aplikovat maticové operace a inverzní matice pro stanovení produkce zaručující návratnost investičních nákladů.

Klíčová slova:

Determinant matice, inverzní matice, šifrování a dešifrování pomocí matic.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme zabývat využitím inverzních matic v ekonomických aplikacích. První aplikací regulárních matic a jejich inverzí, kterou budeme v rámci této kapitoly studovat, je šifrování a dešifrování v kryptologii. Poté si ukážeme, jak lze využít inverzní matice pro stanovení minimální produkce nutné k zaručení návratnosti investičních nákladů.

Cíle kapitoly

Cílem této kapitoly je ilustrovat využítí inverzních matic a determinantů při šifrování a dešifrování a při stanovení minimální produkce nutné k návratnosti investičních výdajů.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

2.1 Šifrování a dešifrování zpráv pomocí matic

Nejprve se budeme věnovat problematice využití matic při jednoduchém šifrování a dešifrování zpráv pomocí inverzních matic. S pojmem inverzní matice úzce souvisí pojem determinant a regulární, resp. singulární, matice. Proto připomeňme, že matice je regulární, pokud je její determinant různý od 0; jejím opakem je matice singulární, jejíž determinant je roven 0. Toto rozdělení je důležité mj. z toho důvodu, že pro singulární matice neexistuje matice k nim inverzní.

Příklad 2.1. Zašifrujte zprávu „Matice jsou užitečné“ pomocí matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Řešení Aby mohla být zpráva zašifrována, je nutné, aby měla šifrovací matice nenulový determinant, tj. aby byla regulární. Vzhledem k tomu, že se jedná o matici 3×3, je možné její determinant spočítat Sarrusovým pravidlem:

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - (1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 4) = 2 \neq 0.$$

Matice je tedy regulární a k šifrování lze použít.

Při šifrování zprávy pomocí matic je potřeba nejprve přiřadit každému písmenu v abecedě číselnou hodnotu. Pro zjednodušení ignorujeme diakritiku a vynecháme písmeno *ch*, které se dá vytvořit z písmen *c* a *h*. Znakem „-“ je obvykle myšlena mezera v textu. Přiřazení čísel jednotlivým písmenům lze provést pomocí následujícího standardně využívaného schématu:

0 = –	9 = I	18 = R
1 = A	10 = J	19 = S
2 = B	11 = K	20 = T
3 = C	12 = L	21 = U
4 = D	13 = M	22 = V
5 = E	14 = N	23 = W
6 = F	15 = O	24 = X
7 = G	16 = P	25 = Y
8 = H	17 = Q	26 = Z

Obr. 1: Kódovací tabulka

Naše zpráva (bez diakritiky) pak bude mít číselné vyjádření

$$13 \quad 1 \quad 20 \quad 9 \quad 3 \quad 5 \quad 0 \quad 10 \quad 19 \quad 15 \quad 21 \quad 0 \quad 21 \quad 26 \quad 9 \quad 20 \quad 5 \quad 3 \quad 14 \quad 5$$

Abychom mohli zprávu zašifrovat zadanou maticí, musíme ji napsat tak, aby součin matice obsahující zprávu a kódovací matice existoval. Protože je šifrovací matice typu 3×3 a my jí budeme násobit zleva, je potřeba (kvůli existenci součinu matic) zprávu přepsat do matice $\mathbf{Z}$, která bude mít 3 řádky. Zprávu přitom přepisujeme po sloupcích:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 0 & 15 & 21 & 20 & 14 \\ 1 & 3 & 10 & 21 & 26 & 5 & 5 \\ 20 & 5 & 19 & 0 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Číslo 0 v posledním sloupci je v matici proto, že zpráva nebyla tak dlouhá, aby se dala přesně přepsat do matice, která má 3 řádky. U šifrování pomocí matic platí, že pokud je zpráva kratší, doplní se zbytek matice nulami.

Po vytvoření matice $\mathbf{Z}$ je možné zprávu zašifrovat pomocí maticového násobení:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 9 & 0 & 15 & 21 & 20 & 14 \\ 1 & 3 & 10 & 21 & 26 & 5 & 5 \\ 20 & 5 & 19 & 0 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 47 & 26 & 29 & 51 & 77 & 48 & 33 \\ 95 & 55 & 68 & 123 & 180 & 101 & 71 \\ 66 & 28 & 38 & 30 & 60 & 46 & 28 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Přepisem této matice (opět po sloupcích) získáme zašifrovanou zprávu

$$47 \quad 95 \quad 66 \quad 26 \quad 55 \quad 28 \quad 29 \quad 68 \quad 38 \quad 51 \quad 123 \quad 30 \quad 77 \quad 180 \quad 60 \quad 48 \quad 101 \quad 46 \quad 33 \quad 71 \quad 28,$$

kterou je možné odeslat.

Opačným případem - odšifrováním zašifrované zprávy pomocí regulární matice se budeme zabývat v následujícícm příkladu.

Příklad 2.2. Odšifrujte zprávu

$$41\ \ 55\ \ 70\ \ 95\ \ 41\ \ 55\ \ 78\ \ 107\ \ 35\ \ 47\ \ 20\ \ 30\ \ 15\ \ 20\ \ 69\ \ 98\ \ 41\ \ 61\ \ 44\ \ 59$$

která byla zašifrovaná pomocí matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení Matice $\mathbf{A}$ je regulární (křížovým pravidlem vychází determinant $1 \neq 0$), proto lze její pomocí šifrovat. Pro dešifrování zprávy je potřeba k matici $\mathbf{A}$ najít matici k ní inverzní $\mathbf{A}^{-1}$.

Pomocí algebraických úprav (viz teorii) nebo pomocí software získáme

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Abychom zprávu dešifrovali, násobíme maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva matici se 2 řádky obsahující zašifrovanou zprávu:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 41 & 70 & 41 & 78 & 35 & 20 & 15 & 69 & 41 & 44 \\ 55 & 95 & 55 & 107 & 47 & 30 & 20 & 98 & 61 & 59 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 20 & 13 & 20 & 11 & 0 & 5 & 11 & 1 & 14 \\ 1 & 5 & 1 & 9 & 1 & 10 & 0 & 18 & 19 & 1 \end{pmatrix}.$$

V dalším kroku je potřeba výslednou matici přepsat po sloupcích do jednoho řádku:

$$13\ \ 1\ \ 20\ \ 5\ \ 13\ \ 1\ \ 20\ \ 9\ \ 11\ \ 1\ \ 0\ \ 10\ \ 5\ \ 0\ \ 11\ \ 18\ \ 1\ \ 19\ \ 14\ \ 1.$$

Nakonec číslům přiřadíme písmena pomocí stejného schématu jako u šifrování:

0 = –	9 = I	18 = R
1 = A	10 = J	19 = S
2 = B	11 = K	20 = T
3 = C	12 = L	21 = U
4 = D	13 = M	22 = V
5 = E	14 = N	23 = W
6 = F	15 = O	24 = X
7 = G	16 = P	25 = Y
8 = H	17 = Q	26 = Z

Obr. 2: Kódovací tabulka

Naše dešifrovaná zpráva (bez diakritiky) pak bude mít slovní vyjádření

$$M\ A\ T\ E\ M\ A\ T\ I\ K\ A\ -\ J\ E\ -\ K\ R\ A\ S\ N\ A$$

2.2 Využití inverzní matice pro stanovení minimální produkce nutné k zaručení návratnosti investičních nákladů

Další oblastí, ve které lze využít poznatky týkající se maticových operací a inverzních matic, je stanovení minimální produkce nutné k zaručení návratnosti počátečních investičních nákladů.

Příklad 2.3. Firma investovala 2 478 000 Kč do nových technologií, určených pro výrobu dvou výrobků V_1 a V_2. K výrobě výrobku V_1 nakupuje polotovar P_1 a k výrobě výrobku V_2 polotovar P_2 od dodavatelské společnosti, která investovala 26 400 Kč do technologií pro výrobu těchto polotovarů.

