

MATEMATIKA PRO EKONOMICKOU PRAXI - TEORIE

STUDIJNÍ OPORTA PRO KOMBINOVANÉ
STUDIUM

MATEMATIKA PRO EKONOMICKOU PRAXI - TEORIE

doc. RNDr. **Martina Pavlačková**, Ph.D.

RNDr. **Vladimíra Mádrová**, CSc.

RNDr. **Vratislava Mošová**, CSc.

Mgr. **Veronika Říhová**, Ph.D.

© Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s.

Autoři: doc. RNDr. Martina PAVLAČKOVÁ, Ph.D.,
RNDr. Vladimíra MÁDROVÁ, CSc.,
RNDr. Vratislava MOŠOVÁ, CSc.,
Mgr. Veronika ŘÍHOVÁ, Ph.D.

Olomouc 2024

Obsah

Úvod	7
Výroková logika	9
Výrokové operace	12
Zákony výrokové logiky	13
Logická výstavba matematiky	15
Stavba matematické věty	15
Kvantifikátory	16
Negování kvantifikovaných výroků	17
Negování výroků s udáním počtu	17
Pořadí kvantifikátorů	18
Množiny	21
Množina a její prvek	23
Operace s množinami	24
Číselné množiny	26
Množina $\mathbb{R}^*$	27
Uspořádání a početní operace v množině $\mathbb{R}^*$	28
Intervaly	29
Okolí bodu	30
Vektorové prostory	37
Vektory a operace s nimi	38
Lineární kombinace vektorů	39
Lineární závislost vektorů	41
Dimenze a báze vektorového prostoru	43
Matice	46
Definice matice a typy matic	47
Operace s maticemi	49
Transponovaná matice	52

Hodnost matice a matice inverzní	55
Hodnost matice	56
Inverzní matice a její výpočet	58
Determinanty	63
Definice determinantu a jeho vlastnosti	64
Výpočet hodnoty determinantů	65
Laplaceův rozvoj determinantu	67
Užití determinantů	68
Soustavy lineárních rovnic	72
Definice soustavy a jejího řešení	73
Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic	74
Existence řešení	75
Metody řešení soustav lineárních rovnic	79
Gaussova eliminační metoda	80
Cramerovo pravidlo	85
Řešení soustavy užitím inverzní matice	87
Číselné posloupnosti	92
Definice posloupnosti a její graf	93
Vlastnosti posloupnosti	96
Limita posloupnosti	101
Limita posloupnosti	102
Vlastnosti limity posloupnosti	106
Vlastnosti konvergentních posloupností	108
Přehled limit význačných posloupností	111
Výpočet limit posloupností	111
Číselné řady	115
Definice číselné řady a jejího součtu	116
Přehled význačných řad	119

MATEMATIKA PRO EKONOMICKOU PRAXI

Vlastnosti libovolných řad	120
Kritéria konvergence číselných řad	124
Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy	125
Alternující řady	128
Absolutní konvergence řad	129
Seznam literatury a použitých zdrojů	133
Seznam obrázků	135

Úvod

Cílem studijní opory je seznámení studentů se základy výrokové logiky, teorie množin, lineární algebry, číselnými posloupnostmi a řadami. Tyto oblasti matematiky jsou obvykle těmi prvními, se kterými se studenti bakalářských studií na vysokých školách setkávají. Text studijní opory je proto koncipován tak, aby byl co nejsrozumitelnější pro široký okruh studentů přicházejících z různých středních škol. Spolu se srozumitelností se autoři snažili zachovat matematickou rigoróznost celého textu ve formě definic a matematických vět.

Student po nastudování učebního textu umí definovat základní pojmy matematické logiky, rozumí rozdíl mezi výrokem a výrokovou formou, umí vyhodnotit pravdivost složených výroků pomocí tabulky pravdivostních hodnot a dokáže negovat složené i kvantifikované výroky.

Také je schopen definovat a aplikovat základní množinové operace, zná číselné množiny a dokáže zavést rozšířenou reálnou osu i počítat s nevlastními čísly. Rovněž rozumí pojmům interval a okolí bodu a dokáže je graficky ilustrovat.

Umí definovat základní pojmy lineární algebry jakými jsou matice, hodnost nebo determinant. Dokáže vysvětlit a aplikovat operace s maticemi – ví, jak matice sčítat, násobit i transponovat. Také umí vypočítat determinanty čtvercových matic i hodnoty libovolných matic. Je schopen nalézt matici inverzní jak pomocí převodu na jednotkovou matici, tak pomocí adjungované matice. V neposlední řadě dokáže pomocí Gaussovy eliminační metody a Cramerova pravidla řešit soustavy lineárních rovnic.

Také je schopen definovat číselnou posloupnost, dokáže určovat její členy a nakreslit její graf. Rozumí pojmu limita posloupnosti a dokáže jej vysvětlit, vizualizovat a také vypočítat. Dokáže rovněž popsat konstrukci číselné řady a jejího součtu a na základě kritérií dokáže rozhodnout o konvergenci či divergenci číselné řady.

Jednotlivé kapitoly studijního textu obsahují náhled učiva, které se v dané kapitole bude probírat, klíčová slova, cíle kapitoly i čas přibližně potřebný k jejímu prostudování. Na konci kapitol jsou vždy uvedeny kontrolní otázky a neřešené příklady s výsledky pro zopakování probíraného učiva.

Kapitola 1

Výroková logika



Po prostudování kapitoly budete umět:

- Charakterizovat pojmy výrok a výroková forma,
- definovat výrokové operace,
- užívat tabulku pravdivostních hodnot,
- definovat základní pojmy axiomatické výstavby matematické teorie,
- rozlišovat a negovat obecný a existenční kvantifikátor.



Klíčová slova:

Výrok, výroková forma, pravdivostní hodnota, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, logická spojka, kvantifikátor, axiom, definice, věta, důkaz.

Náhled kapitoly

- V této kapitole budou nejprve připomenuty základy výrokové logiky ze středních škol a poté bude daná problematika rozebrána podrobněji. Důraz bude kladen mj. na pochopení rozdílu mezi výrokem a výrokovou formou a také na to, jak lze z výrokových forem výroky vyrobit pomocí kvantifikátorů.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je rozšíření středoškolské látky týkající se výrokové logiky.

Odhad času potřebného ke studiu

- 3 hodiny

Logika

Matematická logika se zabývá přesným formálním studiem jazyka matematiky a matematických pracovních postupů. Při studiu matematiky se setkáváme s pojmy výrok, axiom, definice, věta, důkaz atd. Tyto pojmy považujeme za základní prvky logické výstavby matematiky. Vyskytují se v celém dalším výkladu, proto je nezbytné se s nimi obeznámit a pochopit přesně jejich význam. Základní význam v matematické logice mají výroky.

Definice 1.1 Výrok je jakékoliv sdělení (tvrzení), o němž má smysl rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé, přičemž z těchto dvou možností nastane právě jedna. Pravdivému výroku přiřazujeme pravdivostní hodnotu 1 a nepravdivému 0. Stručně budeme psát $\text{ph } 1$ a $\text{ph } 0$.

Příklady výroků:

- Praděd je nejvyšší hora České republiky. ($\text{ph } 0$)
- $2 + 3 = 5$ ($\text{ph } 1$)
- Řešením kvadratické rovnice $x^2 - 5x = 0$ jsou čísla 0 a 5. ($\text{ph } 1$)
- Každý pravoúhlý trojúhelník je rovnostranný. ($\text{ph } 0$)

Naproti tomu výroky nejsou:

- Kéž by Olomouc byla hlavním městem České republiky!
- Sestrojte trojúhelník!
- Je x reálné číslo?

Z uvedených příkladů je zřejmé, že výrok může mít jedině tvar věty oznamovací. Věty tázací, rozkazovací a přací výroky nejsou. Avšak ani oznamovací věta nemusí být výrokem.

Například:

- Číslo x je dělitelné pěti. (není výrok)
- Přímka p je kolmá na přímku q . (není výrok)

O pravdivosti či nepravdivosti těchto sdělení nemá smysl uvažovat, dokud za x nedosadíme určité číslo a dokud nebudeme konkrétně znát přímky p a q . Zatím tedy výše uvedená sdělení nejsou výroky, ale jsou to tzv. výrokové formy.

Definice 1.2 Výroková forma je sdělení, které obsahuje jednu nebo více proměnných, a které se po dosazení proměnné z určité neprázdné množiny - **definičního oboru** výrokové formy nebo také **oboru proměnnosti** - stane výrokem.

Definice 1.3 Podmnožina definičního oboru, pro jejíž prvky se výroková forma stane pravdivým výrokem, se nazývá **obor pravdivosti** výrokové formy.

Výrokovou formu jedné proměnné x budeme značit $V(x)$.

Výrokovou formu např. tří proměnných x, y a z budeme značit $V(x, y, z)$.

Příklad výrokové formy.

- a) Městem M protéká řeka Morava.

Pokud za město M dosadíme město Olomouc, resp. Praha, výrok bude pravdivý, resp. nepravdivý.

- b) $x^2 - 4 = 0$ je výroková forma

Definiční obor: $x \in \mathbb{R}$

Obor pravdivosti je $\{-2; 2\}$.

Z výrokové formy lze získat výrok dvojím způsobem:

- 1) Dosazením konstant za všechny proměnné z definičního oboru výrokové formy.
- 2) Vázáním všech proměnných kvantifikátorem.

Příklad Uvažujme výrokovou formu a utvořme z ní výrok.

Výroková forma. Reálné číslo x je kladné. Definiční obor: $x \in \mathbb{R}$

- 1) Dosadíme-li za x číslo 5, obdržíme výrok:

Reálné číslo 5 je kladné. Stručně $5 > 0$. (ph 1)

Dosadíme-li za x číslo -7 , pak obdržíme výrok:

Reálné číslo -7 je kladné. Stručně $-7 > 0$. (ph 0)

- 2) Každé reálné číslo je kladné. (ph 0)

Existuje reálné číslo, které je kladné. (ph 1)

Příklad výrokové formy, která obsahuje 3 proměnné: Pro reálná čísla platí $x + y < z$.

Řešení

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla.

Dosadíme-li $x = -1, y = 8$ a $z = 15$, pak obdržíme pravdivý výrok

$$-1 + 8 < 15.$$

Dosadíme-li $x = 5, y = 3$ a $z = 2$, pak obdržíme nepravdivý výrok

$$5 + 3 < 2.$$

Výroky i výrokové formy lze spojovat neboli provádět s nimi operace a vytvářet tak výroky a výrokové formy složené.

Složené výroky tvoříme z jednoduchých výroků pomocí logických spojek.

Výrokové operace

Nechť A a B jsou jednoduché výroky.

Operace	Název	Označení Logická spojka	Zápis	Čteme
unární	negace	$\neg$	$\neg A$	A neplatí; non A ; není pravda, že platí A
binární	konjunkce	$\wedge$	$A \wedge B$	A a zároveň (současně) B
	disjunkce	$\vee$	$A \vee B$	A nebo B (v nevylučovacím smyslu)
	implikace	$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$	z A plyne B ; jestliže A , pak B
	ekvivalence	$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B$	A právě když B ; A tehdy a jen tehdy když B

Definice výrokových operací pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Negace pravdivého výroku A je nepravdivý výrok a negace nepravdivého výroku je výrok pravdivý.

Konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá, jsou-li oba výroky A a B pravdivé, v ostatních případech je nepravdivá.

Disjunkce $A \vee B$ je pravdivá, je-li aspoň jeden z výroků A a B pravdivý. Jsou-li oba výroky A a B nepravdivé, pak jejich disjunkce je nepravdivá.

Implikace $A \Rightarrow B$ je pravdivá, jsou-li oba výroky A a B pravdivé nebo je-li výrok A nepravdivý a B jakýkoliv. Nepravdivá je pouze v případě, je-li A pravdivý a B nepravdivý výrok.

Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ je pravdivá, jsou-li oba výroky A a B pravdivé nebo oba nepravdivé. Mají-li výroky A a B opačnou pravdivostní hodnotu je ekvivalence nepravdivá.

Zákony výrokové logiky

- 1) $A \vee \neg A$ (zákon o vyloučení třetího)
- 2) $\neg(A \wedge \neg A)$ (zákon sporu)
- 3) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ (zákon dvojí negace)
- 4) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
- 5) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
- 6) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
- 7) $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
- 8) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 9) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- 10) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- 11) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- 12) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
- 13) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ princip důkazu sporem
- 14) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ princip nepřímého důkazu
- 15) $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ zákon tranzitivity implikace
- 16) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ zákon hypotetického sylogismu

Určování pravdivostních hodnot složených výroků a výrokových forem provádíme zpravidla tabulkovou metodou – užitím tabulek pravdivostních hodnot.

Definice 1.4 Složený výrok, který při všech možných pravdivostních hodnotách vstupujících výroků nabývá pravdivostních hodnot 1, resp. 0, se nazývá **tautologie**, resp. **kontradikce**.

Příklad Přesvědčíme se, že složený výrok $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ je tautologie.

Řešení

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Z posledního sloupce, v němž jsou samé jedničky, je zřejmé, že daný výrok je tautologie.

Příklad Zjistěme, zda je složený výrok $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$ kontradikce.

Řešení

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

Daný výrok je kontradikce - v posledním sloupci jsou samé nuly.

Příklad Určete, pro které trojice výroků A, B, C je pravdivý výrok $[(A \vee B) \wedge C] \Rightarrow (\neg A)$.

Řešení

A	B	C	$\neg A$	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$[(A \vee B) \wedge C] \Rightarrow (\neg A)$
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1

Výrok je pravdivý ve všech případech kromě dvou trojic vstupujících výroků: (1, 1, 1) a (1, 0, 1).

Logická výstavba matematiky

Každá matematická teorie je budována prostřednictvím souboru axiomů, definic a matematických vět. Soustava axiomů musí být bezesporná, nezávislá a úplná.

Základní matematické pojmy jako jsou bod, přímka, rovina, přirozené číslo, nelze definovat pomocí pojmů jednodušších. Zavádíme je axiomami, v nichž se tyto pojmy vyskytují spolu se vztahy mezi nimi.

Definice 1.5 Axiom je matematický výrok, který se považuje za pravdivý a nedokazuje se; je ověřen praxí.

Příklad Dvěma různými body je určena jediná přímka.

Definice 1.6 Matematická definice zavádí nový pojem, stanoví jeho název a udává charakteristické vlastnosti pojmu, který jej odlišuje od ostatních.

Smyslem definice je zavést nový pojem takovým způsobem, že o každém objektu lze rozhodnout, zda do množiny objektů vymezených definicí patří, či nepatří.

Příklad Dvě přímky se nazývají různoběžné, mají-li jediný společný bod.

Definice 1.7 Matematická věta vypovídá o vlastnostech matematických objektů a o vztazích mezi nimi. Je to vždy tautologie, kterou je možné logicky odvodit z axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Matematické poznatky jsou v ní vyjádřené slovy nebo symbolickým zápisem.

Příklad Trojúhelník ABC je pravoúhlý, právě když v něm platí $c^2 = a^2 + b^2$, kde a, b jsou délky odvěsen a c je délka přepony tohoto trojúhelníku.

Stavba matematické věty

1) Tvar implikace: $p \Rightarrow q$

Výrok p je předpoklad a výrok q je tvrzení věty. Výrok p je postačující podmínkou pro výrok q a výrok q je nutnou podmínkou pro výrok p .

Příklad Je-li číslo dělitelné devíti, pak je dělitelné třemi.

Věty přidružené k matematické větě $p \Rightarrow q$.

a) **Věta obměněná** má tvar: $\neg q \Rightarrow \neg p$ a vždy platí, protože $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ je tautologie.

Příklad Není-li číslo dělitelné třemi, pak není dělitelné devíti. (věta platí)

b) **Věta obrácená** má tvar: $q \Rightarrow p$ a ta může, ale i nemusí platit.

Příklad Je-li číslo dělitelné třemi, pak je dělitelné devíti. (věta neplatí)

Pokud platí věta i věta k ní obrácená, vyslovujeme matematickou větu ve tvaru ekvivalence.

2) **Tvar ekvivalence:** $p \Leftrightarrow q$

Výrok p je nutnou a zároveň postačující podmínkou pro výrok q a výrok q je nutnou a zároveň postačující podmínkou pro výrok p . Platí tedy: $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Příklad Číslo je dělitelné šesti, právě když je dělitelné dvěma i třemi.

Matematické věty slouží k budování matematické teorie i k využití matematických poznatků v praxi.

Definice 1.8 Logický proces, kterým se ověřuje platnost matematické věty pomocí axiomů, definic a dříve dokázaných vět se nazývá **důkaz** matematické věty.

Každou matematickou větu je nutné dokázat. Podle použitých postupů rozlišujeme důkazy:

- **Přímé:** realizujeme jako řetězec pravdivých implikací $p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow q$.
- **Nepřímé:** realizujeme na základě implikace $\neg q \Rightarrow \neg p$, neboť $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$; dokážeme větu obměněnou.
- **Sporem:** realizujeme na základě zákona $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$; negujeme původní výrok a pomocí řetězce implikací dospějeme ke sporu
- **Matematickou indukcí:** dokážeme, že výrok platí pro nejmenší prvek a z platnosti výroku pro n dokážeme, že platí pro $n + 1$
- **Rozborem možností**
- **Uvedením protipříkladu**

Kvantifikátory

Již jsme se zmiňovali – z výrokové formy můžeme obdržet výrok užitím kvantifikátorů.