Z dodávky polotovaru P_1 pro výrobu jednoho výrobku V_1 má dodavatelská společnost čistý zisk 3 Kč a z dodávky polotovaru P_2 pro výrobu jednoho výrobku V_2 čistý zisk 4 Kč. Firma má z prodeje jednoho výrobku V_1 čistý zisk 240 Kč a z prodeje jednoho výrobku V_2 čistý zisk 420 Kč. Při jaké minimální produkci se firmě a dodavatelské společnosti současně vrátí vložené investice?

Řešení Zisky firmy a dodavatelské společnosti z prodeje 1 ks výrobku V_1, resp. V_2, lze popsat maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 240 & 420 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vektor popisující vložené investice má tvar

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2\,478\,000 \\ 26\,400 \end{pmatrix}.$$

Označíme jako x_1 počet prodaných výrobků V_1 a jako x_2 počet prodaných výrobků V_2, které zajistí návrat obou investic. Pokud z neznámých x_1 a x_2 vyrobíme sloupcový vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

můžeme zkoumaný problém zapsat jako

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Na levé straně je potřeba osamostatnit vektor $\mathbf{x}$; toho dosáhneme násobením obou stran rovnice zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$ (protože $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, tj. jednotková matice):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Lze vypočítat, že

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{300} & \frac{420}{300} \\ \frac{3}{300} & \frac{-240}{300} \end{pmatrix},$$

a proto

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{300} & \frac{420}{300} \\ \frac{3}{300} & \frac{-240}{300} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,478\,000 \\ 26\,400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,920 \\ 3\,660 \end{pmatrix}.$$

Minimální (prodaná) produkce, která pokryje investiční náklady, představuje 3 920 výrobků V_1 a 3 660 výrobků V_2.

Poznámka 2.4. V předchozím příkladu jsme si popsali jeden z postupů, který lze použít při řešení soustav lineárních rovnic. V následující kapitole se budeme této problematice věnovat podrobněji a ukážeme si i jiné možnosti, jak soustavy lineárních rovnic řešit.

V této kapitole bylo ukázáno, jak lze využít inverzní matice v ekonomických aplikacích. První aplikací regulárních matic a jejich inverzí, která byla v rámci této kapitoly zkoumána, bylo jednoduché šifrování a dešifrování v kryptologii. Poté bylo ukázáno, jak lze využít inverzní matice pro stanovení minimální produkce nutné k zaručení návratnosti investičních nákladů.

1. Zašifrujte zprávu „lineární algebra“ pomocí matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Dešifrujte zprávu
   „126 127 93 116 85 97 108 64 93 83 75 61 87 51 77 16 17 13“,
   která byla zašifrována pomocí matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Prodejna okrasných stromků investovala 350 000 Kč do nových technologií, určených pro inovování pěstování dvou typů okrasných stromků S_1 a S_2. Od dodavatelské společnosti nakupuje sazenice C_1 a C_2, ze kterých stromky pěstuje. Dodavatel do inovace pěstování sazenic investoval 14 000 Kč.

   Z dodávky sazenice C_1 prodejně má dodavatelská společnost čistý zisk 5 Kč a z dodávky sazenice C_2 čistý zisk 10 Kč. Prodejna okrasných stromků má z prodeje jednoho stromku S_1 čistý zisk 150 Kč a z prodeje jednoho stromku S_2 čistý zisk 200 Kč. Při jakém minimálním prodeji se prodejně a dodavatelské společnosti současně vrátí vložené investice?

Výsledky příkladů k procvičení:

1. Zašifrovaná zpráva má tvar „-2 -15 39 -13 -9 -34 14 -19 87 -6 10 42 -13 -8 -29 1 -2 3“.
2. Odšifrovaná zpráva je „singulární matice“.
3. 1 400 a 700 prodaných stromků.

Literatura k tématu:

[1] BAUER, L., LIPOVSKÁ, H., MIKULÍK, M., MIKULÍK. V. *Matematika v ekonomii a ekonomice*, Grada, 2015. ISBN 978-80-247-4419-3.

[2] BOHDALOVÁ, M., BOHDAL R. *Matematika nielen pre manažérov*. Univerzita Komenského v Bratislavě, 2022. ISBN 978-80-223-5392-2.

[3] DVOŘÁKOVÁ, L. *Lineární algebra 2*. 2. vyd., ČVUT Praha, 2020. ISBN 978-80-01-06721-5.

Kapitola 3

Soustavy lineárních rovnic a jejich využití v ekonomické praxi

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- využít soustavy lineárních rovnic pro sestavení diety,
- optimalizovat pomocí soustav lineárních rovnic využití výrobních kapacit,
- aplikovat poznatky o soustavách lineárních rovnic pro řešení regulace silniční dopravy,
- využít soustavy lineárních rovnic v Leontiefově modelu.

Klíčová slova:

Soustava lineárních rovnic, řešení soustavy lineárních rovnic, sestavení diety, optimalizace výrobních kapacit, regulace silniční dopravy, Leontiefův model.

Náhled kapitoly

Soustavy lineárních rovnic mají široké praktické využití a o některých jejich aplikacích se zmíníme v této kapitole. Nejprve se budeme zabývat tím, jak jdou soustavy lineárních rovnic využít při sestavování diety, která má obsahovat předepsaná množství vitamínů. Rovněž si ukážeme uplatnitelnost soustav linárních rovnic při regulování dopravy nebo v Leontiefově modelu pro stanovení produkce potřebné pro pokrytí externí i interní poptávky.

Cíle kapitoly

Cílem této kapitoly je ilustrování využití soustav lineárních rovnic v ekonomické praxi při sestavování diet, při regulování dopravy nebo v Leontiefově modelu.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

3.1 Sestavení diety

První problematikou, na které si ilustrujeme praktické využití soustav lineárních rovnic, je sestavování diet podle zadaných parametrů.

Příklad 3.1. V nemocnici se připravuje speciální dieta kombinováním 4 základních potravin 1, 2, 3 a 4 tak, aby obsahovala 110 jednotek vápníku (Ca), 120 jednotek železa (Fe), 130 jednotek mědi (Cu) a 140 jednotek vitamínu A. Počet jednotek těchto složek v jedné jednotce příslušné potraviny je uveden v následující tabulce:

	1	2	3	4
Ca	10	20	30	40
Fe	20	30	40	10
Cu	30	40	10	20
A	40	10	20	30

Kolik jednotek potravin 1–4 se má použít na sestavení takové diety?

Řešení Daný problém lze transformovat na soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých: označíme-li x_i množství i-té potraviny použité při přípravě diety ($i = 1, 2, 3, 4$), pak má příslušná soustava tvar

$$\begin{aligned}
10x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 40x_4 &= 110,\\
20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 10x_4 &= 120,\\
30x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 20x_4 &= 130,\\
40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 &= 140.
\end{aligned}$$

Nejprve je potřeba vypočíst hodnosti matice soustavy $\mathbf{A}$ a rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}_R$, abychom mohli pomocí Frobeniovy věty zjistit, kolik má naše soustava řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 20 & 30 & 40 & 110\\ 20 & 30 & 40 & 10 & 120\\ 30 & 40 & 10 & 20 & 130\\ 40 & 10 & 20 & 30 & 140 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 20 & 30 & 40 & 110\\ 0 & -10 & -20 & -70 & -100\\ 0 & -20 & -80 & -100 & -200\\ 0 & -70 & -100 & -130 & -300 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 20 & 30 & 40 & 110 \\ 0 & -10 & -20 & -70 & -100 \\ 0 & 0 & -40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 360 & 400 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 20 & 30 & 40 & 110 \\ 0 & -10 & -20 & -70 & -100 \\ 0 & 0 & -40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 400 & 400 \end{array}\right).$$

Vidíme, že $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) = 4$, což je také počet neznámých. Podle Frobeniovy věty má soustava právě 1 řešení. Najdeme jej, přepíšeme-li řádky výsledné matice (odspodu) zpátky do rovnic:

$$\begin{aligned} 400x_4 = 400 &\implies x_4 = 1, \\ -40x_3 + 40 \cdot 1 = 0 &\implies x_3 = 1, \\ -10x_2 - 20 \cdot 1 - 70 \cdot 1 = -100 &\implies x_2 = 1, \\ 10x_1 + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 40 \cdot 1 = 110 &\implies x_1 = 2. \end{aligned}$$

Řešením soustavy je tedy vektor $\mathbf{x} = (2, 1, 1, 1)$ a dieta se má sestavit ze dvou jednotek potraviny 1 a z jedné jednotky každé z potravin 2, 3, 4.