Rozlišujeme:

$\forall$ **obecný kvantifikátor**

symbol vznikl převrácením prvního písmene anglického slova „ALL“)

$\exists$ **existenční kvantifikátor**

symbol vznikl otočením prvního písmene anglického slova „EXIST“)

zápis čteme

$\forall x$ pro každé x , pro všechny x , pro libovolné x

$\exists x$ existuje (aspoň jedno) x , pro některé x , pro vhodné x

Příklady kvantifikovaných výroků.

$$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$$

Kvadrát každého reálného čísla je nezáporný. (ph 1)

$$\exists x \in \mathbb{R}: |x| = 0$$

Existuje (aspoň jedno) reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna nule. (ph 1)

$$\forall x \in \mathbb{R}: |x| > 0$$

Absolutní hodnota všech reálných čísel je kladné číslo. (ph 0)

Negování kvantifikovaných výroků

U negovaného kvantifikovaného výroku zaměníme obecný kvantifikátor existenčním a existenční kvantifikátor zaměníme obecným a výrokovou formu nahradíme její negací.

výrok

negace výroku

Pro každé x platí $V(x)$

Zápis: $\forall x: V(x)$

Není pravda, že pro každé x platí $V(x)$. Existuje (aspoň jedno) x , pro které neplatí $V(x)$.

Zápis: $\exists x: \neg V(x)$

Příklad Pro každé reálné číslo x platí $x^2 - 4 \geq 0$.

Zápis: $\forall x: x^2 - 4 \geq 0$ (ph 0)

(Pro $x = 2; 3,5$ je ph 1)
(Pro $x = 1; \frac{1}{2}, 0$ je ph 0)

Existuje reálné číslo x pro které platí $x^2 - 4 < 0$. (ph 1)
(je to např. $x = 1; 1,5; 0$)

Existuje x takové, pro něž platí $V(x)$.

Zápis: $\exists x: V(x)$

Není pravda, že existuje x , pro něž platí $V(x)$

Pro žádné x neplatí $V(x)$.

Zápis: $\forall x: \neg V(x)$

Příklad Existuje aspoň jeden trojúhelník, který není pravoúhlý. (ph 1)

Všechny trojúhelníky jsou pravoúhlé. (ph 0)

Jistě jste si všimli, že negací pravdivého výroku jsme obdrželi výrok nepravdivý a naopak.

Negování výroků s udáním počtu

aspoň n je ...

negace

nejvýše $(n - 1)$ je ...

nejvýše n je ... negace aspoň $(n + 1)$ je ...

Příklad Ve třídě je aspoň 17 studentů. (Znamená to, že je jich 17 nebo více.)

Negace: Ve třídě je nejvýše 16 studentů. (Znamená to, že je jich 16 nebo méně.)

Příklad V sadu je nejvýše 8 hrušní.

Negace: V sadu je aspoň 9 hrušní.

Pořadí kvantifikátorů

Kvantifikátory můžeme řadit také za sebou. Na pořadí kvantifikátorů $\exists$ a $\forall$ záleží! Pořadí kvantifikátorů téhož typu lze zaměňovat, ale pořadí kvantifikátorů opačného typu zaměňovat nelze.

Platí: $\forall x \forall y: V(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x: V(x, y)$
 $\exists x \exists y: V(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x: V(x, y)$

Naproti tomu: $\forall x \exists y: V(x, y) \not\Leftrightarrow \exists y \forall x: V(x, y)$
 $\exists x \forall y: V(x, y) \not\Leftrightarrow \forall y \exists x: V(x, y)$

Σ

Pravdivostní hodnotu složených výroků je možné vyhodnotit pomocí tabulky pravdivostních hodnot. Výroky lze vytvářet také z výrokových forem pomocí kvantifikátorů. Každá matematická teorie je budována prostřednictvím axiomů, definic a matematických vět.

?

1. Jaký je rozdíl mezi výrokem a výrokovou formou?
2. Co je obor pravdivosti výrokové formy?
3. Vyjmenujte výrokové operace.
4. Uveďte, kdy je pravdivá konjunkce (disjunkce, implikace, ekvivalence)?
5. Co je to tautologie (kontradikce)?
6. Jak se negují kvantifikované výroky?
7. Jak čteme: $\forall x$ a $\exists x$?
8. Jaký je vztah mezi větou přímou a obrácenou (obměněnou)?
9. Rozhodněte, které sdělení je výrok. Pokud ano, tak uveďte jeho pravdivostní hodnotu.
 - a) Číslo 13 je prvočíslo. [výrok; ph 1]
 - b) Číslo 15 vydělte třemi. [není výrok]
 - c) Absolutní hodnota reálného čísla je vždy číslo nezáporné. [výrok; ph 1]

- d) Chlapec je plnoletý. [není výrok]
 e) $6 + 3 < 2$ [výrok; ph 0]
 f) Cena kabátu je vyšší než cena bot. [není výrok]
 g) Čtýřúhelník ABCD je čtverec. [není výrok]
 h) Každý čtýřúhelník je čtverec. [výrok, ph 0]
 i) Je x celé číslo? [není výrok]

10. Z výrokové formy utvořte výrok pravdivý i nepravdivý.

- $x < 5, x \in \mathbb{Z}$

[Dosazením:
 $6 < 5$; (ph 0) $3 < 5$; (ph 1)
 Užitím kvanfitikátorů:
 Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $x < 5$. (ph 0)
 Existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x < 5$. (ph 1)]

- Trojúhelník ABC je rovnostranný.

[Každý trojúhelník ABC je rovnostranný. (ph 0)
 Existuje trojúhelník ABC, který je rovnostranný (ph 1)]

- $x > y + 3 \quad x, y \in \mathbb{Z}$

[Dosazením:
 $x = 10, y = 4$ (ph 1)
 $x = -2, y = 0$ (ph 0)]

11. Stanovte definiční obor a obor pravdivosti výrokové formy $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$.

[Definiční obor: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
 Obor pravdivosti: $x \in \langle -2; 3 \rangle$]

12. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot zjistěte, zda je výroková forma tautologie nebo kontradikce.

- $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ [tautologie]
 - $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$ [kontradikce]
 - $[C \Rightarrow A] \wedge (C \Rightarrow B) \Leftrightarrow [C \Rightarrow (A \wedge B)]$ [tautologie]
 - $(A \wedge \neg C) \Rightarrow [(B \wedge \neg A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow \neg A)]$

[není tautologie
 ani kontradikce; pravdivá je
 ve všech případech
 kromě $(1, 1, 0)$ a $(1, 0, 0)$]

13. Pro které trojice vstupních pravdivostních hodnot jsou výroky nepravdivé.

$(B \vee \neg C) \Rightarrow [(A \wedge \neg B) \vee (B \Leftrightarrow \neg C)]$ $[(A, B, C): (1, 1, 1); (0, 1, 1); (0, 0, 0)]$

$(A \wedge \neg C) \Rightarrow [(B \wedge \neg A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow \neg A)]$ $[(A, B, C): (1, 1, 0); (1, 0, 0)]$

14. Utvořte negaci kvantifikovaných výroků.

- Petr vždy říká pravdu.
- Žádný učený z nebe nespadl.
- Alespoň jedno prvočíslo je sudé.
- $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 16 \leq 0$

15. Stanovte pravdivostní hodnotu výroku, negujte ji a запиšte jeho negaci slovně i symbolicky.

- Výrok: Pro všechna reálná čísla x platí $2^x > 0$.
Symbolicky: $\forall x \in \mathbb{R}: 2^x > 0$
- Výrok: Existuje reálné číslo x které je řešením rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$
Symbolicky: $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 = 0$

16. Dokažte, že je výrok tautologie.

$$\begin{aligned}\neg(\neg A) &\Leftrightarrow A \\ \neg(A \wedge B) &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg B \\ (A \Leftrightarrow B) &\Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)] \\ A \vee (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \vee C\end{aligned}$$



Literatura k tématu:

- [1] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87
- [2] HENDL, J. *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*. 3. vydání. Karolinum, 2022. ISBN 978-80-246-5400-3
- [3] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9
- [4] O'LEARY, M. L. *Linear Algebra*. Wiley, 2021. ISBN 9781119437444

Kapitola 2

Množiny



Po prostudování kapitoly budete umět:

- objasnit pojem množiny a způsob jejího zadání,
- definovat množinové operace a načrtnout Vennovy diagramy,
- definovat množinu $\mathbb{R}^*$,
- početní operace s nevlastními čísly,
- definovat a graficky znázornit okolí bodu na přímce.



Klíčová slova:

MATEMATIKA PRO EKONOMICKOU PRAXI

Množina, prvek množiny, sjednocení, průnik, rozdíl a doplněk množin, podmnožina, číselná množina, nevlastní čísla, interval, okolí bodu.

Náhled kapitoly

- V této kapitole budou nejprve připomenuty základy teorie množin ze středních škol a poté bude daná problematika rozebrána podrobněji. Důraz bude kladen mj. na zavedení rozšířené reálné osy a definování operací s nevlastními čísly. Rovněž bude v této kapitole zaveden a graficky ilustrován pojem okolí bodu.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je rozšíření středoškolské látky týkající se teorie množin.

Odhad času potřebného ke studiu

- 3 hodiny

Množina a její prvek

Definice 2.1 **Množinou** rozumíme souhrn (soubor) jakýchkoliv objektů. Množina je určena, můžeme-li o jakémkoliv objektu rozhodnout, zda do ní patří či nepatří. Objekty, které patří do dané množiny, nazýváme **prvky** této množiny.

Příklad Uvažujme množinu všech měst České republiky. Město Olomouc patří do této množiny, naopak tomu město Bratislava nepatří do této množiny.

Příklad Uvažujme množinu všech druhých mocnin přirozených čísel. Číslo 25 patří do této množiny, číslo 7 do ní nepatří.

Množiny označujeme zpravidla velkými písmeny abecedy, např.: $A, B, C, \dots$

Prvky množiny označujeme zpravidla malými písmeny abecedy, např.: $a, b, c, \dots$, v případě potřeby užíváme indexy.

Zápis $a \in A$, znamená, že a je prvkem (elementem) množiny A , také můžeme říci, že a patří do množiny A , a je z množiny A .

Zápis $a \notin A$ znamená, že a není prvkem množiny A .

Množinu můžeme zadat (určit):

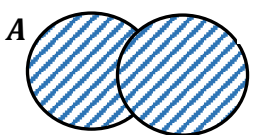
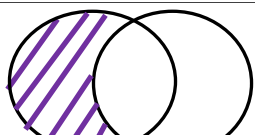
- a) výčtem prvků, které do ní patří
- b) udáním charakteristické vlastnosti jejích prvků

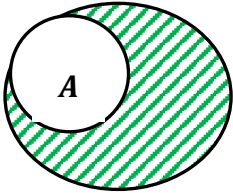
Příklad Množinu M , která je zadána výčtem prvků, zadejte pomocí charakteristické vlastnosti.

$$M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

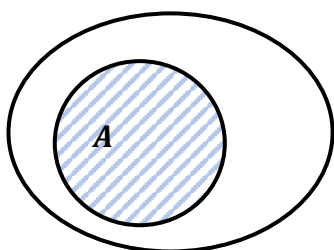
Řešení Prvky množiny M jsou celá čísla. Množinu celých čísel označujeme zpravidla $\mathbb{Z}$. Potom můžeme množinu M zadat takto: $M = \{x \in \mathbb{Z}; -3 \leq x \leq 3\}$ nebo $M = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 \leq 9\}$.

Operace s množinami

Název a označení	Vennův diagram	Definice
Sjednocení množin A a B $A \cup B$	 $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$	Sjednocením množin A a B nazýváme množinu všech prvků, které patří buď do A nebo do B (tedy aspoň do jedné z nich, mohou patřit současně do obou).
Průnik množin A a B $A \cap B$	 $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$	Průnikem množin A a B nazýváme množinu všech prvků, které patří do A a zároveň patří do B (jsou společné množinám A a B).
Inkluze množin A a B (množina A je podmnožinou množiny B) $A \subset B$	 $x \in A \Rightarrow x \in B$	Množina A je podmnožinou množiny B , jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B .
Rovnost množin A a B $A = B$	 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$	Množiny A a B se rovnají, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B a zároveň každý prvek množiny B je prvkem množiny A .
Rozdíl množin A a B $A \setminus B$	 $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$	Rozdíl množiny A a B je množina všech prvků množiny A , které nepatří do množiny B .

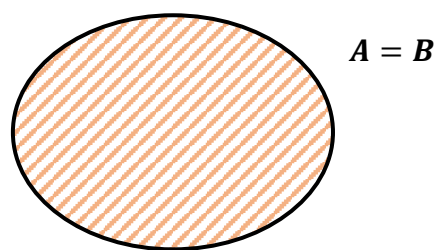
Doplňěk množiny A v množině B $A_B^{\complement}$ O doplňku mluvíme tehdy, je-li $A \subset B$. Jinak užíváme pojem rozdíl množin.	 $x \in B \wedge x \notin A$	Doplňěk množiny A v množině B je množina všech prvků množiny B, které nepatří do množiny A.
--	---	--

Poznámka Rozlišujeme **vlastní** a **nevlastní podmnožinu** množiny.



Množina A je vlastní podmnožinou množiny B .

$$A \subset B \wedge A \neq B$$



$$A = B$$

Množina A je nevlastní podmnožinou množiny B a naopak množina B je nevlastní podmnožina množiny A .

$$(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$$

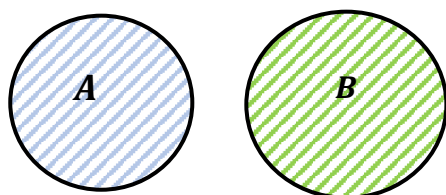
Každá množina je nevlastní podmnožinou sebe samé.

Množina, do které patří n prvků, $n \in \mathbb{N}$, se nazývá **konečná**, ostatní množiny jsou nekonečné.

Množina, která neobsahuje žádný prvek, se nazývá **prázdná**; značíme ji $\emptyset$; ostatní množiny jsou neprázdné.

Definice 2.2 Množiny A a B se nazývají **disjunktní**, je-li jejich průnik množina prázdná.

Disjunktní množiny



$$A \cap B = \emptyset$$

Prázdná množina je podmnožinou libovolné množiny.

Zřejmě platí:

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$\text{Je-li } A \subset B, \text{ pak } A \cup B = B \quad A \cap B = A$$

Pro libovolné množiny A, B, C platí:

$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	komutativní zákon
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	asociativní zákon
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivní zákon

Příklad Mějme množiny $A = \{-3; -2; -1; 2; 5; 6\}$ a $B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Určete $A \cup B$ a $A \cap B$.

Řešení

$$A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$A \cap B = \{-2; -1; 2; 5\}$$

Příklad Uvažujme množiny $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ a $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Určete $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ a $A \setminus B$.

Řešení

$$A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

$$A \cap B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$B \setminus A = \{-3; 3\}, \quad A \setminus B = \emptyset$$

Příklad Uvažujme množinu A všech trojúhelníků, množinu B všech rovnoramenných trojúhelníků a množinu C všech rovnostranných trojúhelníků v rovině. Je mezi množinami A, B, C vztah inkluze? Pokud ano, tak jaký?

Řešení: $C \subset B \subset A$.

Množina rovnostranných trojúhelníků je podmnožinou rovnoramenných trojúhelníků a ta je podmnožinou trojúhelníků v rovině.

Číselné množiny

Pro nás budou mít především význam **číselné množiny**, tj. množiny, jejichž prvky jsou čísla. Významné číselné množiny jsou označeny takto:

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel
 $\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel
 $\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel
 $\mathbb{R}$ – množina všech reálných čísel
 $\mathbb{C}$ – množina všech komplexních čísel

Platí inkluze $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Užitečná jsou i označení některých podmnožin těchto množin:

$\mathbb{Z}^-$ – množina všech záporných celých čísel
 $\mathbb{Q}^+$ – množina všech kladných racionálních čísel
 $\mathbb{Q}^-$ – množina všech záporných racionálních čísel
 $\mathbb{R}^+$ – množina všech kladných reálných čísel
 $\mathbb{R}^-$ – množina všech záporných reálných čísel

Připojíme-li k označení množin $\mathbb{N}, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-, \mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}^-$ index 0, znamená to, že do uvedených množin patří navíc číslo 0.

V množině $\mathbb{R}$ lze sčítat, odčítat, násobit i dělit (ne však dělit nulou) a přitom uvedené početní operace mají známé vlastnosti. Lze v ní též definovat binární relaci $<$ lineárního uspořádání. Množina $\mathbb{R}$ tedy tvoří z algebraického pohledu uspořádané těleso.

Množinu $\mathbb{R}$ a její prvky lze geometricky znázornit. Každému reálnému číslu lze přiřadit právě jeden bod reálné přímky $\mathbb{R}^1$, již nazýváme též *reálnou osou* nebo *jednorozměrným reálným prostorem*, a naopak každému bodu reálné přímky lze přiřadit právě jedno reálné číslo. Vzhledem k tomuto vzájemně jednoznačnému přiřazení lze ztotožnit reálná čísla s jim odpovídajícími body reálné přímky a množinu $\mathbb{R}$ s množinou $\mathbb{R}^1$. Podle okolností se mluví někdy o reálném čísle (stručně čísle), jindy o reálném bodě (stručně bodě). Reálnou přímku nazýváme v dalším textu stručně *přímkou* nebo *osou*.

Vzdálenost, přesněji euklidovská vzdálenost, $d(A, B)$ bodů $A = [x_1]$ a $B = [x_2]$ přímky je dána vzorcem

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

proto se někdy místo o reálné přímce hovoří o euklidovské přímce.

Množina $\mathbb{R}^*$

Množina $\mathbb{R}$ nemá ani nejmenší, ani největší prvek. Vzhledem k tomu, že v dalším textu budeme pracovat s *nevlastními limitami*, je potřeba rozšířit množinu $\mathbb{R}$ o dva nové prvky, které nazýváme **nevlastními čísly plus nekonečno a mínus nekonečno**, nebo **nevlastními body plus nekonečno a mínus nekonečno** a značíme je $+\infty$ a $-\infty$.

Poznámka Pokud nehrozí nedorozumění, značíme nevlastní číslo plus nekonečno symbolem ∞ .

Definice 2.3 Množinu $\mathbb{R}$ doplněnou o nevlastní čísla $+\infty$ a $-\infty$ nazýváme **rozšířenou množinou všech reálných čísel** a značíme $\mathbb{R}^*$. Tedy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Je-li to účelné, čísla množiny $\mathbb{R}^*$, která nejsou nevlastními čísly $+\infty$ nebo $-\infty$, nazýváme vlastními čísly nebo vlastními body.

Uspořádání a početní operace v množině $\mathbb{R}$ jsou známy. Abychom byly definovány i v množině $\mathbb{R}^*$, rozšíříme je na dvojice čísel, z nichž aspoň jedno je nevlastní.

Uspořádání a početní operace v množině $\mathbb{R}^*$

Pro každé $c \in \mathbb{R}$ (tedy c je vlastní číslo) definujeme:

1. Uspořádání

$$-\infty < +\infty$$

$$-\infty < c < +\infty$$

2. Absolutní hodnota

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty$$

3. Sčítání a odčítání

$$c + \infty = +\infty$$

$$c - \infty = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$\boxed{+\infty - \infty, -\infty + \infty} \text{ není definováno}$$

4. Násobení a dělení

$$+\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$-\infty \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$c \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ pro } c > 0$$

$$c \cdot (\mp\infty) = \pm\infty \text{ pro } c < 0$$

$$\frac{c}{\pm\infty} = 0$$

$$\frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty \text{ pro } c > 0$$

$$\frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty \text{ pro } c < 0$$

$$\boxed{0 \cdot (\pm\infty), \frac{+\infty}{\pm\infty}, \frac{-\infty}{\pm\infty}, \frac{c}{0}} \text{ není definováno}$$

5. Mocnina s celým mocnitelem

$$\text{Pro každé } m \in \mathbb{N} \quad (+\infty)^m = +\infty$$

$$(-\infty)^m = (-1)^m \cdot (+\infty)^m = \begin{cases} -\infty & \text{pro } m \text{ liché} \\ +\infty & \text{pro } m \text{ sudé} \end{cases}$$

$$\boxed{(+\infty)^0, (-\infty)^0} \text{ není definováno}$$

6. Odmocnina s přirozeným odmocnitelem

$$\text{Pro každé } m \in \mathbb{N} \text{ je } \sqrt[m]{+\infty} = +\infty$$

$$\sqrt[m]{-\infty} = -\infty \text{ pro } m \text{ liché}$$

$$\boxed{\sqrt[m]{-\infty}} \text{ není definována pro } m \text{ sudé}$$

Intervaly

V matematické analýze velmi často pracujeme se speciálními podmnožinami množiny $\mathbb{R}$, které nazýváme intervaly.

Definice 2.4 Necht' $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}, a \leq b$. **Intervalem s krajními body a a b** rozumíme kteroukoli z těchto množin:

$$\left. \begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} - \text{otevřený interval} \\ \langle a, b \rangle &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} - \text{polootvřený nebo polouzavřený interval} \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} - \text{polootvřený nebo polouzavřený interval} \\ \langle a, b \rangle &= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} - \text{uzavřený interval} \end{aligned} \right\} \text{ omezené intervaly}$$

Délka $d(a, b)$ intervalu s krajními body a a b je dána vzorcem $d(a, b) = b - a$.

Intervalem s krajním bodem a a nevlastním krajním bodem $+\infty$ nebo $-\infty$ rozumíme kteroukoli z těchto množin:

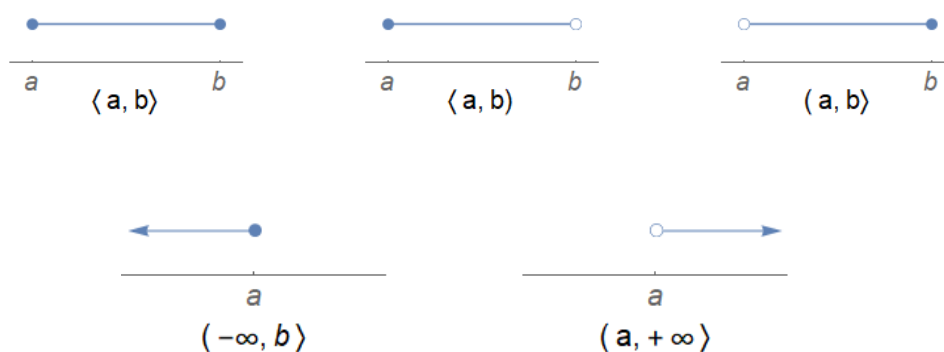
$$\left. \begin{aligned}
 (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; x > a\} - \text{otevřený interval} \\
 (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R}; x < a\} - \text{otevřený interval} \\
 \langle a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\} - \text{polootvřený nebo polouzavřený interval} \\
 (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\} - \text{polootvřený nebo polouzavřený interval} \\
 \text{Intervalem s nevlastními krajními body } -\infty \text{ a } +\infty &\text{ rozumíme množinu:} \\
 (-\infty, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < +\infty\} - \text{otevřený interval}
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{neomezené} \\ \text{intervaly} \end{array}$$

První, resp. druhé, vlastní nebo nevlastní číslo zleva v označení intervalu je **levý**, resp. **pravý, krajní bod** intervalu.

Každý bod intervalu, který není jeho krajním bodem, nazýváme **vnitřním bodem** intervalu. Množinu všech vnitřních bodů intervalu nazýváme **vnitřkem intervalu**.

Vnitřek intervalu je vždy otevřený interval, včetně prázdné množiny. Např. vnitřek každého z intervalů $\langle a, b \rangle$, (a, b) , $(a, b]$ a (a, b) je interval (a, b) .

Graficky znázorňujeme interval, který není prázdnou množinou, jako úsečku, polopřímku nebo přímku. Plným nebo prázdným kroužkem vyznačujeme, zda jeho krajní bod k němu patří či nikoli.



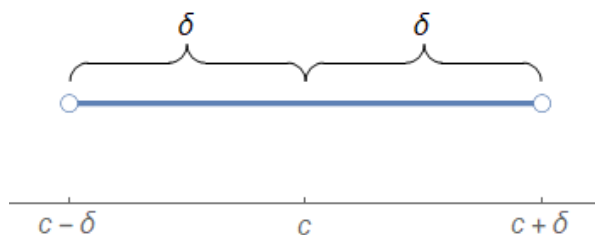
Obr. 1 Grafické znázornění intervalů

Okolí bodu

Povšimneme si teď jednoho speciálního typu otevřeného intervalu – okolí bodu. Okolí bodu nám poslouží při vyslovení některých definic a vět a v mnoha úvahách přispěje k přehlednému vyjadřování.

Definice 2.5 Necht $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. **δ -okolím bodu c** nazýváme otevřený interval $(c - \delta, c + \delta)$. Číslo δ nazýváme **poloměrem** nebo **velikostí δ -okolí bodu c** . δ -okolí bodu c značíme $U(c, \delta)$ nebo $U_\delta(c)$.

Zápis $U_\delta(c)$ čteme: deltové okolí bodu c .

Obr. 2 Grafické znázornění δ -okolí bodu c

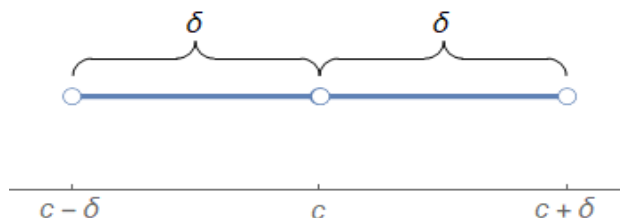
δ -okolí bodu c můžeme vyjádřit následujícími způsoby:

1. $U(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; x \in (c - \delta, c + \delta)\}$
2. $U(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; c - \delta < x < c + \delta\}$
3. $U(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; |x - c| < \delta\}$

Někdy potřebujeme pracovat s δ -okolím bodu c , z něhož je bod c vyjmut.

Definice 2.6 Necht' $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. **Redukovaným δ -okolím bodu c** nazýváme množinu $U(c, \delta) \setminus \{c\}$ a značíme ji $U^*(c, \delta)$.

Číslo δ nazýváme poloměrem redukovaného δ -okolí bodu c .

Obr. 3 Grafické znázornění redukovaného δ -okolí bodu c

Redukované δ -okolí bodu c můžeme vyjádřit následujícími způsoby:

1. $U^*(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)\}$
2. $U^*(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; c - \delta < x < c \vee c < x < c + \delta\}$
3. $U^*(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - c| < \delta\}$

Zavedeme ještě pojmy jednostranného δ -okolí bodu a jednostranného redukovaného δ -okolí bodu.

Definice 2.7 Necht' $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. **Pravým δ -okolím bodu c** nazýváme polootevřený interval $\langle c, c + \delta \rangle$. **Levým δ -okolím bodu c** nazýváme polootevřený interval $(c - \delta, c]$. Právě definovaná jednostranná δ -okolí bodu c značíme $U_+(c, \delta)$ resp. $U_-(c, \delta)$.

Obdobně definujeme jednostranná redukovaná δ -okolí bodu c , a to pravé, resp. levé, redukované δ -okolí bodu c :

$$U_+^*(c, \delta) = (c, c + \delta), \text{ resp. } U_-^*(c, \delta) = (c - \delta, c)$$

Poznámka V názvu i označení všech typů δ -okolí bodu c můžeme číslo δ vypouštět, není-li jeho velikost podstatná.

Definice 2.8 Necht' $s \in \mathbb{R}$. s -okolím nevlastního bodu $+\infty$ nazýváme otevřený interval $(s, +\infty)$. Toto okolí značíme $U(+\infty, s)$. Tedy $U(+\infty, s) = (s, +\infty)$.

Obdobně definujeme s -okolí nevlastního bodu $-\infty$: $U(-\infty, s) = (-\infty, s)$.

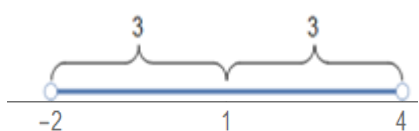
Poznámka V názvu i označení s -okolí nevlastních bodu $+\infty$ a $-\infty$ můžeme číslo s opět vypouštět, není-li jeho velikost podstatná.

Geometrická interpretace $U_\delta(c)$: δ -okolím bodu c na přímce je otevřený interval délky 2δ se středem v bodě c .

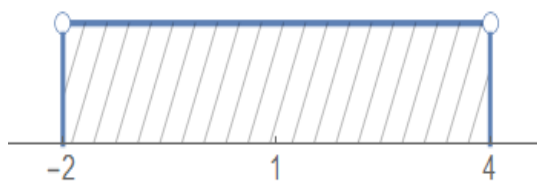
Příklad Na číselné ose znázorněte δ -okolí bodu $c = 1$, je-li $\delta = 3$. Zapište toto okolí pomocí intervalu i nerovnosti s absolutní hodnotou a uveďte jeho označení.

Řešení

Vyjádření pomocí intervalu: $x \in (-2; 4)$



nebo



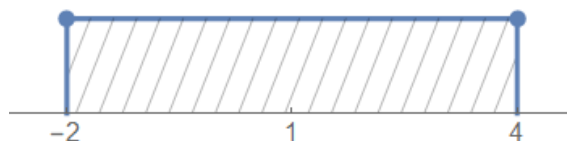
Vyjádření pomocí nerovnosti: $|x - 1| < 3$

Označení: $U_3(1)$

Příklad Jaké množiny vyjadřují následující nerovnosti?

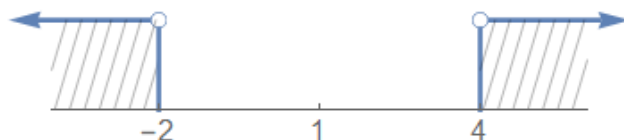
a) $|x - 1| \leq 3$

Řešení $x \in \langle -2; 4 \rangle$



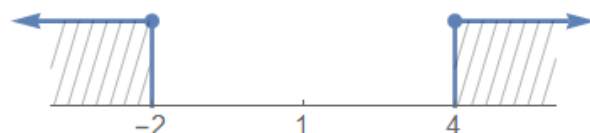
b) $|x - 1| > 3$

Řešení $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$



c) $|x - 1| \geq 3$

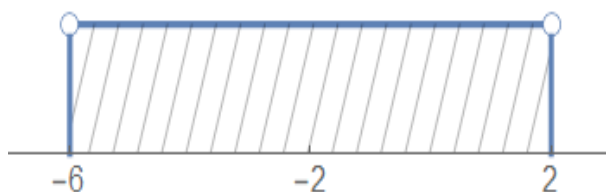
Řešení $x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$



Poznámka Užitím znalosti pojmu okolí můžeme také řešit jednoduché nerovnice.

Např. nerovnici $|x + 2| < 4$ upravíme na tvar $|x - (-2)| < 4$, což je zápis okolí $U_4(-2) \Rightarrow x \in (-6; 2)$.

Grafické znázornění.



Řešení nerovnice: $x \in (-6, 2)$.

Σ

Množinou rozumíme soubor jakýchkoliv objektů. K definování množinových operací využíváme Vennovy diagramy a vyjádření pomocí logických spojek. Číselné množiny jsou množiny, jejichž prvky jsou čísla. Množinu reálných čísel lze dále rozšířit o nevlastní čísla $+\infty$ a $-\infty$.

Důležitý vztah: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$

Okolím bodu na přímce je otevřený interval.



1. Které prvky množiny A a B patří do jejich sjednocení (průniku)?
2. Která množina se nazývá konečná?
3. Která množina se nazývá prázdná?
4. Jaké typy podmnožin rozlišujeme?
5. Jaký je rozdíl mezi uzavřeným a otevřeným intervalem?
6. Co je okolí bodu na přímce? Načrtněte jej.
7. Určete množinu M , jejíž prvky jsou reálné kořeny rovnice.
 - $x^3 + 8 = 0$ $[M = \{-2\}]$
 - $x^2 + 4 = 0$ $[M = \emptyset]$
 - $(x^2 - 1)(x^2 - x - 6) = 0$ $[M = \{-2; -1; 1; 3\}]$
8. Zadejte množinu M udáním charakteristické vlastnosti jejích prvků, je-li $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

$[M = \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 5\}]$ nebo $M = \{x \in \mathbb{N}; |x| < 6\}]$
9. Které z následujících množin se sobě rovnají.

$A = \{0; 5\}$	$E = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 0\}$
$B = \emptyset$	$F = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 5 = 0\}$
$C = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 3\}$	$G = \{x \in \mathbb{R}; -3 \leq x \leq 3\}$
$D = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 - 5x = 0\}$	

$[A = D, B = E = F, C = G]$
10. Zapište všechny podmnožiny množiny $\{-2; 0; 1\}$

$[\emptyset, \{-2\}, \{0\}, \{1\}, \{-2; 0\}, \{-2; 1\}, \{0; 1\}, \{-2; 0; 1\}]$
11. Určete průnik a sjednocení množin A a B , jestliže
 - $A = \{-1; 2; 3; 7; 8\}$ a $B = \{8; 9; 10\}$

$[A \cap B = \{8\}; A \cup B = \{-1; 2; 3; 7; 8; 9; 10\}]$
 - $A = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 5\}$ a $B = \{x \in \mathbb{N}; x > 3\}$

$[A \cap B = \{4; 5\}; A \cup B = \mathbb{N}]$
 - $A = \{x \in \mathbb{Z}; x > -2\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z}; x < -2\}$

$[A \cap B = \emptyset; A \cup B = \mathbb{Z} \setminus \{-2\}]$
 - $A = \mathbb{Z}$ a $B = \mathbb{R}$

$[A \cap B = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}; A \cup B = \mathbb{Z} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}]$
12. Jsou dány množiny:

$M_1 = \langle -4; -2 \rangle, M_2 = \langle -5; 5 \rangle, M_3 = \langle 5; 8 \rangle, M_4 = \langle -2; 0 \rangle, M_5 = \langle -1; 6 \rangle$

 - Určete následující množiny:

$M_1 \cup M_2$	$[\langle -5; 5 \rangle]$
$M_1 \cap M_2$	$[\langle -4; -2 \rangle]$
$M_1 \cup M_4$	$[\langle -4; 0 \rangle]$
$M_1 \cap M_4$	$[\emptyset]$

$$\begin{array}{ll}
M_2 \cap M_5 & [(-1; 5)] \\
(M_1 \cap M_3) \cup (M_3 \cap M_2) & [\{5\}] \\
M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5 & [(-5; 8)] \\
(M_2 \cup M_5) \cap (M_3 \cup M_4) & [(-2; 0) \cup (5; 6)]
\end{array}$$

13. Rozhodněte, který z následujících zápisů představuje okolí bodu, a všechny množiny zapište pomocí intervalů.

- $|x - 1| < 3$ [je okolí; $U_3(1); x \in (-2; 4)$]
- $|x| \geq 5$ [není okolí; $x \in (-\infty; -5] \cup [5; \infty)$]
- $|x + 3| < 2$ [je okolí; $U_2(-3); x \in (-5; -1)$]
- $|x - 1| \leq -3$ [není okolí; $\emptyset$]
- $|x + 3| \geq 4$ [není okolí; $x \in (-\infty; -7] \cup [1; \infty)$]
- $|x - 2| \leq 3$ [není okolí; $x \in (-1; 5]$]
- $|x| < 3$ [je okolí $U_3(0); x \in (-3; 3)$]

14. Určete průnik a sjednocení množin A a B .

- $A = \{x \in \mathbb{R}; |x - 3| \leq 3\}, B = \{x \in \mathbb{R}; |x| > 5\}$

$$\left[\begin{array}{l} A \cap B = \{x \in \mathbb{R}; x \in (5; 6)\}; \\ A \cup B = \{x \in \mathbb{R}; x \in (-\infty; -5] \cup \{0\} \cup (6; \infty)\} \end{array} \right]$$
- $A = \{x \in \mathbb{R}; |x + 4| \geq 2\}, B = \{x \in \mathbb{R}; |x - 2| < -1\}$

$$\left[\begin{array}{l} A \cup B = A; x \in (-6; -2] \\ A \cap B = \emptyset; B = \emptyset \end{array} \right]$$
- $A = \{x \in \mathbb{R}; |x - 3| \leq 1\}, B = \{x \in \mathbb{R}; x \in (-\infty; 4)$

$$\left[\begin{array}{l} A \cup B: x \in (-\infty; 4) \\ A \cap B = \{4\} \end{array} \right]$$
- $A = \{x \in \mathbb{R}; |x + 2| < 3, B = \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 5\}$

$$\left[\begin{array}{l} A \cup B: x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty) \\ A \cap B = \emptyset \end{array} \right]$$



Literatura k tématu:

- [1] BÍLKOVÁ, A. *Matematika I*. Praha: SPN, 1980. ISBN 17-536-80
- [2] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87
- [3] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9

[4] O'LEARY, M. L. *Linear Algebra*. Wiley, 2021. ISBN 9781119437444

Kapitola 3

Vektorové prostory



Po prostudování kapitoly budete umět:

- pracovat s vektory - sčítat vektory, násobit vektor skalárem, vypočítat skalární součin vektorů,
- tvořit lineární kombinace vektorů,
- rozhodnout o lineární závislosti a nezávislosti vektorů,
- definovat vektorový prostor.