3.2 Optimalizace využití výrobních kapacit

Soustavy lineárních rovnic nachází své uplatnění také při zkoumání optimálního využití výrobních kapacit.

Příklad 3.2. Firma dekoruje 3 druhy polotovarů - 1, 2, 3. Každý z nich se přitom zdobí v dřevařské, svíčkařské a v šicí dílně (v libovolném pořadí). Časová náročnost dekorování každého z polotovarů v hodinách je uvedena v následující tabulce:

	1	2	3
Dřevařská dílna	1	2	3
Svíčkařská dílna	1,2	1,8	2,4
Šicí dílna	0,4	0,6	1

Kolik jakých polotovarů má firma dekorovat, pokud chce plně využít týdenní kapacity, které jsou 700 hodin v dřevařské dílně, 660 hodin v svíčkařské dílně a 230 hodin v dílně šicí?

Řešení Daný problém lze transformovat na soustavu 3 lineárních rovnic o 3 neznámých: označíme-li x_i množství dekorovaných polotovarů i-tého druhu ($i = 1, 2, 3$), pak má příslušná soustava tvar

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 700, \\ 1{,}2x_1 + 1{,}8x_2 + 2{,}4x_3 &= 660, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 + x_3 &= 230. \end{aligned}$$

Nejprve je potřeba vypočíst hodnosti matice soustavy $\mathbf{A}$ a rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}_R$, abychom mohli pomocí Frobeniovy věty zjistit, kolik má naše soustava řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 700 \\ 1{,}2 & 1{,}8 & 2{,}4 & 660 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 1 & 230 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 700 \\ 0 & -0{,}6 & -1{,}2 & -180 \\ 0 & -0{,}2 & -0{,}2 & -50 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 700 \\ 0 & -0{,}6 & -1{,}2 & -180 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 700 \\ 0 & 6 & 12 & 1\,800 \\ 0 & 0 & 2 & 100 \end{array}\right).$$

Protože $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}_R) = 3$, což je také počet neznámých, má soustava právě 1 řešení.

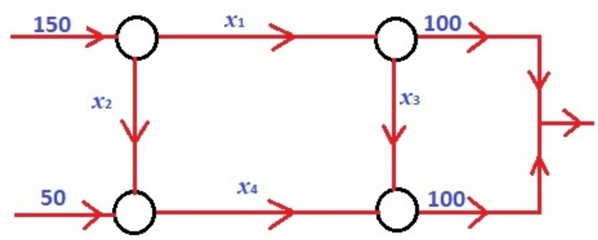
Najdeme jej, přepíšeme-li řádky výsledné matice (odspodu) zpátky do rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_3 = 100 &\implies x_3 = 50, \\ 6x_2 + 12 \cdot 50 = 1800 &\implies x_2 = 200, \\ x_1 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 50 = 700 &\implies x_1 = 150. \end{aligned}$$

Řešením soustavy je tedy vektor $\mathbf{x} = (150, 200, 50)$ a optimální je dekorovat týdně 150 ks 1. polotovaru, 200 ks 2. polotovaru a 50 ks 3. polotovaru.

3.3 Regulace silniční dopravy

Příklad 3.3. Uvažujme regulovaný úsek silniční dopravy, který je tvořen 4 uzly, a který je popsaný na následujícím obrázku:



Obr. 3: Schéma křižovatek

Z něj je patrné, že na přivádějících komunikacích očekáváme dle předchozích měření zatížení ve výši 150 a 50 aut za minutu a na dvou odvádějících komunikacích chceme mít stejné zatížení ve výši 100 aut za minutu.

Jaké vztahy mají mít mezi sebou regulované frekvence x_1, x_2, x_3 a x_4?

Pokud kvůli zúžení požadujeme, aby byla pro zajištění plynulosti dopravy frekvence x_3 pouze 30 aut za minutu, na jaké hodnoty máme zregulovat zbylé frekvence, aby toho bylo dosaženo?

Řešení Daný problém lze transformovat na soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 150, \\ x_1 &= 100 + x_3, \\ x_2 + 50 &= x_4, \\ x_3 + x_4 &= 100. \end{aligned}$$

Po převedení neznámých na levé strany a konstant na pravé má soustava „klasický“ tvar:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 150, \\ x_1 - x_3 &= 100, \\ x_2 + x_4 &= -50, \\ x_3 + x_4 &= 100. \end{aligned}$$

Nejprve je potřeba vypočíst hodnosti matice soustavy $\mathbf{A}$ a rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}_R$, abychom mohli pomocí Frobeniovy věty zjistit, kolik má naše soustava řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 100 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Protože $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}_R) = 3$, ale počet neznámých je 4, má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na $(4 - 3 =)$ 1 parametru.

Jako parametr budeme volit proměnnou x_3, protože v dalším kroku budeme požadovat, aby byla právě tato frekvence zredukována na 30 aut za minutu.

Řešení námi uvažované soustavy najdeme, přepíšeme-li řádky výsledné matice (odspodu) zpátky do rovnic a zvolíme-li parametr (viz výše):

$$\begin{aligned} \text{(volba)} &\implies x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ t + x_4 = 100 &\implies x_4 = 100 - t, \\ x_2 + t = 50 &\implies x_2 = 50 - t, \\ x_1 + (50 - t) = 150 &\implies x_1 = 150 - (50 - t) = 100 + t. \end{aligned}$$

Protože všechny frekvence musí být nezáporné, dostáváme navíc omezující podmínky pro parametr t ve tvaru:

$$t \geq 0, \quad t \leq 100 \text{ a } t \leq 50.$$

Tyto podmínky musí platit všechny současně, proto musí parametr t ležet v intervalu $\langle 0, 50 \rangle$.

Řešení soustavy tedy tvoří jednoparametrickou množinu vektorů

$$\mathbf{x} = (100 + t, 50 - t, t, 100 - t), \ t \in \langle 0, 50 \rangle.$$

Chceme-li frenkvenci x_3 zredukovat na 30 aut za minutu, položíme

$$x_3 = t = 30.$$

Odtud pak pro zbylé proměnné dostáváme $x_1 = 100 + 30 = 130$, $x_2 = 50 - 30 = 20$ a $x_4 = 100 - 30 = 70$, tedy (jediné) řešení

$$\mathbf{x} = (130, 20, 30, 70)\,.$$

V případě zúžení je tedy potřeba pro dosažení požadované plynulosti provést regulaci tak, aby frekvence $x_1 = 130$ a frekvence $x_2 = 20$ aut za minutu.

3.4 Leontiefův model

Poslední ekonomický problém, který budeme v této kapitole zkoumat pomocí soustav lineárních rovnic, je Leontiefův model.

Příklad 3.4. Uvažujme firmu, která se zabývá rostlinnou, živočišnou a chemickou výrobou. Výrobky produkované jednotlivými sektory firma jednak prodává a jednak používá pro svou další výrobu. Např. část produkce rostlinné výroby je spotřebována jako osivo opět v rostlinném sektoru, část použita jako krmivo v živošišném sektoru a část pro výrobu chemických hnojiv. Zbylá produkce slouží k prodeji.

Podle údajů z předchozích let firma spotřebovala v sektoru živočišné výroby 1/10 živočišné produkce a 1/2 rostlinné produkce. Pro rostlinnou výrobu se využilo 3/10 živočišné produkce, 1/5 rostlinné produkce a 2/5 chemické produkce. Chemický sektor spotřeboval 1/10 živočišné, 1/10 rostlinné a 1/5 chemické produkce.

Předpokládáme, že externí poptávka v následujícím roce bude ve výši 700 tis. Kč po živočišné produkci, 650 tis. Kč po rostlinné produkci a 400 tis. Kč po chemické produkci. Jaká celková množství musí v tomto případě sektory vyrobit, aby pokryly jak externí poptávku tak vlastní potřeby?

Řešení Označíme jako x_1 celkovou produkci živočišného sektoru, jako x_2 celkovou produkci rostlinného sektoru a jako x_3 celkovou produkci chemického sektoru. Při řešení této úlohy vycházíme z předpokladu, že se celková produkce rovná celkové spotřebě. Z toho získáme soustavu 3 lineárních rovnic o 3 neznámých:

$$\begin{aligned} x_1 &= 700 + 0{,}1x_1 + 0{,}5x_2, \\ x_2 &= 650 + 0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3, \\ x_3 &= 400 + 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3. \end{aligned}$$

Po převedení neznámých na levé strany má soustava tvar:

$$\begin{aligned} 0{,}9x_1 - 0{,}5x_2 &= 700, \\ -0{,}3x_1 + 0{,}8x_2 - 0{,}4x_3 &= 650, \\ -0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 + 0{,}8x_3 &= 400. \end{aligned}$$

Nejprve je potřeba vypočíst hodnosti matice soustavy $\mathbf{A}$ a rozšířené matice soustavy $\mathbf{A}_R$, abychom mohli pomocí Frobeniovy věty zjistit, kolik má naše soustava řešení. (Vzhledem k tomu, že se násobením řádků nenulovým číslem nezmění hodnost matice soustavy ani její řešení, budeme při výpočtu násobit všechny řádky číslem 10, abychom pracovali s celými čísly. Také zaměníme v průběhu výpočtu pořadí řádků pro jeho usnadnění.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}9 & -0{,}5 & 0 & 700 \\ -0{,}3 & 0{,}8 & -0{,}4 & 650 \\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}8 & 400 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 8 & 4\,000 \\ -3 & 8 & -4 & 6\,500 \\ 9 & -5 & 0 & 7\,000 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 8 & 4\,000 \\ 0 & 11 & -28 & -5\,500 \\ 0 & -14 & 72 & 43\,000 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 8 & 4\,000 \\ 0 & 154 & -392 & -77\,000 \\ 0 & -154 & 792 & 473\,000 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 8 & 4\,000 \\ 0 & 154 & -392 & -77\,000 \\ 0 & 0 & 400 & 396\,000 \end{array}\right).$$

Protože $\mathrm{h}(\mathbf{A}) = \mathrm{h}(\mathbf{A}_R) = 3$, což je současně počet neznámých, má soustava právě jedno řešení. Toto řešení najdeme, přepíšeme-li řádky výsledné matice (odspodu) zpátky do rovnic.

$$\begin{aligned} 400x_3 = 396\,000 &\implies x_3 = 990, \\ 154x_2 - 392 \cdot 990 = -77\,000 &\implies x_2 = 2\,020, \\ -x_1 - 2\,020 + 8 \cdot 990 = 4\,000 &\implies x_1 = 1\,900. \end{aligned}$$

Pro pokrytí externí i interní poptávky musí firma v následujícím roce vyrobit produkci v hodnotě 1 900 tis Kč v živočišném sektoru, 2 020 tis. Kč v rostlinném sektoru a 990 tis. Kč v sektoru chemickém.

Poznámka 3.5 (**Cramerovo pravidlo**).

Všechny příklady v této kapitole byly řešeny Gaussovou eliminační metodou, která je univerzální a jde použít ve všech případech - když má soustava právě jedno, žádné i nekonečně mnoho řešení. Pokud má soustava stejný počet rovnic jako neznámých a pokud má právě jedno řešení, lze pro jeho nalezení použít také Cramerovo pravidlo. Připomeňme, že u tohoto postupu jsou složky $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ tvořící řešení soustavy nalezeny pomocí vzorce:

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{A}_i)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.1}$$

kde $\mathbf{A}_i$ je matice, která vznikne z matice soustavy $\mathbf{A}$ nahrazením i-tého sloupce vektorem pravých stran.

U příkladů, kde je to možné, ověřte výsledek pomocí aplikace Cramerova pravidla.

Poznámka 3.6. V praktických aplikacích obvykle pracujeme se soustavami s větším počtem neznámých než měly ty v předchozích příkladech. Výpočty jsou pak zdlouhavé a je pro ně proto vhodné využít nějaký počítačový program, který umí soustavy řešit (např. Maple nebo Matlab).

V případě, že speciální matematický software není k dispozici, je možné pro řešení soustav využít např. program WolframAlpha (`https://www.wolframalpha.com`). V něm lze řešit soustavy (nejen lineárních) rovnic pomocí příkazu *solve*. Je jen potřeba přejmenovat proměnné (tj. např. použít x, y, z místo x_1, x_2, x_3 a místo desetinných čárek použít desetinné tečky). Soustava rovnic z předchozího příkladu by byla tedy řešitelná pomocí příkazu „$solve(0.9x - 0.5y = 700, -0.3x + 0.8y - 0.4z = 650, -0.1x - 0.1y + 0.8z = 400)$“.

V MS Excel lze soustavy lineárních rovnic řešit pomocí doplňku *Řešitel*. Další možností je převést problém řešení soustavy lineárních rovnic na problém hledání inverzní matice podobně jako v Příkladu 2.3 a poté využít v MS Excel příkazy INVERZE a SOUČIN.MATIC. Pokud bychom chtěli použít pro výpočet řešení soustavy Cramerovo pravidlo, tak využijeme příkaz DETERMINANT.

Σ

V této kapitole jsme se zabývali tím, jak jdou soustavy lineárních rovnic využít při sestavování diety, která má obsahovat předepsaná množství vitamínů. Rovněž v ní byla ukázána uplatnitelnost soustav linárních rovnic při regulování dopravy a v Leontiefově modelu pro stanovení produkce potřebné pro pokrytí externí i interní poptávky.

?

1. Ve firmě vyrábí 3 druhy výrobků (A,B,C) a každý z nich musí při své výrobě projít 3 výrobními linkami (v libovolném pořadí). Počet hodin, který výrobky stráví na jednotlivých linkách jsou uvedeny v následující tabulce:

	A	B	C
1. výrobní linka	0,5	1	1,5
2. výrobní linka	0,6	0,9	1,2
3. výrobní linka	0,2	0,3	0,5

   První výrobní linka může být v provozu maximálně 380 hodin/měsíc, druhá 330 hodin/měsíc a třetí 120 hodin/měsíc. Kolik jednotlivých výrobků je možné měsíčně vyrobit, aby byla využita maximální kapacita linek?

2. Máme za úkol připravit ovocný salát kombinováním 3 ovocí 1, 2, 3 tak, aby obsahoval 340 jednotek vitamínu A, 180 jednotek vitamínu B, 220 jednotek vitamínu C. Počet jednotek těchto složek v 1 dkg příslušného ovoce je uveden v následující tabulce:

	1. ovoce	2. ovoce	3. ovoce
Vitamín A	30	10	20
Vitamín B	10	10	20
Vitamín C	10	30	20

   Kolik dkg jednotlivých druhů ovoce se má na salát použít?

3. Uvažujeme tři firmy F_1, F_2, F_3, přičemž produkce každé z nich je závislá na produkci ostatních firem následujícím způsobem:

   - firma F_1 spotřebuje 2/10 své produkce, 2/5 produkce F_2 a 1/10 produkce F_3,
   - firma F_2 spotřebuje 1/10 své produkce, 1/5 produkce F_1 a 3/10 produkce F_3,
   - firma F_3 spotřebuje 3/10 produkce od F_1, 3/10 produkce od F_2 a 1/10 od F_3.

   Externí odběratelé poptávají produkce ve výších

   - 235 Kč od F_1, 3 515 Kč od F_2 a 1 470 Kč od F_3.