Klíčová slova:

Vektor, operace s vektory, lineární kombinace vektorů, vektorový prostor, lineární závislost a nezávislost vektorů, báze vektorového prostoru.

Náhled kapitoly

- V této kapitole budou nejprve definovány základní pojmy a operace týkající se n -rozměrných vektorových prostorů a jejich prvků. Poté bude zavedeny pojmy lineární závislost a nezávislost vektorů a bude studováno, jak je lze v jednodušších případech ověřit. Komplikovanější případy budou řešeny v textu později pomocí determinantu nebo hodnoty matic.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je zavedení pojmu n -rozměrný vektorový prostor, definování operací s vektory a studium lineární závislosti vektorů.

Odhad času potřebného ke studiu

- 2 hodiny

Vektory a operace s nimi

Definice 3.1 Uspořádanou n -tici

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

budeme nazývat **n -rozměrným vektorem**. Množinu všech n -rozměrných vektorů budeme nazývat **n -rozměrným vektorovým prostorem** a označovat V_n ; x_i nazýváme **složky** vektoru.

Velikost vektoru je $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Vektor $\vec{0} = (0; 0; \dots; 0) \in V_n$ nazveme **nulovým vektorem**.

Příklad Ze skladu s pískem je exportován materiál ke třem odběratelům. První má požadavek na dodávku ve výši 8t, druhý 5t a třetí ve výši 7t. Požadavky odběratelů lze vyjádřit jako vektor $(8, 5, 7)$.

Definice 3.2 Nechť jsou dány vektory $\vec{x}_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$, $\vec{x}_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n) \in \mathbb{R}^n$ a konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

- sčítání vektorů (provádí se po složkách)

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 = (x_1^1 + x_2^1, x_1^2 + x_2^2, \dots, x_1^n + x_2^n),$$

- násobení vektoru skalárem (provádí se po složkách)

$$\alpha \vec{x}_1 = (\alpha x_1^1, \alpha x_1^2, \dots, \alpha x_1^n),$$

- skalární součin vektorů

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = x_1^1 x_2^1 + x_1^2 x_2^2 + \dots + x_1^n x_2^n.$$

Poznámka Součet dvou vektorů je vektor, součin vektoru a skaláru je vektor, skalární součin dvou vektorů je skalár (číslo).

Poznámka Pokud skalární součin $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0$, jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ kolmé.

Příklad Spočítejte $c\vec{a} - \vec{b}$, když $c = 3$, $\vec{a} = (1, -1, 2)$ a $\vec{b} = (0, 2, 0)$.

Řešení

$$c\vec{a} - \vec{b} = 3(1, -1, 2) - (0, 2, 0) = (3, -5, 6).$$

Definice 3.3 Množina $V_n \subset \mathbb{R}^n$ všech n -rozměrných vektorů s operacemi sčítání a násobení skalárem, pro které platí

$$\begin{aligned}\vec{x} + \vec{y} &= \vec{y} + \vec{x} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n, \\ \alpha(\vec{x} + \vec{y}) &= \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n, \alpha \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

se nazývá **vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel**.

Příklad Vektory $\vec{x} = (1, 2, 1), \vec{y} = (-1, 0, -1)$ patří do vektorového prostoru $V_3 \subset \mathbb{R}^3$.

Lineární kombinace vektorů

Definice 3.4 Nechtě $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in V_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Výraz

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k$$

se nazývá **lineární kombinace vektorů $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$** s koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

V případě, že všechny koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ lineární kombinace jsou nulové, hovoříme o **triviální lineární kombinaci**. Je-li aspoň jeden z koeficientů různý od nuly, hovoříme o **netriviální lineární kombinaci**. Lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru se nazývá nulová. Zřejmě každá triviální lineární kombinace je nulová – triviální lineární kombinací libovolných vektorů je vždy vektor nulový.

Příklad Napište, jak vypadá triviální lineární kombinace vektorů $\vec{a} = (2, -1, 2)$ a $\vec{b} = (1, 2, -3)$.

Řešení Podle Definice 3.4 má triviální lineární kombinace tvar

$$0\vec{a} + 0\vec{b} = 0 \cdot (2, -1, 2) + 0 \cdot (1, 2, -3) = (0, 0, 0)$$

Příklad Utvořte lineární kombinaci $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c}$ vektorů $\vec{a} = \left(\frac{1}{2}; -2; 0\right)$, $\vec{b} = (-1; 0; 1)$, $\vec{c} = \left(\frac{2}{3}; \frac{-3}{2}; -1\right)$, je-li $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = \frac{3}{2}$.

Řešení Podle Definice 3.4 je lineární kombinací vektor, označíme jej $\vec{u}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} = 2 \left(\frac{1}{2}; -2; 0 \right) - 1(-1; 0; 1) + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}; \frac{-3}{2}; -1 \right) = \\ &= (1; -4; 0) + (1; 0; -1) + \left(1; \frac{-9}{4}; -\frac{3}{2} \right) = \left(3; \frac{-25}{4}; -\frac{5}{2} \right)\end{aligned}$$

Lineární kombinací je vektor $\vec{u} = \left(3; \frac{-25}{4}; -\frac{5}{2} \right)$.

Příklad Zjistěte, zda je vektor $\vec{a} = (2; 4; -4)$ lineární kombinací vektorů $\vec{b} = (0; -2; 3)$ a $\vec{c} = (1; 0; 1)$.

Řešení Pokud by byl $\vec{a}$ lineární kombinací $\vec{b}$ a $\vec{c}$, pak by existovala reálná čísla α_1 a α_2 tak, že by podle Definice 3.4 platilo $\vec{a} = \alpha_1 \vec{b} + \alpha_2 \vec{c}$.

$$\begin{aligned}(2; 4; -4) &= \alpha_1 (0; -2; 3) + \alpha_2 (1; 0; 1) \\ (2; 4; -4) &= (0; -2\alpha_1; 3\alpha_1) + (\alpha_2; 0; \alpha_2) \\ (2; 4; -4) &= (\alpha_2; -2\alpha_1; 3\alpha_1 + \alpha_2)\end{aligned}$$

Dva vektory se sobě rovnají, rovnají-li se jejich odpovídající složky, tj.

$$\begin{aligned}2 &= \alpha_2 \\ 4 &= -2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -2 \\ -4 &= 3\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ -4 &= 3 \cdot (-2) + 2\end{aligned}$$

Existují čísla $\alpha_1 = -2$ a $\alpha_2 = 2$ taková, že platí $\vec{a} = -2\vec{b} + 2\vec{c}$, vektor $\vec{a}$ je tedy lineární kombinací vektorů $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Je zřejmé, že vektor $\vec{b}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$ a $\vec{c}$, protože $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$. Obdobně vektor $\vec{c}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$, protože $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Příklad Zjistěte, zda je vektor $\vec{w}$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

$$\vec{w} = (5, 6, 7), \vec{u} = (1, 3, 2), \vec{v} = (2, -1, 3)$$

Řešení Pokud by byl $\vec{w}$ lineární kombinací $\vec{u}$ a $\vec{v}$, pak by existovala reálná čísla α_1 a α_2 tak, že by podle Definice 3.4 platilo

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v} \\ (5, 6, 7) &= \alpha_1 (1, 3, 2) + \alpha_2 (2, -1, 3) \\ (5, 6, 7) &= (\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2)\end{aligned}$$

Z rovnosti vektorů dostaneme

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 5 - 2\alpha_2 \quad \alpha_1 = 5 - 2 \cdot \frac{9}{7} = \frac{17}{7}$$

$$3\alpha_1 - \alpha_2 = 6 \quad 3(5 - 2\alpha_2) - \alpha_2 = 6 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{9}{7}$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 7$$

Dosadíme vypočítané hodnoty α_1 a α_2 do poslední rovnice.

$$2 \cdot \frac{17}{7} + 3 \cdot \frac{9}{7} = \frac{61}{7} \neq 7$$

Soustava rovnic pro neznámé α_1 a α_2 nemá řešení. Neexistují koeficienty α_1 a α_2 tak, aby platilo $\vec{w} = \alpha_1 \vec{u} + \alpha_2 \vec{v}$. Vektor $\vec{w}$ tedy není lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Lineární závislost vektorů

Definice 3.5 Vektory se nazývají **lineárně nezávislé**, právě když pouze jejich triviální lineární kombinace je nulový vektor. Existuje-li aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna vektoru nulovému, jsou vektory **lineárně závislé**.

Příklad Zjistěte, zda vektory $\vec{a} = (2, -4)$ a $\vec{b} = (-1, 2)$ jsou lineárně závislé či lineárně nezávislé.

Řešení Platí $\vec{a} + 2\vec{b} = (0, 0)$. Existují tedy nenulové konstanty $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$ tak, že lineární kombinace $\alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{b} = \vec{0}$. To znamená, že vektory jsou lineárně závislé.

Příklad Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů $\vec{x}_1 = (1, 0, 2), \vec{x}_2 = (1, -1, 0), \vec{x}_3 = (3, -2, 3)$.

Řešení Podle Definice 3.5 jsou vektory lineárně nezávislé, když jejich lineární kombinace

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 = \vec{0} \quad (1)$$

jen v případě, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Když (1) rozepíšeme do složek, dostáváme soustavu

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \quad (2)$$

$$-\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \quad (3)$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \quad (4)$$

Z rovnice (4) je $\alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_3$.

Z rovnice (3) je $\alpha_2 = -2\alpha_3$.

Po dosazení do rovnice (2) obdržíme $-\frac{3}{2}\alpha_3 - 2\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0$. Odtud spočteme, že $-\alpha_3 = 0$.

Odtud pak získáme, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že zadané vektory jsou lineárně nezávislé, protože pouze jejich triviální kombinace je rovna vektoru nulovému.

O úzkém vztahu mezi pojmy lineární kombinace a lineární závislost vypovídá následující věta:

Věta 3.1 Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V_n$ jsou lineárně závislé, právě když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.

Poznámka Věta udává nutnou a zároveň postačující podmínku pro lineární závislost vektorů.

Příklad Zjistěte, zda dané tři vektory jsou lineárně závislé, či nezávislé. $\vec{a} = (0; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -1)$, $\vec{c} = (1; -1; 1)$.

Řešení

- a) Vyšetříme lineární závislost podle Definice 3.5. Utvoříme lineární kombinaci vektorů a položíme ji rovnu $\vec{0}$.

$$\begin{aligned}\alpha_1 \vec{0} + \alpha_2 \vec{b} + \alpha_3 \vec{c} &= \vec{0} \\ \alpha_1(0; 0; 1) + \alpha_2(1; -1; -1) + \alpha_3(1; -1; 1) &= (0; 0; 0) \\ (\alpha_2 + \alpha_3; -\alpha_2 - \alpha_3; \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) &= (0; 0; 0)\end{aligned}$$

Z rovnosti vektorů obdržíme soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$$\begin{aligned}\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\alpha_3 \\ -\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_3 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = 2\alpha_3\end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Řešením jsou všechny uspořádané trojice tvaru

$$(2\alpha_3; -\alpha_3; \alpha_3), \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Např. pro $\alpha_3 = 1$ obdržíme jednu takovou trojici $(2; -1; 1)$.

V tomto případě dokonce nekonečně mnoho netriviálních lineárních kombinací dává vektor $\vec{0}$, tedy vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ jsou lineárně závislé.

- b) Vyšetříme lineární závislost podle Věty 3.1. Zjistíme, zda je např. vektor $\vec{a}$ lineární kombinací vektorů $\vec{b}$ a $\vec{c}$, tj. platí-li

$$\begin{aligned}\vec{a} &= k \cdot \vec{b} + l \cdot \vec{c}, \text{ kde } k, l \in \mathbb{R} \\ (0; 0; 1) &= k(1; -1; -1) + l(1; -1; 1) \\ (0; 0; 1) &= (k + l; -k - l; -k + l)\end{aligned}$$

Z rovnosti vektorů dostáváme

$$0 = k + l \Rightarrow k = -l, k = -\frac{1}{2}$$

$$0 = -k - l$$

$$1 = -k + l \quad 1 = 2l \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

Vektor $\vec{a}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{b}$ a $\vec{c}$ a podle Věty 3.1 jsou vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárně závislé.

Poznámky Lineární závislost či lineární nezávislost vektorů lze vyšetřit také užitím hodnoty matic nebo výpočtem hodnoty determinantů. (viz dále)

Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice 3.6 Maximální počet lineárně nezávislých vektorů z prostoru V_n se nazývá **dimenze vektorového prostoru** V_n a množina těchto vektorů tvoří tzv. **bázi** daného vektorového prostoru.

Poznámka Známe-li bázi vektorového prostoru, můžeme každý libovolný prvek prostoru vygenerovat jako lineární kombinaci prvků báze.

Příklad Zjistěte, zda vektory $\vec{x}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{x}_3 = (0, 0, 1)$ jsou lineárně nezávislé. Pokud ano, vyjádřete vektor $(5, 4, -30)$ jako lineární kombinaci těchto vektorů.

Řešení

Řešíme soustavu

$$1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$$

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 = 0$$

Protože tato soustava má jen triviální řešení, jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ lineárně nezávislé. Vektor $(5, 4, -30) = 5\vec{x}_1 + 4\vec{x}_2 - 30\vec{x}_3$.



n -rozměrný vektor je uspořádaná n -tice reálných čísel. Vektory můžeme mezi sebou sčítat, násobit skalárem, vytvořit jejich skalární součin. Lineární kombinací vektorů je vektor vzniklý operacemi sčítání vektorů a násobení skalárem. Vektory jsou lineárně nezávislé, když pouze jejich triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru. Vektory jsou lineárně závislé, je-li aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.



1. Co je n -rozměrný vektor a jaké znáte operace s vektory?
2. Co je lineární kombinace vektorů a triviální lineární kombinace vektorů?
3. Kdy jsou vektory lineárně závislé a kdy lineárně nezávislé? Uveďte příklady.
4. Vysvětlete pojmy vektorový prostor, jeho báze a dimenze. Uveďte příklady.
5. Zjistěte, zda vektory jsou na sebe kolmé.
 - a) $\vec{x}_1 = (1, 0), \vec{x}_2 = (2, 0)$ [ne]
 - b) $\vec{x}_1 = (1, -1, 2), \vec{x}_2 = (3, 5, 1)$ [ano]
6. Určete vektor $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$, jsou-li dány vektory
 $\vec{a} = (3; 5; -2; 6), \vec{b} = (-1; 7; 13; -3), \vec{c} = (1; 0; -2; 3)$.
 $[\vec{x} = (8; -11; -41; 18)]$
7. Vypočítejte $a, b \in \mathbb{R}$ z rovnice $\vec{x} = \vec{y}$, kde $\vec{x} = (-2; 0; a - b; a)$ a
 $\vec{y} = (b; a + b; 4; -b)$
 $[a = 2, b = -2]$
8. Zjistěte, zda je vektor $\vec{w}$ lineární kombinací vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$.
 - a) $\vec{w} = (-3; 0), \vec{a} = (0; 1), \vec{b} = (1; 4)$
 $[\text{ano}; \vec{w} = 12\vec{a} - 3\vec{b}]$
 - b) $\vec{w} = (2; 0; 4), \vec{a} = (0; -2; 3), \vec{b} = (1; 0; 1)$
 $[\vec{w} \text{ není lineární kombinací } \vec{a} \text{ a } \vec{b}]$
9. Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů.
 - a) $\vec{x}_1 = (1, 0), \vec{x}_2 = (2, 1), \vec{x}_3 = (-1, 1)$
 $[\text{lineárně závislé}]$
 - b) $\vec{x}_1 = (1, 1, 0), \vec{x}_2 = (0, 2, 2), \vec{x}_3 = (3, 0, -3)$
 $[\text{lineárně závislé}]$
 - c) $\vec{x}_1 = (1, 1, 0), \vec{x}_2 = (0, 2, 2), \vec{x}_3 = (3, 0, 3)$
 $[\text{lineárně nezávislé}]$



Literatura k tématu:

- [1] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*, 2. vydání. Academia Praha, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9
- [2] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87

- [3] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9
- [4] MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2., upravené a doplněné vydání. Grada, 2015. ISBN: 978-80-247-5406-2
- [5] O'LEARY, M. L. *Linear Algebra*. Wiley, 2021. ISBN 9781119437444

Kapitola 4

Matice



Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat pojem matice,
- realizovat operace s maticemi.