   Vypočítejte hodnoty celkových produkcí jednotlivých firem pro pokrytí externích i vlastních poptávek.

4. Uvažujeme vesnici, v níž člověk C_1 prodává domácí chleba a člověk C_2 mléko. Oba nakupují produkci toho druhého a také ji prodávají ostatním obyvatelům. Konkrétně C_1 spotřebuje 35/100 své produkce chleba a 4/10 produkce mléka od C_2. Prodejce C_2

spotřebuje polovinu své produkce i polovinu chleba nabízeného C_1. Ostatní obyvatelé poptávají denně 15 ks chleba a 45 ks lahví s mlékem. Kolik chleba a kolik lahví s mlékem je potřeba pro pokrytí externích i interních poptávek?

Výsledky příkladů k procvičení:

1. 20 ks výrobku A, 220 ks výrobku B, 100 ks výrobku C.
2. 8 dkg 1. ovoce, 2 dkg 2. ovoce a 4 dkg 3. ovoce.
3. 4 250, 6 600, 5 250.
4. 204 ks chleba, 294 lahví mléka.

Literatura k tématu:

[1] BAUER, L., LIPOVSKÁ, H., MIKULÍK, M., MIKULÍK. V. *Matematika v ekonomii a ekonomice*, Grada, 2015. ISBN 978-80-247-4419-3.

[2] BOHDALOVÁ, M., BOHDAL R. *Matematika nielen pre manažérov.* Univerzita Komenského v Bratislavě, 2022. ISBN 978-80-223-5392-2.

[3] DVOŘÁKOVÁ, L. *Lineární algebra 2.* 2. vyd., ČVUT Praha, 2020. ISBN 978-80-01-06721-5.

[4] FIALKA, M., ŠKOPÍK, B. *Řešené příklady s aplikacemi matematiky v ekonomické a bezpečnostní problematice*, Ústav matematiky fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, studijní opora, 2018.

Kapitola 4

Posloupnosti a jejich využití v ekonomické praxi

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- vypočítat výši úroků a zúročených částek,
- popsat spojitost mezi geometrickými posloupnostmi a složeným úročením,
- aplikovat znalosti o geometrických a aritmetických posloupnostech při analýze platových skupin.

Klíčová slova:

Geometrická a aritmetická posloupnost, složené úročení, platové skupiny.

Náhled kapitoly

Posloupnost je zvláštním případem funkce, která je definována na množině všech přirozených čísel $\mathbb{N}$. Posloupnosti mají svůj význam a uplatnění v mnoha (nejen matematických) teoriích. Setkáte se s nimi například ve statistice, v bankovnictví nebo pojišťovnictví. Matematický aparát (geometrických) posloupností se používá mj. v úlohách úrokování a diskontování. V této kapitole se blíže seznámíme s některými možnostmi jejich praktického využití.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je ilustrování využití posloupností při výpočtu úroků a při analýze platových systémů.

Odhad času potřebného ke studiu

1 hodina

4.1 Složené úročení

Předpokládejme, že je na začátku roku vložena částka K na spořicí účet s roční úrokovou mírou $p\,\%$, který je úročen jednou ročně vždy na konci roku. Vydělíme-li úrokovou míru v % číslem 100, získáme úrokovou míru $i = \frac{p}{100}$ ve formě desetinného čísla. Na konci roku se k vložené částce K přičte úrok

$$u_1 = K \cdot i.$$

Na účtu tedy bude částka

$$S_1 = K + u_1 = K + K \cdot i = K(1+i).$$

Po dalším roce se částka S_1 zúročí stejným principem, tj.

$$u_2 = S_1 \cdot i = K(1+i) \cdot i.$$

Na účtu tedy bude částka

$$S_2 = S_1 + u_2 = K(1+i) + K(1+i) \cdot i = K(1+i)(1+i) = K(1+i)^2.$$

Po třech letech se zúročí částka S_2 stejným postupem, tj.

$$u_3 = S_2 \cdot i = K(1+i)^2 \cdot i.$$

Na účtu tedy bude částka

$$S_3 = S_2 + u_3 = K(1+i)^2 + K(1+i)^2 \cdot i = K(1+i)^2(1+i) = K(1+i)^3.$$

Pokud bychom tímto způsobem dále pokračovali získali bychom posloupnost

$$\left\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots\right\},$$

kde

$$S_n = K(1+i)^n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

je částka, která je na spořicím účtu po n letech.

Tato posloupnost je geometrická s kvocientem $q = (1+i)$, protože každý z členů posloupnosti lze získat tak, že předchozí člen vynásobíme výrazem $(1+i)$.

Příklad 4.1. Předpokládejme, že je na začátku roku vložena částka 1 000 Kč na spořicí účet s roční úrokovou mírou 2 %, který je úročen jednou ročně vždy na konci roku. Vypočítejte, kolik bude na tomto účtu po 1, 2, 3 a 4 letech.

Řešení Dle odvození v předchozím příkladu bude

$$\begin{aligned} S_1 &= K(1+i)^1 = 1\,000 \cdot (1+0{,}02) = 1\,020, \\ S_2 &= K(1+i)^2 = 1\,000 \cdot (1+0{,}02)^2 = 1\,040{,}40, \\ S_3 &= K(1+i)^3 = 1\,000 \cdot (1+0{,}02)^3 \doteq 1\,061{,}21, \\ S_4 &= K(1+i)^4 = 1\,000 \cdot (1+0{,}02)^4 \doteq 1\,082{,}43. \end{aligned}$$

Takto jsme vypočetli první čtyři členy posloupnosti

$$\left\{S_1, S_2, S_3, \dots\right\},$$

o které víme, že je geometrická s kvocientem $q = (1 + 0{,}02) = 1{,}02$.

Příklad 4.2. Předpokládejme, že je na začátku roku vložena částka 1000 Kč na spořicí účet s roční úrokovou mírou 2 %, který je úročen jednou ročně vždy na konci roku a předpokládejme, že jsou úroky daněny 15% daní. Vypočítejte, kolik bude na tomto účtu po 1, 2, 3 a 4 letech.

Řešení Lze postupovat obdobně jako v předchozím příkladu s tím rozdílem, že odečtení 15% daně z úroku je totéž jako místo úrokové míry i použít $0{,}85i$, tj.:

$$\begin{aligned} S_1 &= K(1+0{,}85i)^1 = 1\,000 \cdot (1+0{,}017) = 1\,017, \\ S_2 &= K(1+0{,}85i)^2 = 1\,000 \cdot (1+0{,}017)^2 \doteq 1\,034{,}29, \\ S_3 &= K(1+0{,}85i)^3 = 1\,000 \cdot (1+0{,}017)^3 \doteq 1\,051{,}87, \\ S_4 &= K(1+0{,}85i)^4 = 1\,000 \cdot (1+0{,}017)^4 \doteq 1\,069{,}75. \end{aligned}$$

Takto tvořená posloupnost

$$\left\{S_1, S_2, S_3, \dots\right\},$$

je geometrická s kvocientem $q = (1 + 0{,}85 \cdot 0{,}02) = 1{,}017$.

4.2 Platové skupiny

Posloupnosti (zejména aritmetické a geometrické) lze využít také při analyzování platových škál.

Příklad 4.3. Platový systém firmy je založen na desetistupňové škále. Zaměstnanci z desáté (nejvyšší) platové skupiny mají oproti zaměstnancům z deváté skupiny plat vyšší o částku d, stejně jako zaměstnanci z deváté skupiny oproti těm v osmé, atd. Víme, že nejnižší plat ve firmě je 28 000 Kč a nejvyšší 73 000 Kč. Jaká je částka d, o kterou se jednotlivé skupiny od sebe liší?