Klíčová slova:

Matice, sčítání matic, násobení matic, transponovaná matice.

Náhled kapitoly

- V této kapitole bude nejprve definován pojem matice typu m/n . Poté budou studovány základní maticové operace a transponování matic.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je zavedení pojmu matice typu m/n a definování operací s maticemi.

Odhad času potřebného ke studiu

- 2 hodiny

Definice matice a typy matic

Definice 4.1 **Maticí A typu** m/n , resp. $m \times n$, nazýváme obdélníkové schéma $m \cdot n$ reálných čísel a_{ij} , kde $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$, sestavených v m řádcích a n sloupcích, tj.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- a_{ij} je prvek matice v i -tém řádku a j -tém sloupci
- i je řádkový index
- j je sloupcový index
- $r = \min \{m, n\}$
- $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ jsou prvky, které leží na hlavní diagonále matice A
- $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{r1}$ jsou prvky, které leží na vedlejší diagonále matice A

Řádky matice A lze považovat za n -členné řádkové vektory. Sloupce matice A lze považovat za m -členné sloupcové vektory.

Příklad Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -2 \\ -0,5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Matice je typu $3/2$ (má 3 řádky a 2 sloupce). Číslo 8 je prvek a_{32} , protože stojí ve 3. řádku a 2. sloupci.

Prvky 1, -2 leží na hlavní diagonále matice.

Prvky 6, 0 leží na vedlejší diagonále matice.

Typy matic

- Matice, která má stejný počet řádků jako sloupců ($m = n$) se nazývá **čtvercová matice** řádu n .

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ \frac{3}{4} & \end{pmatrix} \quad a \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$m = n = 2$ $m = n = 3$

A a B jsou čtvercové matice; A je řádu 2, B je řádu 3.

- Matice, která má pod hlavní diagonálou samé nuly, se nazývá **horní trojúhelníková matice**.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ je horní trojúhelníková matice}$$

- Matice se nazývá **horní stupňovitá (resp. horní schodovitá) matice**, pokud
- případné nulové řádky jsou uspořádány na konci matice,
 - nenulové jsou uspořádány tak, že každý následující řádek začíná větším počtem 0 než řádek předchozí.

Příklad

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ je horní stupňovitá matice}$$

- Čtvercová matice, která má mimo hlavní diagonálu pouze nuly, se nazývá **diagonální**.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ je diagonální matice řádu 3}$$

- Diagonální matice s jedničkami na hlavní diagonále se nazývá **jednotková matice**. Budeme ji značit E .

Příklad

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ je jednotková matice řádu 2}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ je jednotková matice řádu 3}$$

➤ Matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule se nazývá **nulová matice**, značíme $\|0\|$.

Příklad

$$\|0\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je nulová matice typu } 2/3$$

Operace s maticemi

Definice 4.2 Říkáme, že matice **A, B jsou si rovny** a píšeme $A = B$, jsou-li téhož typu a jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechny uspořádané dvojice $(i; j)$.

Poznámka Prvky na odpovídajících místech jsou si rovny.

Příklad Zjistěte, pro která $a, b \in \mathbb{R}$ platí rovnost matic A a B , je-li

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & a-5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad a \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ b+1 & 3 \\ a+b & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení $A = B$ podle Definice 4.2 když

$$b + 1 = 0 \quad \Rightarrow b = -1$$

$$a - 5 = 3 \Rightarrow a = 8$$

$$a + b = 7 \quad 8 - 1 = 7$$

Pro čísla $a = 8$ a $b = -1$ nastane rovnost matic, tj. $A = B$.

Definice 4.3 Necht' $c \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in R,$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}, b_{ij} \in R,$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}, c_{ij} \in R.$$

Pak definujeme

- **násobení matice konstantou**

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & \cdots & ca_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{m1} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix},$$

- **součet dvou matic**

$$A + C = \begin{pmatrix} a_{11} + c_{11} & \cdots & a_{1n} + c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + c_{m1} & \cdots & a_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix},$$

- **součin dvou matic**

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1s} + \cdots + a_{1n}b_{ns} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1s} + \cdots + a_{mn}b_{ns} \end{pmatrix}.$$

Poznámka Prvek $a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$ u součinu matic je **skalárním součinem** prvního řádku (řádkového vektoru) matice A a prvního sloupce (sloupcového vektoru) matice B , atd.

Poznámky

- Sčítat a odčítat lze pouze matice stejného typu.
- Při násobení matice konstantou na typu matice nezáleží. Společný činitel **všech** prvků matice A lze vytknout před matici A .
- Násobit dvě matice mezi sebou můžeme jen tehdy, je-li počet sloupců prvního činitele roven počtu řádků druhého činitele.

Příklad Vypočtěte matici $X = 2A - 3B$,

$$\text{je-li } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení Užitím Definice 4.3 postupně dostaneme

$$X = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 5 & -15 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad Spočítejte součiny AB a BA , když

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že $AB \neq BA$.

Příklad Spočítejte součiny AB a BA , je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$A \cdot B = (1 \quad -1 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-3)$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -1 \quad 3) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -12 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Poznámky

- Jistě jste si všimli, že pro násobení matic neplatí komutativní zákon. Proto rozlišujeme násobení matice A maticí B zprava a zleva, tzn., že při násobení matic záleží na jejich pořadí.
- Je-li A čtvercová matice a E jednotková matice stejného řádu, pak platí

$$AE = EA = A.$$

- Na rozdíl od reálných čísel, kde $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ nebo $b = 0$, se může u matic stát, že $AB = \mathbf{0}$ a přitom žádná z matic A, B není nulová.

Příklad Necht'

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

a přitom $A \neq \mathbf{0}$ i $B \neq \mathbf{0}$.

Poznámka Pokud $AB = BA$ hovoříme o **záměnných maticích**.

Transponovaná matice

Definice 4.4 Jestliže v dané matici A typu m/n vyměníme řádky za sloupce, přičemž ponecháme jejich pořadí, říkáme, že jsme matici **transponovali**. Značíme ji A^T a je typu n/m .

Příklad Určete k matici A matici transponovanou.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3/4

Řešení

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4/3

Poznámky

- Platí, že $(A^T)^T = A$
- Jedině v případě, že matice B , resp. C , je čtvercová, může nastat případ $B^T = B$, resp. $C^T = -C$. Pro všechny prvky takové matice platí $b_{ij} = b_{ji}$, resp. $c_{ij} = -c_{ji}$. V takovém případě nazýváme matici B **symetrickou maticí** a matici C **antisymetrickou maticí**. Z rovnosti $c_{ij} = -c_{ji}$ plyne, že antisymetrická matice má v hlavní diagonále samé nuly.

Příklad

$$\text{Matice } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ je symetrická.}$$

$$\text{Matice } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ je antisymetrická.}$$


 Σ

Matice je obdélníkové schéma reálných čísel. Matice můžeme mezi sebou sčítat, násobit a násobit skalárem. Mezi sebou lze násobit pouze takové matice, pro které počet sloupců první matice je roven počtu řádků v druhé matici. Součin matic není komutativní. Vyměníme-li v matici řádky za sloupce v témž pořadí, obdržíme matici transponovanou.

?

1. Co musí splňovat matice, abychom je mohli sečíst?
2. Co musí splňovat matice, abychom je mezi sebou mohli násobit?
- 3.

$$\text{Pro } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ spočtete}$$

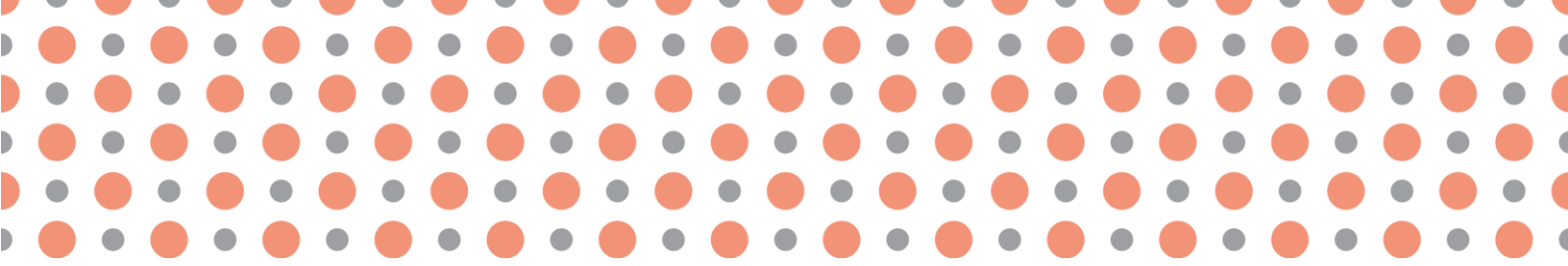
- a) $A-B$
- b) AB
- c) AC
- d) CA

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & -12 \end{pmatrix} \\ \text{c) Nelze násobit, d) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix} \end{array} \right]$$



Literatura k tématu:

- [1] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*, 2. vydání. Academia Praha, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9
- [2] HENDL, J. *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*. 3. vydání. Karolinum, 2022. ISBN 978-80-246-5400-3
- [3] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9
- [4] MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2., upravené a doplněné vydání. Grada, 2015. ISBN: 978-80-247-5406-2



Kapitola 5

Hodnost matice a matice inverzní



Po prostudování kapitoly budete umět:

- stanovit hodnotu matice,
- umět k dané matici určit matici inverzní.



Klíčová slova:

Hodnota matice, inverzní matice, regulární a singulární matice.

Náhled kapitoly

- V této kapitole bude definován pojem hodnost matice a bude ukázáno, jak ji lze pomocí ekvivalentních úprav matic stanovit. Poté bude zaveden pojem matice inverzní a bude studováno, jak lze inverzní matici vypočítat. Další možnost, jak lze inverzní matici nalézt (pomocí tzv. adjungované matice) bude popsán v další kapitole zabývající se determinantem matic.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je zavedení pojmů hodnost matice a matice inverzní a ukázání postupů, jak hodnost a inverzní matici nalézt.

Odhad času potřebného ke studiu

- 3 hodiny

Hodnost matice

Každé matici A lze přiřadit jisté důležité číslo, které nazýváme hodnost matice A , a značíme h , resp. $h(A)$.

Definice 5.1 **Hodnost matice** je maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků (sloupců).

Poznámka Pro nenulovou matici je $h \in \mathbb{N}$, pro nulovou matici $h = 0$.

Věta 5.1 *Hodnost matice se nezmění,*

- *když zaměníme pořadí řádků*
- *když libovolný řádek vynásobíme libovolnou nenulovou konstantou*
- *když jeden řádek přičteme k řádku jinému*
- *když vynecháme řádek, který je lineární kombinací ostatních (tj. nulový, stejný s jiným řádkem, násobek jiného řádku)*

Věta 5.2 *Hodnost matice je rovna hodnosti matice k ní transponované.*

Důsledek Řádková hodnost matice je rovna její sloupcové hodnosti.

Poznámka Je-li h hodnost matice znamená to, že mezi řádky této matice existuje h lineárně nezávislých řádků a každý další řádek je jejich lineární kombinací – tedy $h \leq m$. Provedeme-li analogickou úvahu pro sloupce, pak $h \leq n$.

Důsledek $h \leq \min\{m; n\}$.

Věta 5.3 *Hodnost horní stupňovité matice je rovna počtu nenulových řádků této matice.*

Hodnost matice zpravidla určujeme tak, že danou matici upravíme „dovolenými“ úpravami, které nemění její hodnost, na horní stupňovitý tvar. Hodnost matice je pak rovna počtu nenulových řádků upravené matice. Jak důležitá je hodnost matice uvidíme v kapitole o řešení soustav lineárních rovnic.

Poznámka Úpravy matic, které nemění její hodnost, budeme nazývat **ekvivalentní úpravy**.

Definice 5.2 Dvě matice A a B se nazývají **ekvivalentní**, mají-li stejnou hodnost a stejný počet sloupců.

Zápis: $A \sim B$.

Příklad Určete hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $h(A) = 3$.

Příklad Určete hodnost matice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \\ 0 & -1 \\ 0 & 7 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $h(A) = 2$.

Inverzní matice a její výpočet

Sčítání a násobení matic má některé analogické vlastnosti jako sčítání a násobení reálných čísel.

Např. v případě sčítání matic existuje nulová matice $\|0\|$ tak, že $A + \|0\| = A$ a existuje opačná matice $-A$ tak, že $A + (-A) = \|0\|$. Nabízí se otázka: Existuje v případě násobení matic k matici A nějaká matice X taková, že platí $AX = E$? Odpověď dává tato podkapitola.

Definice 5.3 Necht' A, X, E jsou čtvercové matice řádu n . Jestliže platí $AX = E$, pak X nazýváme **inverzní matice k matici A** a značíme ji A^{-1} .

Poznámka Pro inverzní matici platí

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Příklad Ověřte, zda matice A^{-1} je inverzní k matici A .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Ověříme, zda platí vztah $A^{-1}A = E$, $AA^{-1} = E$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Matice A^{-1} je inverzní maticí k matici A .

Definice 5.4 Necht' A je čtvercová matice řádu n .

Je-li $h(A) = n$, nazývá se A **regulární matice**, je-li $h(A) < n$, nazývá se A **singulární matice**.

Poznámka V další části se dozvíme, že při určování, zda je matice regulární či singulární, můžeme u čtvercových matic využít hodnotu determinantu.

Věta 5.4 Ke čtvercové matici A existuje jednoznačně určená inverzní matice A^{-1} , právě když je matice A regulární.

Poznámka Některé vlastnosti inverzních matic:

- je-li A regulární, pak A^{-1} je rovněž regulární
- $(A^{-1})^{-1} = A$
-

Inverzní matici můžeme vypočítat dvojím postupem:

1. Úpravou matice A na jednotkovou matici E .
2. Využitím adjungované matice (viz dále).

Postup při výpočtu A^{-1} pomocí úprav matice A na jednotkovou matici E :

1. Regulární matici A převedeme úpravami z Věty 5.1 na jednotkovou matici E
2. Současně stejnými úpravami převedeme matici E na matici A^{-1} .

$$A \rightarrow E \text{ a } E \rightarrow A^{-1}$$

Upozornění Při výpočtu inverzní matice je třeba použít buď pouze řádkové nebo pouze sloupcové úpravy.

Příklad K matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ určete inverzní matici A^{-1} .

Řešení Nejprve zjistíme, zda je matice regulární

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$h(A) = 2 = n \Rightarrow$ matice A je regulární, lze k ní podle Věty 5.4 určit jednoznačně inverzní matici A^{-1} .

	A		E	
	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	
A ↓ E	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	E ↓ A ⁻¹
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$	
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$	
	E		A ⁻¹	

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sami ověřte, že $AA^{-1} = E$.

Příklad Určete inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení: Buď uijeme schématu uvedeného v předcházejícím příkladě nebo matici A rozšíříme o jednotkovou matici E a pomocí ekvivalentních úprav je upravujeme tak, aby $(A/E) \approx (E/A^{-1})$. Zřejmě, $h(A) = 3 = n$, protože A je horní stupňovitá matice. Inverzní matice A^{-1} tedy existuje jednoznačně. 3. řádek opišeme. Od trojnásobku 1. řádku odečteme dvojnásobek 3. řádku. Od trojnásobku 2. řádku odečteme dvojnásobek 3. řádku. Pak 1. řádek dělíme 3, 2. řádek dělíme 6, 3. řádek dělíme 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Sami ověřte, že $AA^{-1} = E$.

Σ

Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků v odpovídající horní stupňovité matici. K regulární matici existuje jednoznačně určená matice inverzní.

?

1. Vysvětlete, jak byste postupovali při určování hodnosti matice.
2. Jakou maximální hodnost může mít matice typu $8/3$?
3. Ke které matici lze spočítat matici inverzní?
4. Určete hodnost matice.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad [h = 2] \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad [h = 3]$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 10 \\ -3 & -9 & 6 & -15 \\ 5 & 15 & -10 & 25 \end{pmatrix} \quad [h = 1] \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix} \quad [h = 2]$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & -8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad [h = 3] \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad [h = 2]$$

4. K matici A určete inverzní matici A^{-1} .

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right]$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left[A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -9 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right]$$



Literatura k tématu:

- [1] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*, 2. vydání. Academia Praha, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9
- [2] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87
- [3] HENDL, J. *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*. 3. vydání. Karolinum, 2022. ISBN 978-80-246-5400-3
- [4] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9
- [5] MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2., upravené a doplněné vydání. Grada, 2015. ISBN: 978-80-247-5406-2
- [6] O'LEARY, M. L. *Linear Algebra*. Wiley, 2021. ISBN 9781119437444

Kapitola 6

Determinanty



Po prostudování kapitoly budete umět:

- správně chápat pojem determinant čtvercové matice,
- vypočítat determinant pomocí křížového pravidla a Sarrusova pravidla,
- vypočítat determinant užitím Laplaceova rozvoje,
- využít determinanty při určování inverzní matice.



Klíčová slova:

Determinant, křížové pravidlo, Sarrusovo pravidlo, Laplaceův rozvoj, algebraický doplněk prvku, adjungovaná matice.