Řešení Označíme jako a_1 plat v 1. skupině, jako a_2 plat ve 2. skupině, . . . a jako a_{10} plat v 10. skupině. Ze zadání víme, že $a_1 = 28\,000$ a $a_{10} = 73\,000$. Protože rozdíl mezi dvěma sousedními skupinami (dvěma členy posloupnosti) je konstantní ve výši d, tvoří platové skupiny počáteční členy aritmetické posloupnosti. Pro ni platí, že

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d, \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d, \\ &\vdots \\ a_{10} &= a_1 + 9d. \end{aligned}$$

Dosazením za a_1 a a_{10} do posledního vztahu pak získáme

$$73\,000 = 28\,000 + 9d \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{73\,000 - 28\,000}{9} = 5\,000.$$

Rozdíl mezi jednotlivými platovými skupinami je tedy 5 000 Kč.

Příklad 4.4. Platový systém firmy je založen na pětistupňové škále, která je založena na tom, že zaměstnanci z vyšší skupiny mají plat vždy o 20 % vyšší než ti ve skupině předchozí. Zaměstnanci z páté (nejvyšší) platové skupiny mají plat 41 472 Kč. Jaký plat mají zaměstnanci v nejnižší skupině?

Řešení Označíme jako a_1 plat v 1. skupině, jako a_2 plat ve 2. skupině, . . . a jako a_5 plat v 5. skupině. Ze zadání víme, že $a_5 = 41\,472$ a že

$$\begin{aligned} a_2 &= 1{,}2a_1, \\ a_3 &= 1{,}2a_2 = 1{,}2 \cdot 1{,}2a_1 = 1{,}2^2 a_1, \\ a_4 &= 1{,}2a_3 = 1{,}2 \cdot 1{,}2^2 a_1 = 1{,}2^3 a_1, \\ a_5 &= 1{,}2a_4 = 1{,}2 \cdot 1{,}2^3 a_1 = 1{,}2^4 a_1. \end{aligned}$$

Dosazením za a_5 do posledního vztahu pak získáme

$$41\,472 = 1{,}2^4 a_1 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = \frac{41\,472}{1{,}2^4} = 20\,000.$$

Zaměstnanci v nejnižší skupině mají tedy plat 20 000 Kč.

Poznamenejme, že členy posloupnosti v tomto příkladu tvořily první členy geometrické posloupnosti s kvocientem 1,2.

Σ

V této kapitole bylo ukázáno, jak lze využít aparát geometrických a aritmetických posloupností při složeném úročení a při analýze platových skupin.

?

1. Na začátku roku vložíme částku 15 000 Kč na spořicí účet s roční úrokovou mírou 6 %, který je úročen jednou ročně vždy na konci roku. Vypočítejte, kolik bude na tomto účtu po 5 letech.
2. Jak se částka po 5 letech z předchozího příkladu změní, pokud předpokládáme, že jsou úroky daněny 15 % daní?
3. Kolik musíme vložit na začátku roku na účet s roční úrokovou mírou 4 %, který je úročený vždy na konci roku, abychom na něm po 3 letech měli 100 000?

4. Jak se částka vložená na počátku roku v předchozím příkladu změní, jsou-li úroky daněny 15 % daní?

Výsledky příkladů k procvičení:

1. 20 073,38 Kč.
2. 19 235,56 Kč.
3. 88 899,64 Kč.
4. 90 456,21 Kč.

Literatura k tématu:

[1] BAUER, L., LIPOVSKÁ, H., MIKULÍK, M., MIKULÍK. V. *Matematika v ekonomii a ekonomice*, Grada, 2015. ISBN 978-80-247-4419-3.

[2] BOHDALOVÁ, M., BOHDAL R. *Matematika nielen pre manažérov*. Univerzita Komenského v Bratislavě, 2022. ISBN 978-80-223-5392-2.

[3] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9.

Kapitola 5

Limita posloupnosti a její využití v ekonomické praxi

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- vypočítat zúročenou částku při použití úročení s častějším připisováním úroků,
- odvodit vzorec pro zúročenou částku v případě spojitého úročení.

Klíčová slova:

Limita posloupnosti, úročení s častějším připisováním úroků, spojité úročení.

Náhled kapitoly

V této kapitole bude analyzováno, jak lze vypočítat zúročená částka v případě, že jsou úroky připisovány víckrát ročně.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je zobecnění složeného úročení z předchozí kapitoly pro případ, kdy jsou úroky připisovány během roku vícekrát.

Odhad času potřebného ke studiu

1 hodina

5.1 Složené úročení s častějším připisováním úroků a úročení spojité

V minulé kapitole jsme uvažovali případ, kdy byly vklady úročeny pouze jednou ročně, vždy na jeho konci. Pokud by vklady byly úročeny častěji (konkrétně m-krát ročně), lze obdobně jako v předchozí kapitole odvodit, že částka S_n, která je na účtu po n letech má tvar

$$S_n = K\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}. \tag{5.1}$$

Rozdíl mezi vzorci (4.1) a (5.1) spočívá v tom, že při častějším připisování úroků je potřeba úrokovou míru i vydělit číslem, které udává kolikrát je během jednoho roku vklad úročen, a exponent popisující počet úrokovacích období se změní z n na mn. To je z toho důvodu, že je úrok připisován po n let a v každém roce m-krát.

Příklad 5.1. Předpokládejme, že je na začátku roku vložena částka 1 000 Kč na spořicí účet s roční úrokovou mírou 2 %, který je úročen 12-krát ročně, vždy na konci měsíce. Vypočítejte, kolik bude na tomto účtu po 1, 2, 3 a 4 letech.

Řešení Podle vzorce (5.1) bude

$$\begin{aligned}
S_1 &= K\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12\cdot 1} = 1\,000\cdot\left(1+\frac{0{,}02}{12}\right)^{12} \doteq 1\,020{,}18,\\
S_2 &= K\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12\cdot 2} = 1\,000\cdot\left(1+\frac{0{,}02}{12}\right)^{24} \doteq 1\,040{,}78,\\
S_3 &= K\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12\cdot 3} = 1\,000\cdot\left(1+\frac{0{,}02}{12}\right)^{36} \doteq 1\,061{,}78,\\
S_4 &= K\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12\cdot 4} = 1\,000\cdot\left(1+\frac{0{,}02}{12}\right)^{48} \doteq 1\,083{,}21.
\end{aligned}$$

Takto vzniklá posloupnost

$$\left\{S_1, S_2, S_3, \dots\right\}$$

je geometrická s kvocientem $q = (1+\frac{0{,}02}{12})^{12}$.

Poznamenejme, že vypočítané částky jsou větší než v Příkladu 4.1 z důvodu, že jsou úroky připisovány víckrát ročně.

Příklad 5.2. Představme si, že se nám podařilo najít banku, která vklady úročí roční úrokovou mírou $p = 100$ %, a že je vklad úročen v každém okamžiku, tj. počet úrokovacích období je nekonečný.

Kolik budeme mít na účtu po 1 roce, pokud na začátku roku vložíme na účet částku K?

Řešení Vydělíme-li úrokovou míru v % číslem 100, získáme úrokovou míru $i = \frac{p}{100} = \frac{100}{100} = 1$. Protože je úrok připisován nekonečněkrát ročně, je $m = \infty$. Číslo $n = 1$, protože řešíme, kolik bude na účtu po 1 roce. Vzorec (5.1) bude mít tedy následující podobu (nemůžeme přímo dosadit, použijeme limitu):

$$S_1 = \lim_{m\to\infty} K\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = K \cdot \mathrm{e},$$

kde e je Eulerovo číslo (s neukončeným desetinným rozvojem) rovné přibližně 2,718.

Výsledek lze tedy interpretovat tak, že by se počáteční vklad K za uvedených podmínek zvětšil za 1 rok na $K \cdot \mathrm{e}$, tj. přibliženě 2,718-krát.

Σ

V této kapitole bylo analyzováno, jak lze vypočítat zúročená částka v případě, že jsou úroky připisovány víckrát ročně a byl zkoumán i teoretický případ, kdy jsou úroky připisovány spojitě.

?