Náhled kapitoly

- V této kapitole bude definován pojem determinant matice a bude studováno, jak jej stanovit (v závislosti na rozměru matice). Poté bude ukázáno, jak lze determinant využít pro nalezení inverzní matice, pro stanovení, je-li matice singulární nebo regulární, a také pro určení lineární závislosti, resp. nezávislosti, vektorů. Další využití determinantů při řešení soustav lineárních rovnic bude ve studijním textu studováno dále v příslušné kapitole zabývající se řešením soustav lineárních rovnic.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je definování pojmu determinant matice, zavedení postupů, jak lze determinanty vypočítat a také ukázání toho, jak lze determinanty využít pro nalezení inverzní matice nebo určení lineární (ne)závislosti vektorů.

Odhad času potřebného ke studiu

- 4 hodiny

Definice determinantu a jeho vlastnosti

Definice 6.1 **Determinant** je zobrazení množiny čtvercových matic do množiny reálných čísel.

Značíme jej $\det A$, $|A|$ nebo $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Definice 6.2 Determinantem čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n nazýváme součet

$$\sum_{k \in S_n} \operatorname{sgn}(k) a_{1k(1)} a_{2k(2)} \cdots a_{nk(n)}$$

$n!$ součinů, v němž se sčítá přes všechny permutace $k = (k(1), k(2), \dots, k(n))$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a kde $\operatorname{sgn}(k)$ značí znaménko permutace.

Poznámka Determinant čtvercové matice řádu n je roven $n!$ součinů n prvků této matice takových, že v každém součinu je právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupce. Každý součin je navíc opatřen znaménkem plus nebo minus, které závisí na tom, ze kterých řádků a sloupců byly prvky do součinu vybrány.

Věta 6.1 (Vlastnosti determinantů)

- Jestliže zaměníme mezi sebou dva řádky, hodnota determinantu se změní na opačnou.
- Jestliže jeden řádek determinantu vynásobíme konstantou c , pak hodnota determinantu je c - násobkem původní hodnoty.
- Jestliže k jednomu řádku determinantu přičteme libovolnou kombinaci jiných řádků, hodnota determinantu se nezmění. (Sečtení dvou řádků determinantu nezmění hodnotu determinantu.)
- Hodnota determinantu je nulová, když některé řádky determinantu jsou lineárně závislé (např. když jeden řádek determinantu je nulový, dva řádky determinantu jsou shodné, jeden řádek determinantu je c - násobkem jiného).

Důsledek. Hodnota determinantu se nezmění přičtením jednoho řádku nebo nenulového c -násobku řádku k jinému řádku.

Výpočet hodnoty determinantů

Věta 6.2 Determinanty 2. řádu počítáme **křížovým pravidlem**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Příklad Spočítejte hodnotu determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Řešení

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2 = -3 + 2 = -1$$

Věta 6.3 Determinanty 3. řádu počítáme **Sarrusovým pravidlem**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Poznámka Abychom žádný součin nevynechali a výpočet si usnadnili postupujeme takto: Pod determinant opišeme první dva řádky (nebo za determinant opišeme první dva sloupce). Vynásobíme prvky umístěné na hlavní diagonále a na rovnoběžkách s ní, přičemž znaménka součinů ponecháme. Pak vynásobíme prvky umístěné na vedlejší diagonále a na rovnoběžkách s ní, přičemž znaménka součinů změníme na opačná. Všechny součiny sečteme.

Příklad Spočítejte hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Řešení

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot 0 - \\ - [3 \cdot (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot 2] = 6 + 6 + 0 - [0 + 0 + 4] = 12 - 4 = 8$$

Věta 6.4 Hodnota determinantu příslušného k horní trojúhelníkové nebo horní stupňovité matici je rovna součinu prvků na hlavní diagonále.

Příklad Pomocí vlastností determinantů spočítejte hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Řešení Úprava na trojúhelníkový tvar:

1. řádek opišeme; ke druhému řádku přičteme (-2) -násobek 1. řádku; 3. řádek opišeme.

První dva řádky opišeme. Ke 3. řádku přičteme 2. řádek

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-8) = 8$$

Laplaceův rozvoj determinantu

Laplaceův rozvoj determinantu je univerzální metoda pro výpočet determinantů libovolného řádu. Na výpočet determinantů řádu $n \geq 4$ totiž nemáme k dispozici nějakou přehlednou analogii (schéma) jako jsme měli křížové nebo Sarrusovo pravidlo pro determinanty řádu $n = 2$ nebo $n = 3$. K výpočtu determinantů řádu $n \geq 4$ proto používáme Laplaceův rozvoj. Nejprve uvedeme algebraický doplněk prvku a nadefinujeme adjungovanou matici.

Definice 6.3 Necht A je čtvercová regulární matice řádu n . Součin

$$(-1)^{i+j} A_{ij},$$

kde A_{ij} je determinant matice, která vznikne z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce, se nazývá **algebraický doplněk** prvku a_{ij} matice A .

Příklad Určete algebraický doplněk prvku a_{22} a a_{32} matice $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Řešení Podle Definice 6.3 je doplněk prvku a_{22} označený $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 0) = 1$ a doplněk a_{32} označený $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5 - 0) = -5$.

Definice 6.4 Adjungovaná matice k matici A , značíme ji $\text{adj}A$, je matice sestavená z algebraických doplňků prvků matice A a to takto:

$$\text{Je-li } A = (a_{ij}) \Rightarrow \text{adj}A = (A_{ji})$$

Poznámka Algebraické doplňky prvků matice A jsou umístěny „transponovaně“ (překlopeně podle hlavní diagonály).

Adjungovanou matici užijeme mj. při výpočtu inverzní matice.

Příklad Určete adjungovanou matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení Spočteme $A_{11} = 2, A_{12} = -2, A_{21} = 1, A_{22} = 1$. Pak $\text{adj}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Věta 6.5 (Laplaceův rozvoj determinantu) *Determinant se rovná součtu součinů prvků kteréhokoliv jeho řádku (sloupce) s příslušnými algebraickými doplňky.*

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} A_{ij}$$

popř.

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} A_{ij}$$

Poznámka Determinanty rozvíjíme přednostně podle prvků toho řádku nebo sloupce, ve kterém je nejvíce nul. Úpravami, neměnicími hodnotu determinantu, je možné dosáhnout toho, aby v některém řádku nebo sloupci byl nejvýše jeden nenulový prvek.

Příklad Spočítejte hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Řešení Rozvojem podle prvků 3. řádku dostaneme

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \\ &+ (-2) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 1 \cdot (0 - 6) - 2 \cdot (-3 + 2) = 6 + 2 = 8 \end{aligned}$$

Užití determinantů

1) K určení, zda je matice regulární či singulární.

Věta 6.5 Čtvercová matice A je regulární, právě když $\det A \neq 0$.

Poznámka Čtvercová matice A je singulární, právě když $\det A = 0$

Příklad Vyšetřete, zda matice A je regulární či singulární.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 - (16 - 6) = 10 - 10 = 0$$

Matice A je singulární, protože $\det A = 0$.

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - (2 + 3) = 1 - 5 = -4 \neq 0$$

Protože $\det A \neq 0$, je matice A regulární.

2) K určení lineární závislosti či nezávislosti vektorů.

Mějme m vektorů o m složkách. Považujme vektory za řádkové vektory matice a sestavme z nich čtvercovou matici A . Pak platí:

Je-li $\det A \neq 0$, pak jsou řádky matice A lineárně nezávislé a také vektory jsou lineárně nezávislé.

Je-li $\det A = 0$, pak jsou řádky matice A a tedy i vektory lineárně závislé.

Příklad Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$, $\vec{c} = (2; 1; 2)$ lineárně závislé.

Řešení Složky vektorů napíšeme jako řádky matice a vypočteme její determinant.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 8 - (2 - 4) = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně nezávislé, protože $\det A \neq 0$.

3) K výpočtu inverzní matice.

Věta 6.6 Když A je čtvercová regulární matice řádu n , pak pro inverzní matici platí

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}A.$$

Příklad Určete inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení Inverzní matici spočteme na základě Věty 6.6. Adjungovaná matice k matici A je

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Poznámka Připomínáme, že inverzní matici lze počítat také tak, že matici rozšířenou o jednotkovou matici upravujeme pomocí ekvivalentních úprav tak, aby $(A|E) \approx (E|A^{-1})$.

4) K řešení soustav rovnic (viz. dále).

Σ

Determinant přiřazuje čtvercové matici jedno reálné číslo. Výpočet determinantů 2. řádu provádíme křížovým pravidlem, 3. řádu Sarrusovým pravidlem a determinantů vyšších řádů Laplaceovým rozvojem. Determinant se využívá při výpočtu inverzní matice, při určování regulární a singulární matice, při vyšetřování lineární závislosti vektorů, při řešení soustav rovnic.

?

1. Co můžete říct o hodnotě determinantu trojúhelníkové matice a o hodnotě determinantu transponované matice?
2. Ověřte, že inverzní matice k jednotkové matici 3. řádu je ta samá matice.
3. Určete hodnotu determinantu.

$$- \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \quad [1]$$

$$- \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \quad [4]$$

$$- \begin{vmatrix} 1/3 & -5/6 & 1/4 & -1/15 \\ 1/2 & -1/2 & -1/5 & 1/3 \\ -2/3 & -5/6 & -1/2 & 2/3 \\ -1/2 & 1/3 & 3/10 & -2/5 \end{vmatrix} \quad \left[-\frac{1}{2160} \right]$$

6. Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně závislé či lineárně nezávislé.

$$\vec{a} = (2, 4, -3, -1), \vec{b} = (-2, -4, 3, 2), \vec{c} = (4, 8, -6, 0), \vec{d} = (1, 2, 3, -1)$$

[lineárně závislé]

7. Zjistěte, zda je matice singulární či regulární.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad [\text{singulární}]$$

8. Určete inverzní matici k matici

$$- \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

$$- \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad [\text{nelze - matice není regulární}]$$

$$- \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad [\text{nelze - matice není čtvercová}]$$



Literatura k tématu:

- [1] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*, 2. vydání. Academia Praha, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9
- [2] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87
- [3] HENDL, J. *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*. 3. vydání. Karolinum, 2022. ISBN 978-80-246-5400-3
- [4] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9
- [5] MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2., upravené a doplněné vydání. Grada, 2015. ISBN: 978-80-247-5406-2
- [6] O'LEARY, M. L. *Linear Algebra*. Wiley, 2021. ISBN 9781119437444

Kapitola 7

Soustavy lineárních rovnic



Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozhodnout o existenci řešení soustavy lineárních rovnic,
- rozhodnout o počtu řešení soustavy lineárních rovnic.



Klíčová slova:

Homogenní a nehomogenní soustava lineárních rovnic, ekvivalentní úpravy, Frobeniova věta, volné neznámé, parametr.

Náhled kapitoly

- V této kapitole bude definován pojem soustava m lineárních rovnic o n neznámých a bude studováno, za jakých předpokladů má soustava 1, 0 nebo nekonečně mnoho řešení. V další kapitole pak bude popsáno, jak lze tato řešení nalézt.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je definování pojmu soustava m lineárních rovnic o n neznámých a studium podmínek, za kterých má soustava jedno, žádné nebo nekonečně mnoho řešení.

Odhad času potřebného ke studiu

- 2 hodiny

Definice soustavy a jejího řešení

Definice 7.1 Lineární rovnicí o n neznámých budeme rozumět rovnici tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

kde x_i jsou **neznámé**, $b, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$.

Řešením rovnice nazveme uspořádanou n -tici čísel $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, které po dosazení za neznámé $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ přemění rovnici v rovnost.

Příklad Řešením rovnice

$$2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -3$$

je trojice čísel $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 0$, kterou můžeme zapsat také jako vektor $\vec{u} = (-3, 1, 0)$.

Poznámka Rovnici z Definice 7.1 můžeme zapsat i pomocí matic. Uvažujme matici A typu $1/n$ a matici X typu $n/1$, tedy

$$A = \underset{1/n}{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \quad \text{a} \quad X = \underset{n/1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \vec{x}$$

Potom maticová rovnice $AX = b$, resp. $A\vec{x} = b$, je jen jiným zápisem rovnice z Definice 7.1.

Definice 7.2 Systém rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

kde x_i jsou **neznámé**, $b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, se nazývá **soustava m lineárních rovnic o n neznámých**, stručně **soustava lineárních rovnic**.

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty této soustavy, $b_i \in \mathbb{R}$ jsou absolutní členy rovnic nebo také „pravé strany“ rovnic.

Jsou-li $b_i = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$ nazývá se soustava **homogenní**.

Je-li aspoň jedno $b_i \neq 0$, pak se soustava nazývá **nehomogenní**.

Řešením soustavy nazýváme každou uspořádanou n -tici čísel $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, které po dosazení za neznámé $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ změní soustavu rovnic v soustavu m rovností.

Poznámka Řešením rozumíme i početní postup, jímž takové n -tice hledáme.

Maticový zápis soustavy rovnic

$$A\vec{x} = \vec{b}, \text{ kde } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

m/n
 $n/1$
 $m/1$

Matici A , která je sestavená z koeficientů nazýváme **matice soustavy**.

Přidáme-li k matici A za svislou úsečku sloupec pravých stran, obdržíme **rozšířenou matici soustavy**, označíme ji A_R .

$$A_R = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic

Definice 7.3 Dvě soustavy se nazývají **ekvivalentní**, mají-li tytéž množiny řešení. Značíme $\approx$.

Poznámka Počet neznámých musí být u obou soustav stejný, avšak počet rovnic nemusí být nutně stejný.

Příklad Soustava rovnic

$$\begin{array}{lll} x - y = 1 & \text{je ekvivalentní se soustavou} & x - y = 1 \\ 2x + 3y = 7 & & 20x + 30y = 70 \\ & & 200x + 300y = 700 \end{array}$$

Jediným řešením obou soustav je vektor $\vec{u} = (2, 1)$ neboli $x = 2$ a $y = 1$.

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic jsou takové úpravy soustavy, při nichž z jedné soustavy dostaneme soustavu s ní ekvivalentní. Ekvivalentní úpravou se množina řešení nemění.

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic jsou:

- výměna pořadí rovnic
- násobení jedné rovnice nenulovým reálným číslem
- přičtení libovolného nenulového k -násobku jedné rovnice k jiné rovnici
- vynechání rovnic tvaru $0 = 0$

Existence řešení

Věta 7.1 (Existence řešení-**Frobeniova věta**.) *Soustava lineárních rovnic má alespoň jedno řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.*

Zřejmě platí $h(A) = h(A_R)$ nebo $h(A_R) = h(A) + 1$; tedy vždy $h(A) \leq h(A_R)$.

Poznámka Homogenní soustava má vždy řešení, protože přidání nulového sloupce pravých stran hodnost matice nezmění.

Věta 7.2 *Pokud soustava lineárních rovnic má řešení a hodnost matice soustavy je rovna počtu neznámých, pak toto řešení je jediné.*

Pokud soustava lineárních rovnic má řešení a hodnost matice soustavy je menší, než počet neznámých, pak soustava má nekonečně mnoho řešení. Počet volných neznámých, resp. parametrů, na kterých řešení závisí, je roven $n - h(A)$.

Poznámka Jestliže má homogenní soustava jediné řešení, pak se jedná o řešení **triviální**.

Příklad Rozhodněte, zda daná soustava má řešení.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ \text{a) } 2x_1 + x_3 & = & 1 \\ x_2 + 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ \text{b) } 2x_1 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ \text{c) } 2x_1 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

Řešení

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & -11 \end{array} \right)$$

$$h(A) = 3, \quad h(A_R) = 3, \quad n = 3.$$

$h(A) = h(A_R) = n$ - soustava má právě jedno řešení.

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$h(A) = 2, \quad h(A_R) = 2, \quad n = 3.$$

$h(A) = h(A_R) < n$ - soustava má nekonečně mnoho řešení. Jedna neznámá je volná (jeden parametr).

$$\text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$$h(A) = 2, \quad h(A_R) = 3, \quad n = 3.$$

$h(A) \neq h(A_R)$ - soustava nemá řešení.

U soustav, které mají řešení závislé na parametru nebo parametrech rozlišujeme následující pojmy:

- **Obecné řešení** soustavy je vztah popisující všechna řešení soustavy; obsahuje jeden nebo více parametrů.
- **Partikulární řešení** soustavy obdržíme z obecného řešení, dosadíme-li za parametry konkrétní reálná čísla.
- **Základní řešení** soustavy je partikulární řešení, ve kterém jsou parametry rovny nule.

Σ

Soustavy lineárních rovnic se dělí na homogenní a nehomogenní. Každá soustava lineárních rovnic má buď 1 řešení, nebo má nekonečně mnoho řešení nebo řešení nemá. O tom, jestli řešení soustava má, rozhodujeme na základě Frobeniový věty.

?

1. Kolik řešení může mít homogenní soustava lineárních rovnic?
2. Kolik řešení může mít nehomogenní soustava lineárních rovnic?
3. Rozhodněte kolik řešení má soustava lineárních rovnic

$$2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 6$$

$$\text{a) } 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 = 3$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$$

$$x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0$$

$$\text{b) } 9x_1 - 14x_2 + 28x_3 + 7x_4 = 0$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

$$\text{c) } 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 11$$

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= 1 \\x_2 - x_3 &= -1\end{aligned}$$

[a) nemá řešení b) má nekonečně mnoho řešení c) jedno řešení]



Literatura k tématu:

- [1] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*, 2. vydání. Academia Praha, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9
- [2] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87
- [3] HENDL, J. *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*. 3. vydání. Karolinum, 2022. ISBN 978-80-246-5400-3
- [4] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9
- [5] MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2., upravené a doplněné vydání. Grada, 2015. ISBN: 978-80-247-5406-2
- [6] O'LEARY, M. L. *Linear Algebra*. Wiley, 2021. ISBN 9781119437444



Kapitola 8

Metody řešení soustav lineárních rovnic



Po prostudování kapitoly budete umět:

- řešit soustavu Gaussovou eliminační metodou,
- řešit soustavu Cramerovým pravidlem,
- řešit soustavu pomocí inverzní matice.



Klíčová slova:

Gaussova eliminační metoda, Cramerovo pravidlo.

Náhled kapitoly

- V této kapitole bude nejprve podrobně popsána a na příkladech ilustrována Gaussova metoda řešení soustav lineárních rovnic. Poté bude zmíněna také další metoda pro řešení soustav lineárních rovnic, tzv. Cramerovo pravidlo, které lze použít jen v případě, že je matice soustavy čtvercová a regulární. Na závěr bude ukázáno, jak lze řešit soustavy lineárních rovnic pomocí inverzní matice.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je podrobné popsání tří možností, jak lze řešit soustavy lineárních rovnic: pomocí Gaussovy eliminační metody, prostřednictvím Cramerova pravidla a s využitím inverzní matice.

Odhad času potřebného ke studiu

- 3 hodiny

Gaussova eliminační metoda

Jednou z metod, jak určit řešení soustavy lineárních rovnic, je Gaussova eliminační metoda, která spočívá v provádění ekvivalentních úprav rozšířené matice soustavy.

Smyslem úprav je převést matici na horní stupňovitý tvar. Z takto upravené matice snadno určíme hodnotu $h(A)$ matice soustavy i hodnotu $h(A_R)$ rozšířené matice soustavy a podle **Frobeniovy věty** zjistíme, zda má soustava řešení. Pokud ano, pak porovnáním $h(A)$ a n (hodnosti a počtu neznámých) určíme počet řešení. Řešení pak získáme zpětnou eliminací.

Příklad Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \\2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\2x_1 - 3x_2 &= -4\end{aligned}$$

Řešení

Je to nehomogenní soustava tří rovnic o třech neznámých - počet rovnic $m = 3$, počet neznámých $n = 3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1 \\2 & -5 & 4 & 0 \\2 & -3 & 0 & -4\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1 \\0 & -1 & 2 & 2 \\0 & 1 & -2 & -2\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & -1 \\0 & -1 & 2 & 2 \\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$h(A) = h(A_R) = 2 < n = 3 \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h(A) = 1$ parametru.

Za volnou neznámou (parametr) vybereme neznámou x_3 . Zpětnou eliminací spočteme obecné řešení.

Poslední nenulový řádek matice přepíšeme jako rovnici $-x_2 + 2x_3 = 2$

Položme $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$, t je parametr, dosadíme do rovnice a vypočteme x_2 .

$$-x_2 + 2t = 2 \Rightarrow x_2 = 2t - 2$$

První řádek přepíšeme do rovnice $x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$, dosadíme za x_2 a x_3 a vypočteme x_1 .

$$x_1 - 2(2t - 2) + t = -1 \Rightarrow x_1 = 3t - 5$$

Obecné řešení soustavy je vektor $\vec{u} = (3t - 5, 2t - 2, t); t \in \mathbb{R}$.

Když za t dosadíme jakoukoliv konstantu, obdržíme partikulární řešení.

Partikulární řešení pro $t = 2$: $\vec{v} = (3 \cdot 2 - 5, 2 \cdot 2 - 2, 2)$

$$\vec{v} = (1, 2, 2)$$

Základní řešení (pro $t = 0$): $\vec{w} = (-5, -2, 0)$

Příklad Řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 0$$

$$y + z = 1$$

$$x + y - z = 1$$

Řešení

Je to nehomogenní soustava, $m = 3, n = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$h(A) = h(A_R) = n = 3 \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení. Zpětnou eliminací získáme:

$$-2z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$$y + z = 1; y - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$x + y + z = 0; x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -1$$

Řešením soustavy je vektor $\vec{u} = \left(-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Povšimneme si geometrické interpretace. Každá rovnice dané soustavy je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Řešením soustavy hledáme společné body tří rovin. V našem případě mají dané roviny jediný společný bod $P = \left[-1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$.

Příklad Řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 1$$

$$x - y + 2z = 1$$

$$2x + 3z = 0$$

Řešení

Je to opět nehomogenní soustava, $m = 3, n = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$h(A) = 2, h(A_R) = 3, h(A) \neq h(A_R) \Rightarrow$ soustava nemá řešení.

Příklad Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$$

Řešení

Je to nehomogenní soustava, $m = 2, n = 4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -10 \end{array}\right)$$

$h(A) = h(A_R) = 2 < 4 = n \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h(A) = 4 - 2 = 2$ parametrech.

Zpětnou eliminací vypočítáme obecné řešení.

$-x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -10$; položíme $x_3 = r$ a $x_4 = s$; $r, s \in \mathbb{R}$; r a s jsou parametry

$$-x_2 + 2r + 2s = -10$$

$$x_2 = 10 + 2r + 2s$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5$$

$$x_1 - 10 - 2r - 2s + r - s = 5$$

$$x_1 = 15 + r - 3s$$

Obecné řešení: $\vec{u} = (15 + r - 3s, 10 + 2r + 2s, r, s)$; $r, s \in \mathbb{R}$

Partikulární řešení pro $r = 1$ a $s = -1$: $\vec{v} = (13, 10, 1, -1)$

Základní řešení: $\vec{w} = (15, 10, 0, 0)$

Důsledky Frobeniovy věty pro homogenní soustavu rovnic:

1. Vždy $h(A) = h(A_R)$, protože připsáním sloupce pravých stran, což jsou samé nuly, se hodnota matice soustavy nezmění.
2. Poněvadž vždy $h(A) = h(A_R)$, má homogenní soustava vždy alespoň jedno řešení, a to triviální řešení, což je nulový vektor $\vec{0}$.
3. Je-li $h(A) = n$, pak má soustava pouze triviální řešení.
4. Je-li $h(A) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h(A)$ parametrech.
5. Je-li $m = n$, pak $|A| \neq 0$, právě když má soustava jen triviální řešení.
6. Je-li $m = n$, pak $|A| = 0$, právě když má soustava nekonečně mnoho řešení.

Poznámka Při řešení homogenní soustavy rovnic Gaussovou eliminační metodou pravé strany rovnic do matice nepíšeme, neboť výsledkem ekvivalentních úprav s nimi jsou opět nuly. Píšeme tedy jen matici soustavy.

Příklad Určete všechna řešení soustavy rovnic.

1.

$$3x - y + 2z = 0$$

$$2x + 3y - 5z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

Řešení

Je to homogenní soustava, $m = 3, n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}$$

$h(A) = h(A_R) = 3 = n \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení

Zpětnou eliminací dostaneme

$$-29z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$y - 7z = 0 ; y - 7 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x + y + z = 0 ; x + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Soustava má pouze triviální řešení: $\vec{0} = (0, 0, 0)$

$$2. \quad x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$

$$4x_1 + 7x_2 + x_3 = 0$$

$$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0$$

Řešení

Je to homogenní soustava, $m = 4 = n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(A) = h(A_R) = 2 < 4 = n$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h(A) = 4 - 2 = 2$ parametrech.

Druhý řádek matice napíšeme do rovnice.

$-x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0$; položíme $x_4 = u$ a $x_3 = v$, kde $u, v \in \mathbb{R}$; u, v jsou parametry

$$-x_2 - 3v + 4u = 0$$

$$x_2 = 4u - 3v$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + 2(4u - 3v) + v - u = 0$$

$$x_1 + 8u - 6v + v - u = 0$$

$$x_1 = 5v - 7u$$

Obecné řešení: $\vec{x} = (5v - 7u, 4u - 3v, v, u); u, v \in \mathbb{R}$

Partikulární řešení pro $v = 2$ a $u = -1$; $\vec{w} = (17, -10, 2, -1)$

Základní řešení: $\vec{o} = (0, 0, 0, 0)$

Cramerovo pravidlo

Pokud je matice soustavy čtvercová, tzn., že počet rovnic je roven počtu neznámých, tj. $m = n$, lze soustavu lineárních rovnic řešit za určitého dodatečného předpokladu i Cramerovým pravidlem.

Věta 8.1 (Cramerovo pravidlo) Jestliže A je regulární matice řádu n , pak pro složky $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektoru $\vec{x}$ řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{b}$ platí

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

kde $|A|$ je determinant matice soustavy a determinant $|A_i|$ vznikne z $|A|$ tak, že v něm i -tý sloupec nahradíme vektorem pravých stran $\vec{b}$. Soustava má právě jedno řešení.

Příklad Řešte soustavu rovnic

$$x - y + 2z = 2$$

$$4x - 6y + 7z = 5$$

$$2x \quad \quad + z = 3$$

Řešení

Je to nehomogenní soustava; $m = n = 3$

Zjistíme, zda je matice soustavy A regulární, tj. zda její determinant je různý od nuly.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 14 - (-24 - 4) = -20 + 28 = 8$$

$|A| \neq 0 \Rightarrow$ matice soustavy je regulární a soustavu lze řešit Cramerovým pravidlem. Soustava má právě jedno řešení, které určíme podle vzorce uvedeného ve Větě 8.1.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$$

Řešení: $\vec{u} = (1,1,1)$

Příklad Řešte soustavu

$$x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Řešení

Je to homogenní soustava; $m = n = 3$

K řešení soustavy použijeme Cramerovo pravidlo, je-li to možné.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $|A| \neq 0 \Rightarrow$ soustavu lze řešit Cramerovým pravidlem a soustava má právě jedno řešení.

Spočítáme

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Na závěr spočteme jednotlivé složky řešení $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 0, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 0, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 0,$

Soustava má jen triviální řešení.

Řešení: $\vec{0} = (0, 0, 0,)$

Pro srovnání vyřešíme soustavu i Gaussovou metodou.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$h(A) = h(A_R) = 3 = n$ - soustava má jediný vektor řešení. Je to nulový vektor $\vec{0} = (0, 0, 0,)$.

Řešení soustavy užitím inverzní matice

Soustavu rovnic, jejíž matice soustavy A je čtvercová a regulární, můžeme řešit také užitím inverzní matice A^{-1} .

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ je matice soustavy;}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ matice neznámých a } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ matice pravých stran.}$$

Soustavu n lineárních o n neznámých vyjádříme maticovou rovnicí.

$$AX = B$$

Pokud A je regulární matice, tj. $|A| \neq 0$, má maticová rovnice právě jedno řešení, které obdržíme takto:

Maticovou rovnici $AX = B$ vynásobíme zleva inverzní maticí A^{-1} ,

$$\underbrace{A^{-1}A}_E X = A^{-1}B$$

$$\text{Odtud } X = A^{-1}B$$

Příklad Řešte soustavu rovnic

$$x + 3y - z = 0$$

$$2x - y + z = 3$$

$$-x + 2y + 2z = 1$$

pomocí inverzní matice.

Řešení

Je to nehomogenní soustava, $m = n = 3$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Rightarrow A$ je regulární matice, existuje k ní inverzní matice A^{-1} a soustava má právě jedno řešení

Soustavu lze zapsat pomocí matic ve tvaru $AX = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{inverzní matice } A^{-1} = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} -4 & -8 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Potom } X = A^{-1}B = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} -4 & -8 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{22} \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: $\vec{u} = (1,0,1)$

Poznámka Inverzní matice A^{-1} v předchozím příkladu by se nejsnáze vypočítala pomocí $\text{adj } A$ nebo pomocí jednotkové matice E (viz dříve), popř. pomocí vhodného matematického softwaru.

Poznámka Je-li $|A| = 0$ (matice soustavy je singulární), pak soustavu nelze řešit Cramerovým pravidlem. V tom případě použijeme Gaussovu eliminační metodu.

Poznámka V případě dvou rovnic pro dvě proměnné každá rovnice soustavy představuje přímku v rovině. Mohou nastat tyto tři situace:

- Pokud se přímky protínají, soustava má jediné řešení (řešením soustavy jsou souřadnice jejich průsečíku).
- Jestliže přímky splývají, soustava má nekonečně mnoho řešení (řešením jsou souřadnice bodů, které leží na přímce).
- Když jsou přímky rovnoběžné různé, soustava nemá řešení.

Σ

Matice a determinanty slouží jako nástroj k řešení soustav lineárních rovnic. Řešení soustav lineárních rovnic je možné získat Gaussovou metodou. Pokud je matice soustavy čtvercová a regulární, je možné použít také Cramerovo pravidlo nebo provést výpočet užitím inverzní matice; soustava má v tomto případě jediné řešení.

?

1. Kolik řešení může mít homogenní soustava lineárních rovnic?
2. Kdy lze použít Gaussovu eliminační metodu a kdy Cramerovo pravidlo?
3. Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která nemá žádné řešení. Situaci nakreslete.
4. Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která má jediné řešení. Situaci nakreslete.
5. Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která má nekonečně mnoho řešení. Situaci nakreslete.
6. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

a) $3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 11$$

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$x_2 - x_3 = -1$$

b) $x_3 - x_4 = 2$

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 - x_4 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$

c) $4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0$

$$7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a) \vec{x} = (3, 1, 1) \quad b) \vec{x} = (2 - t, 1 - t, 2 + t, t), t \in R \\ c) \vec{x} = (13t - 13s, 19t - 20s, 17t, 17s) \quad t, s \in R \end{array} \right]$$

7. Cramerovým pravidlem řešte soustavu, je-li to možné

8.

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

a) $3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11$

$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -4$$

b) $3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6$

$$3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6$$

$$[a) \text{ nelze řešit Cramerovým pravidlem } b) (2, 0, 0, 0)]$$

9. Vyřešte soustavu a situaci nakreslete

$$2x_1 - x_2 = -1$$

a) $x_1 + 2x_2 = 8$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = -1 \\ \text{b) } -6x_1 + 3x_2 = -24 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = -1 \\ \text{c) } x_1 - 0,5x_2 = 0,5 \end{array}$$

[a) (2, 3) b) ((t-1)/2, t) c) nemá řešení]



Literatura k tématu:

- [1] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*, 2. vydání. Academia Praha, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9
- [2] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87
- [3] HENDL, J. *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*. 3. vydání. Karolinum, 2022. ISBN 978-80-246-5400-3
- [4] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9
- [5] MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2., upravené a doplněné vydání. Grada, 2015. ISBN: 978-80-247-5406-2

Kapitola 9

Číselné posloupnosti



Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat posloupnost a načrtnout graf posloupnosti,
- vyznat se v jednotlivých způsobech zadání posloupnosti,
- určovat, zda je posloupnost monotónní a omezená.



Klíčová slova:

Posloupnost, monotónní posloupnost, omezená posloupnost.

Náhled kapitoly

- V této kapitole bude nejprve definován pojem posloupnost reálných čísel a bude ukázáno, jak lze posloupnosti zadávat a graficky znázorňovat. Poté budou studovány nejdůležitější vlastnosti posloupností.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je zavedení pojmu posloupnost, studování možností, jak lze posloupnosti zadávat, a také určování jejich vlastností.

Odhad času potřebného ke studiu

- 2 hodiny

Definice posloupnosti a její graf

Definice 9.1 Posloupnost reálných čísel (dále jen posloupnost) je zobrazení množiny přirozených čísel do množiny čísel reálných.

Posloupnost, kterou je každému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřazeno číslo $a_n \in \mathbb{R}$, zapisujeme $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ nebo stručně $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ popř. jen $\{a_n\}$.

Číslo a_n se nazývá **n -tý člen** posloupnosti $\{a_n\}$, číslo n **index** členu a_n .

Poznámka Posloupnost je funkce definovaná na množině přirozených čísel. Posloupnost má vždy nekonečně mnoho členů; je to tedy nekonečná posloupnost.

Posloupnost můžeme zadat

1. symbolicky – vzorcem pro n -tý člen (pokud existuje),
2. rekurentně, tj. m prvními členy a vzorcem, kterým je n -tý člen vyjádřen pomocí m bezprostředně předcházejících členů,
3. výčtem členů, prakticky však pouze několika prvních členů, pokud je zřejmé, jaké členy následují,
4. graficky.

Příklady

- a) Určíme prvních 5 členů posloupnosti $\left\{\frac{n+3}{2n-1}\right\}$.

Řešení

$$a_1 = \frac{1+3}{2 \cdot 1 - 1} = 4, \quad a_2 = \frac{2+3}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{5}{3}, \quad a_3 = \frac{3+3}{2 \cdot 3 - 1} = \frac{6}{5},$$

$$a_4 = \frac{4+3}{2 \cdot 4 - 1} = 1, a_5 = \frac{5+3}{2 \cdot 5 - 1} = \frac{8}{9}.$$

b) Určeme prvních 5 členů posloupnosti zadané rekurentně:

$$a_1 = 3, a_2 = 5, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 3(n-1), n \geq 3.$$

Řešení

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = 2a_2 + a_1 - 3 \cdot 2 = 2 \cdot 5 + 3 - 3 \cdot 2 = 7$$

$$a_4 = 2a_3 + a_2 - 3 \cdot 3 = 2 \cdot 7 + 5 - 3 \cdot 3 = 10$$

$$a_5 = 2a_4 + a_3 - 3 \cdot 4 = 2 \cdot 10 + 7 - 3 \cdot 4 = 15$$

c) Určeme vzorec pro n -tý člen posloupnosti $\left\{\frac{2}{11}, \frac{3}{12}, \frac{4}{13}, \frac{5}{14}, \frac{6}{15}, \dots\right\}$.

Řešení

$$\text{Zřejmě je } a_n = \frac{n+1}{n+10}.$$

Poznámka Nejčastěji bývá posloupnost zadána symbolicky. “Uhodnout” vzorec pro n -tý člen z rekurentního vzorce či výčtu členů se podaří jen v jednoduchých případech.