1. Na začátku roku vložíme částku 100 Kč na spořicí účet s roční úrokovou mírou 5 %, který je úročen čtyřikrát ročně vždy na konci čtvrtletí. Vypočítejte, kolik bude na tomto účtu po 5 letech.
2. Jak se částka po 5 letech z předchozího příkladu změní, pokud předpokládáme, že jsou úroky daněny 15 % daní?
3. Kolik musíme vložit na začátku roku na účet s roční úrokovou mírou 4 %, který je úročený vždy na konci měsíce, abychom na něm po 3 letech měli 100 000?
4. Jak se částka vložená na počátku roku v předchozím příkladu změní, jsou-li úroky daněny 15 % daní?
5. Představme si, že banka vklady úročí roční úrokovou mírou $p = 100$ %, a že jsou vklady úročeny v každém okamžiku. Kolik budeme mít na účtu po 2 letech, pokud na začátku vložíme na účet částku 1 000 Kč?

Výsledky příkladů k procvičení:

1. 128,20 Kč.
2. 123,54 Kč.
3. 88 709,74 Kč.
4. 90 315,98 Kč.
5. $1000\mathrm{e}^2 \doteq 7389{,}06$ Kč.

Literatura k tématu:

[1] BAUER, L., LIPOVSKÁ, H., MIKULÍK, M., MIKULÍK. V. *Matematika v ekonomii a ekonomice*, Grada, 2015. ISBN 978-80-247-4419-3.

[2] BOHDALOVÁ, M., BOHDAL R. *Matematika nielen pre manažérov*. Univerzita Komenského v Bratislavě, 2022. ISBN 978-80-223-5392-2.

[3] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9.

Kapitola 6

Číselné řady a jejich využití v ekonomické praxi

Po prostudování této kapitoly budete umět:

- odvodit vzorec pro naspořenou částku,
- aplikovat odvozený vzorec pro výpočet naspořené částky,
- vypočítat Herfindahlův–Hirschmannův index a posoudit pomocí něj koncentraci v tržním odvětví.

Klíčová slova:

Číselná řada, naspořená částka, Herfindahlův–Hirschmannův index.

Náhled kapitoly

Teorie číselných řad navazuje na teorii číselných posloupností, proto při studiu řad uplatníme řadu poznatků o posloupnostech. V praktických aplikacích nalézají číselné řady uplatnění např. při spoření nebo při výpočtu Herfindahlova–Hirschmannova indexu, jak si ukážeme v této kapitole.

Cíle kapitoly

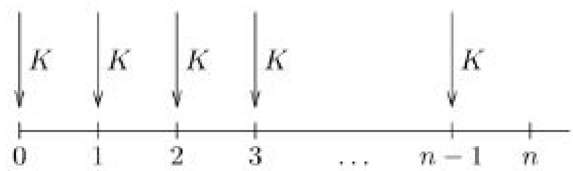
Cílem kapitoly je ilustrace využití číselných řad v problematice spoření a při analýze koncentrace v tržním odvětví.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

6.1 Spoření

Předpokládejme, že na začátku každého roku po dobu n let uložíme na účet částku ve výši K (viz následující obrázek):



Obr. 4: Znázornění jednotlivých vkladů

Dále předpokládáme, že jsou vklady úročeny roční úrokovou mírou p %; úrok je připsán jednou ročně vždy na konci roku. Zjistěte, kolik bude na účtu naspořeno po n letech.

Vydělíme-li úrokovou míru v % číslem 100, získáme úrokovou míru $i = \frac{p}{100}$ ve formě desetinného čísla.

První z vkladů se úročí celých n let, a proto se dle vzorce (4.1) zúročí na částku

$$S_1 = K(1+i)^n.$$

Druhý z vkladů se úročí o 1 rok kratší dobu, a proto se zúročí na částku

$$S_2 = K(1+i)^{n-1}.$$

Obdobně se třetí z vkladů zúročí na částku

$$S_3 = K(1+i)^{n-2}.$$

Poslední z vkladů se úročí pouze 1 rok na částku

$$S_n = K(1+i).$$

Stav účtu S po n letech bude roven součtu všech zúročených vkladů, tj.

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n.$$

Po dosazení za $S_1, S_2, \ldots, S_n$ dostaneme

$$\begin{aligned} S &= K(1+i)^n + K(1+i)^{n-1} + \cdots + K(1+i) \\ &= K(1+i)\Big[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}\Big]. \end{aligned}$$

Výraz v hranaté závorce je součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = (1+i)$.

Tento součet lze vypočítat pomocí vzorce pro součet prvních n členů geometrické řady

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{6.1}$$

Odtud získáme

$$S = K(1+i)s_n = K(1+i)1\,\frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{K(1+i)\big((1-(1+i)^n\big)}{-i}. \tag{6.2}$$

Příklad 6.1. Předpokládejme, že na začátku každého roku po dobu 10 let uložíme na účet částku ve výši 1 500 Kč. Dále předpokládáme, že jsou vklady úročeny roční úrokovou mírou 5 %; úrok je připsán jednou ročně vždy na konci roku. Zjistěte, kolik bude na účtu po 10 letech.

Řešení Dosazením do vzorce (6.2) získáme

$$\begin{aligned} S &= \frac{K(1+i)(1-(1+i)^n)}{-i} = \frac{1\,500(1+0{,}05)(1-(1+0{,}05)^{10})}{-0{,}05} \\ &\doteq 19\,810{,}18. \end{aligned}$$

Po 10 letech bude na účtu 19 810,18 Kč. Tato částka je tvořena z vkladů ve výši $10 \cdot 1\,500 = 15\,000$ Kč a z úroků ve výši $4\,810{,}18$ Kč.

Příklad 6.2. Předpokládejme, že spoříme podle stejného schématu jako v minulém příkladu s tím rozdílem, že bereme v úvahu i to, že jsou úroky daněny 15 % daní. Zjistěte, kolik bude na účtu po 10 letech.

Řešení Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu s tím rozdílem, že místo $i = 0{,}05$ je potřeba dosadit $0{,}85 \cdot 0{,}05$:

$$\begin{aligned} S &= \frac{K(1+i)(1-(1+i)^n)}{-i} = \frac{1\,500(1+0{,}85\cdot 0{,}05)(1-(1+0{,}85\cdot 0{,}05)^{10})}{-0{,}85\cdot 0{,}05} \\ &\doteq 18\,993{,}66. \end{aligned}$$

Po 10 letech bude na účtu 18 993,66 Kč. Tato částka je tvořena z vkladů ve výši $10 \cdot 1\,500 = 15\,000$ Kč a z úroků ve výši $3\,993{,}66$ Kč.

Příklad 6.3. Rodiče se rozhodnou, že budou svému dítěti (narozenému 1. 1.) od narození až do jeho 17 let ukládat na účet úročený roční úrokovou mírou 5 % vždy jednou ročně 1. 1. takovou částku, aby mu k 18. narozeninám naspořili 1 000 000 Kč. Kolik mají takto pravidelně ukládat, jestliže je úrok připsán jednou ročně vždy na konci roku?

Řešení Opět můžeme použít vzorec (6.2), tentokrát však známe celkovou naspořenou částku a neznáme výši pravidelného vkladu:

$$S = \frac{K(1+i)(1-(1+i)^n)}{-i} \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{-i \cdot S}{(1+i)(1-(1+i)^n)},$$

a tedy po dosazení

$$K = \frac{-0{,}05 \cdot 1\,000\,000}{(1+0{,}05)(1-(1+0{,}05)^{18})} \doteq 33\,854.$$

Pokud budou rodiče ukládat počátkem každého roku 33 854 Kč, pak bude jejich cíl o naspoření 1 000 000 Kč splněn.

Poznámka 6.4. Problematika využití teorie geometrických číselných řad v oblasti spoření je samozřejmě podstatně složitější - můžeme uvažovat připisování úroků v jiných než ročních intervalech, ukládání částek také v častějších intervalech, úložky na konci období místo na jeho začátku atd. Uvedené příklady měly sloužit jen jako stručný úvod do problematiky dlouhodobého spoření, kterou se budete podrobně zabývat ve 3. ročníku v rámci předmětu Matematické aplikace v ekonomii.

6.2 Herfindahlův–Hirschmannův index

Další ekonomickou aplikací číselných řad je Herfindahlův–Hirschmannův index HHI, který se používá k měření koncentrace v tržním odvětví a pomocí kterého lze zjistit, zda-li v něm např. může dojít ke kartelu. Proto je využíván antimonopolním úřadem jako pomocný indikátor při fúzích, tj. při spojení více podniků v jeden.

Působí-li v daném odvětví n firem a jsou-li jejich tržní podíly v procentech s_1, s_2, ..., s_n, je HHI definován jako

$$\mathrm{HHI} = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_n^2. \tag{6.3}$$

Koncentrovanost trhu je posuzována podle hodnoty HHI takto:

HHI	**Koncentrace trhu**
$\mathrm{HHI} < 1\,000$	Nízká koncentrace
$1\,000 \leq \mathrm{HHI} < 2\,000$	Střední koncentrace
$2\,000 \leq \mathrm{HHI}$	Vysoká koncentrace

Tab. 3: HHI a koncentrace trhu

Pokud je koncentrace nízká, jsou fúze považovány za bezproblémové. V případě střední nebo vysoké koncentrace se bere v úvahu i „nová“ hodnota HHI v případě, že by fúze byla realizována a rozdíl původní a nově vypočtené hodnoty. Je-li rozdíl menší než 250 u středně koncentrovaného trhu (150 u vysoce koncentrovaného), je spojení obvykle chápáno jako bezproblémové.

Příklad 6.5. Uvažujme trh, na kterém působí 8 automobilek:

Automobilka	**Tržní podíl**
A	35 %
B	20 %
C	10 %
D	10 %
E	7,5 %
F	7,5 %
G	5 %
H	5 %

Tab. 4: Tržní podíly

Určete pomocí HHI, jaká je koncentrovanost trhu a diskutujte možnost fúze mezi G a H. Poté se zaměřte na posouzení případné fúze mezi automobilkami A a B.

Řešení Herfindahlův–Hirschmannův index pro zkoumaný trh je

$$\mathrm{HHI} = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 = 35^2 + 20^2 + 10^2 + 10^2 + 7{,}5^2 + 7{,}5^2 + 5^2 + 5^2 = 1\,987{,}5.$$

Trh je proto středně koncentrovaný.

V případě fúze automobilek G a H by se snížil počet automobilek na 7 a nově vzniklá firma by měla podíl 10 %. Nový HHI by vyšel

$$\mathrm{HHI} = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 = 35^2 + 20^2 + 10^2 + 10^2 + 7{,}5^2 + 7{,}5^2 + 10^2 = 2\,037{,}5$$

a rozdíl nového a původního HHI by byl proto roven

$$2\,037{,}5 - 1\,987{,}5 = 50.$$

Protože je rozdíl menší než 250, úřad pro ochranu hospodářské soutěže by fúzi automobilek pravděpodobně povolil.

V případě fúze automobilek A a B je situace odlišná - nová automobilka by měla podíl na trhu 55 %. Nový HHI by vyšel

$$\mathrm{HHI} = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 = 55^2 + 10^2 + 10^2 + 7{,}5^2 + 7{,}5^2 + 5^2 + 5^2 = 3\,387{,}5$$

a rozdíl nového a původního HHI by byl proto roven

$$3\,387{,}5 - 1\,987{,}5 = 1\,400.$$

Protože je rozdíl větší než 250, úřad pro ochranu hospodářské soutěže by fúzi automobilek pravděpodobně nepovolil.

Σ

V této kapitole bylo ilustrováno využití číselných řad v problematice spoření a při analýze koncentrace v tržním odvětví pomocí Herfindahlova–Hirschmannova indexu.

?

1. Na trhu působí 10 výrobců obuvi. Jejich tržní podíly jsou uvedeny v následující tabulce:

Výrobce obuvi	**Tržní podíl**
A	30 %
B	25 %
C	10 %
D	8,5 %
E	7,5 %
F	6 %
G	5 %
H	4 %
I	2 %
J	2 %

Určete pomocí HHI, jaká je koncentrovanost trhu a diskutujte možnost fúze mezi A a C. Poté se zaměřte na posouzení případné fúze mezi F, G a H.

2. Za 5 let chceme koupit automobil za 750 000 Kč. Kolik musíme spořit počátkem každého roku při roční úrokové míře 12 %, abychom si na něj našetřili? Zaokrouhlujte na celé Kč.
3. Jak se výsledek změní, uvažujeme-li v předchozím příkladu danění úroků 15 % daní?
4. Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li počátkem každého roku 20 000 Kč? Roční úroková míra je 3 %.

Výsledky příkladů k procvičení:

1. HHI=1 838,5. Trh je středně koncentrovaný. První z fúzí by pravděpodobně schválena nebyla, druhá ano.
2. 105 408 Kč.
3. 111 034 Kč.
4. 109 368 Kč.

Literatura k tématu:

[1] BAUER, L., LIPOVSKÁ, H., MIKULÍK, M., MIKULÍK. V. *Matematika v ekonomii a ekonomice*, Grada, 2015. ISBN 978-80-247-4419-3.

[2] BOHDALOVÁ, M., BOHDAL R. *Matematika nielen pre manažérov.* Univerzita Komenského v Bratislavě, 2022. ISBN 978-80-223-5392-2.

[3] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2).* Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-01-7.

Seznam literatury a použitých zdrojů

[1] BAUER, L., LIPOVSKÁ, H., MIKULÍK, M., MIKULÍK. V. *Matematika v ekonomii a ekonomice*, Grada, 2015. ISBN 978-80-247-4419-3.

[2] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika I*, 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2006.

[3] BOHDALOVÁ, M., BOHDAL R. *Matematika nielen pre manažérov.* Univerzita Komenského v Bratislavě, 2022. ISBN 978-80-223-5392-2.

[4] BRADLEY, T., PATTON, P. *Essential Mathematics for Economics and Business*, 2nd Edition. New York: J. Wiley, 2002. ISBN 04-708-4466-3.

[5] CIPRA, T. *Finanční a pojistné vzorce*, 1. vydání. Praha: Grada Publishing, 2006.

[6] DOWLING, E.T. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Introduction to Mathematical Economist*, 3rd Edition. New York: McGraw-Hill, 2001. ISBN 9780071762519

[7] DVOŘÁKOVÁ, L. *Lineární algebra 2.* 2. vyd., ČVUT Praha, 2020. ISBN 978-80-01-06721-5.

[8] FIALKA, M., ŠKOPÍK, B. *Řešené příklady s aplikacemi matematiky v ekonomické a bezpečnostní problematice*, Ústav matematiky fakulty aplikované informatiky Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně, studijní opora, 2018.

[9] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2).* Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-01-7.

[10] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1).* Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9.

[11] KOUŘILOVÁ P., PAVLAČKOVÁ, M. *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii.* UP Olomouc, 2013. ISBN 978-80-244-3317-2.

[12] MEZNÍK, I. *Základy matematiky pro ekonomii a management.* Akademické nakladatelství CERM, 2018. ISBN 978-80-214-5522-1.

[13] MOISES PENA-LEVANO, L. *Schaum's Outline of Mathematical Methods for Business, Econo-mics and Finance.* 2nd ed., McGraw-Hill Education, 2021. ISBN 9781264266876.

[14] PAVLAČKOVÁ, M. *Základy lineární algebry a matematické analýzy.* Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., studijní opora, 2022.

[15] PEREN, F. W. *Math for Business and Economics, Compendium of Essential Formulas*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2022. ISBN 978-36-626-3251-2.

[16] ROSSER, M. *Basic mathematics for economists*, 2nd Edition. London: Routledge, 2003. ISBN 02-034-2439-5.

[17] SIMON, C.P., BLUME, L.E. *Mathematics for Economists*. New York: W.W. Norton, 1994. ISBN 03-939-5733-0.

[18] WALL, S., GRIFFITHS, A. *Applied Economics: an introductory course*, 10nd Edition. Harlow: Financial Times Prentice Hall, 2004. ISBN 02-736-8432-9.

Seznam obrázků

Seznam tabulek