Definice 9.2 Graf posloupnosti $\{a_n\}$ je množina všech bodů $[n; a_n]$ v rovině $\mathbb{R}^2$, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic. Značíme jej $G(\{a_n\})$.

Příklad Sestrojme část grafu posloupnosti $\{2n - 5\}$.

Řešení

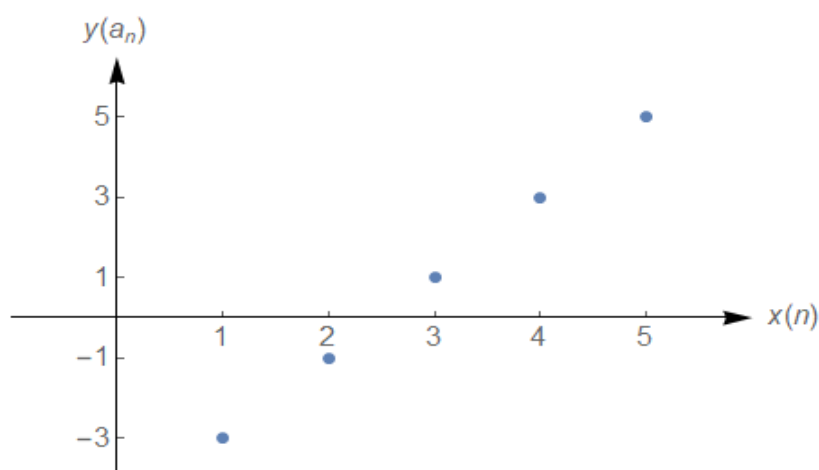
$$a_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

$$a_4 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$$

$$a_5 = 2 \cdot 5 - 5 = 5$$



Obr. 4 Část grafu posloupnosti $\{2n - 5\}$

Poznámka Grafem posloupnosti je vždy množina **izolovaných bodů**, protože jejím definičním oborem je diskrétní množina $\mathbb{N}$.

Jistě jste si všimli, že v přecházejícím příkladu se členy posloupnosti od sebe liší stále o číslo 2, což se dá zapsat také takto: $a_2 = a_1 + 2, a_3 = a_2 + 2, \dots, a_n = a_{n-1} + 2, \dots$.

Posloupnost lze zadat rekurentně $a_1 = -3, a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2$ a také výčtem několika počátečních členů $\{-3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$.

Posloupnost uvedená v předchozím příkladu je speciálním případem posloupnosti, a to aritmetické posloupnosti. Dalším speciálním případem je posloupnost geometrická. Uvedeme nyní definice těchto posloupností a některé základní poznatky o nich.

Definice 9.3 Posloupnost se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové číslo $d \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslo d se nazývá **difference** aritmetické posloupnosti.

Pro aritmetickou posloupnost platí: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

a pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti lze odvodit vzorec $s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$.

Rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti je konstantní; je roven d .

Příklad Sečtěte čísla od jedné do sta.

Řešení

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = ?$$

Čísla tvoří aritmetickou posloupnost, jejíž difference $d = 1$.

$$s_{100} = \frac{100}{2} (1 + 100) = 50 \cdot 101 = 5050$$

Definice 9.4 Posloupnost se nazývá **geometrická**, právě když existuje takové číslo $q \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n q.$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti.

Pro geometrickou posloupnost platí: $a_n = a_1 q^{n-1}$

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$$

Číslo s_n je opět součet prvních n členů geometrické posloupnosti. Podíl dvou sousedních členů geometrické posloupnosti je konstantní; je roven q .

Příklad Určete 10. člen geometrické posloupnosti, je-li $a_1 = 61$ a $q = \frac{1}{2}$.

Řešení

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 2^6 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Poznámka Zřejmě posloupnost nemusí být jen aritmetická nebo geometrická.

Např. posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ není ani aritmetická, ani geometrická.

Vlastnosti posloupnosti

Definice 9.5 **Konečnou** posloupností rozumíme zobrazení prvních m přirozených čísel do množiny $\mathbb{R}$. Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^m = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$.

Poznámka Pojem posloupnosti lze zobecnit. Jejím členy nemusí být jen reálná čísla, ale mohou jimi být i jiné matematické objekty, např. trojúhelníky, funkce apod.

Definice 9.6 Posloupnost, jejíž všechny členy se sobě rovnají, nazýváme **konstantní** nebo **stacionární** posloupnost.

Zápis: $\{a\}_{n=1}^{\infty} = \{a, a, a, \dots\}, a \in \mathbb{R}$.

Např. Posloupnost $\{4\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 4, 4, \dots\}$ je stacionární.

Definice 9.7 Posloupnost $\{a_n\}$ je

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \end{array} \right\}, \text{ jestliže pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ platí } \left\{ \begin{array}{l} a_n < a_{n+1} \\ a_n \leq a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{array} \right\}.$$

Posloupnost $\left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{array} \right\}$ se nazývá **ryze monotónní**.

Posloupnost $\left\{ \begin{array}{l} \text{nerostoucí} \\ \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{klesající} \end{array} \right\}$ se nazývá **monotónní**.

Příklad Posloupnost $\left\{\frac{n+1}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní, a to klesající, protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{3n+4} - \frac{n+1}{3n+1} = \frac{-2}{(3n+4)(3n+1)} < 0,$$

tedy $a_n > a_{n+1}$.

Definice 9.8 Posloupnost $\{a_n\}$ je **omezená shora**, resp. **zdola**, existuje-li číslo $k \in \mathbb{R}$, resp. $l \in \mathbb{R}$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq k$, resp. $a_n \geq l$. Posloupnost $\{a_n\}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Věta 9.1 Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, právě když existuje $K \in \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \leq K$.

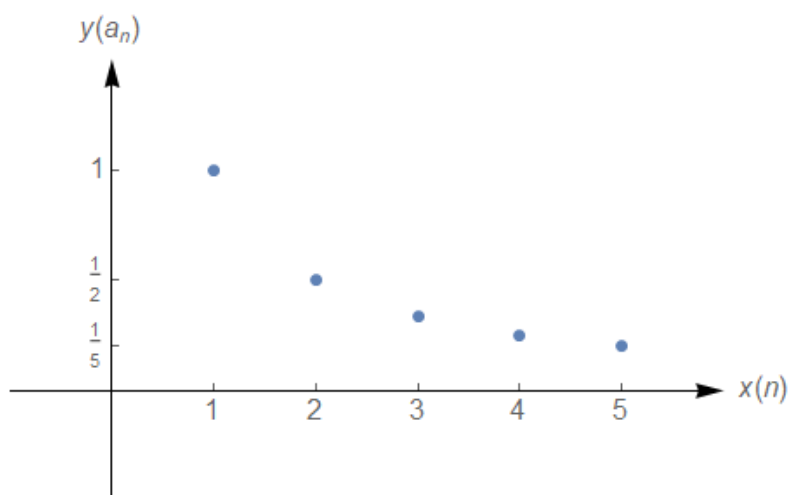
Příklad Zkoumejme vlastnosti posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Řešení

Posloupnost je klesající, protože pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}.$$

Určíme $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}, \dots\right\}$ a setrojíme část grafu.



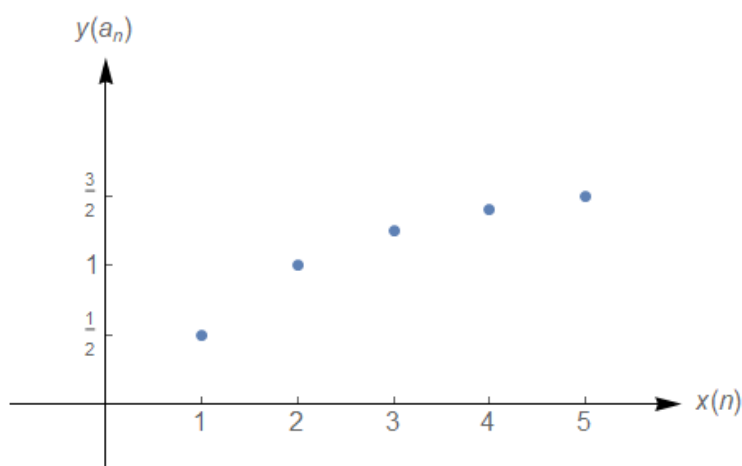
Z grafu lze usoudit, že je posloupnost omezená shora jedničkou a zdola nulou, neboť

$$0 < a_n = \frac{1}{n} \leq 1 \text{ pro } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Příklad Zjistěte, zda je posloupnost $\left\{\frac{2n-1}{n+1}\right\}$ monotónní a omezená.

Řešení Vypočítáme prvních 5 členů posloupnosti a nakreslíme část grafu.

$$\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \dots\right\}$$



Ze znalosti prvních pěti členů a grafu posloupnosti usoudíme, že by tato posloupnost mohla být rostoucí.

Přesvědčíme se, zda pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < a_{n+1}$, tj.

$$\frac{2n-1}{n+1} < \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1}$$

$$\frac{2n-1}{n+1} < \frac{2n+1}{n+2}$$

Užitím ekvivalentních úprav této nerovnice dostaneme, že

$$(2n-1)(n+2) < (2n+1)(n+1),$$

$$2n^2 + 3n - 2 < 2n^2 + 3n + 1,$$

$$0 < 3,$$

což platí pro všechna čísla n ; tím je důkaz toho, že daná posloupnost je rostoucí, tedy ryze monotónní, a také monotónní, proveden.

Protože je posloupnost rostoucí, je zřejmé, že zdola je omezená členem $a_1 = \frac{1}{2}$.

Tzn., že $a_n \geq \frac{1}{2}$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pro odhad horní meze je užitečné určit některé z členů s velkým indexem.

Z toho, že $a_{99} = 1,97$ a $a_{999} = 1,997$ usoudíme, že posloupnost je shora omezená číslem 2.

O správnosti naší úvahy, že $a_n < 2$, se přesvědčíme následovně:

$$\frac{2n-1}{n+1} < 2 \Rightarrow 2n-1 < 2n+2 \Rightarrow 0 < 3.$$

Ukázali jsme, že daná posloupnost je omezená shora i zdola, tedy je omezená.

Definice 9.9 Posloupnost $\{a_{k_n}\}$, kde $\{a_n\}$ je daná posloupnost a $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, se nazývá **vybraná posloupnost** z posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad Uvažujme posloupnost $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$.

Vybrané posloupnosti jsou např. tyto:

$\{a_{k_n}\}: \left\{2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$, kde $\{k_n\} = \{1, 3, 5, \dots\}$ je rostoucí posloupnost lichých čísel;

$\left\{\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots\right\}$, kde $\{k_n\} = \{4, 5, 6, \dots\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel větších jak 3.

Naproti tomu posloupnost $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{100}{99}\right\}$ není vybraná posloupnost, protože je konečná.

Posloupnost $\left\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$ také není vybraná, protože posloupnost $\{k_n\} = \{3, 2, 1, 4, 5, \dots\}$ není rostoucí.

Poznámka Vybranou posloupnost lze z dané posloupnosti vybrat nekonečně mnoha způsoby.

Definice 9.10 Existuje-li číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ mají členy posloupnosti $\{a_n\}$ vlastnost V , jinými slovy, mají-li všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ vlastnost V s výjimkou jejich konečného počtu (tedy i bez výjimky), pak říkáme, že **skoro všechny členy posloupnosti** $\{a_n\}$ mají vlastnost V .

Σ

Číselná posloupnost je definována jako zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$. Mezi základní vlastnosti posloupnosti patří monotónnost a omezenost. Speciálními typy posloupností jsou aritmetická a geometrická posloupnost.

?

1. Definujte číselnou posloupnost.
2. Jakým způsobem můžeme zadat posloupnost?
3. Kdy je posloupnost monotónní?
4. Kdy je posloupnost omezená?
5. Napište první 4 členy posloupnosti, když

a) $a_n = (-2)^n$. $\{-2, 4, -8, 16, \dots\}$

b) $a_n = (-1)^n \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$. $\left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\cos \frac{\pi}{5}, \dots\right\}$

c) $a_n = n + \frac{1+(-1)^n}{2}$. $\{1, 3, 3, 5, \dots\}$

6. Najděte předpis pro n -tý člen.

a) $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$ $\left[a_n = \frac{n+1}{n}\right]$

b) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \dots\right\}$ $\left[a_n = \frac{n}{2^n}\right]$

c) $\{1, -4, 9, -16, 25, \dots\}$ $[a_n = (-1)^{n+1}n^2]$

7. Napište první čtyři členy posloupnosti dané rekurentně vztahy

a) $a_1 = -3, a_{n+1} = a_n + 3, n \geq 1$. $\{-3, 0, 3, 6, \dots\}$

b) $a_1 = -3, a_{n+1} = a_n + n, n \geq 1$. $\{-3, -2, 0, 3, \dots\}$

c) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_{n+1} = a_n - na_{n-1}, n \geq 2$. $\{2, 4, 0, -12, \dots\}$



Literatura k tématu:

- [1] BRABEC, J., MARTAN, F. ROZENSKÝ, Z. *Matematická analýza I.* SNTL Praha, 1989. ISBN 04-013-89
- [2] DĚMIDOVÍČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Fragment Praha, 2003. ISBN 80-7200-587-1
- [3] MÁDROVÁ, V. *Matematická analýza I.* UP Olomouc, 2001. ISBN 80-244-0269-6
- [4] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v $\mathbb{R}$.* UP Olomouc, 2013. ISBN 978-80-244-3410-0
- [5] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza I.* UP Olomouc, 2002. ISBN 80-244-0464-8
- [6] POLANCO, C. *Differential and Integral Calculus - Theory and Cases.* Singapur, Bentham Science Publishers, 2020. ISBN 9789811465109

Kapitola 10

Limita posloupnosti



Po prostudování kapitoly budete umět:

- Definovat a vypočítat limitu posloupnosti,
- vyjmenovat a využít základní vlastnosti konvergentních posloupností,
- graficky vizualizovat geometrický význam definice limity.



Klíčová slova: vlastní limita, nevlastní limita, konvergentní a divergentní posloupnost.

Náhled kapitoly

- V této kapitole budou nejprve zavedeny pojmy vlastní a nevlastní limita posloupnosti a poté bude studováno, jak lze limity posloupností vypočítat a jaké mají vlastnosti.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je popsání pojmu limita posloupnosti a studium toho, jak lze limity posloupností vypočítat a graficky vizualizovat.

Odhad času potřebného ke studiu

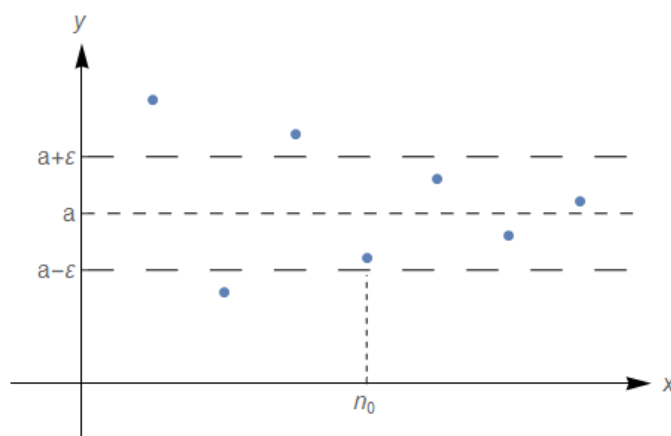
- 3 hodiny

Limita posloupnosti

Definice 10.1 (Vlastní limita posloupnosti.) Posloupnost $\{a_n\}$ má **vlastní limitu** $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Zápis: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ nebo také $a_n \rightarrow a$.

Stručný zápis definice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$



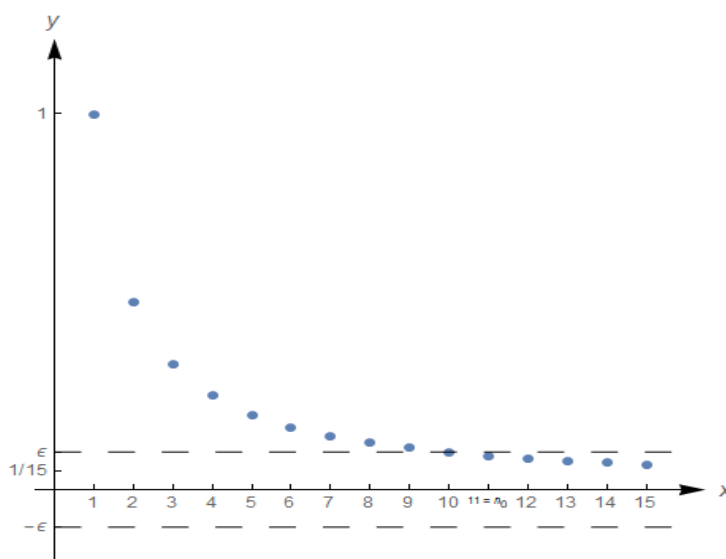
Obr. 5 Vlastní limita posloupnosti - geometrický význam $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Poznámka Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, pak skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ patří do okolí $U_\varepsilon(a)$, což znamená, že skoro všechny body grafu posloupnosti $\{a_n\}$ leží v pásu ohraničeném přímkami o rovnicích $y = a - \varepsilon$ a $y = a + \varepsilon$.

Číslo n_0 závisí na volbě čísla ε , je jeho funkcí, což lze psát $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Příklad Dokažme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řešení Sestrojíme nejprve graf posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.



Obr. 6 Část grafu posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Z grafu vyčteme:

Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} > 0$.

Roste-li n nade všechny meze, tj. $n \rightarrow \infty$, pak se hodnoty členů blíží nule, tj. $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ (viz Obr. 5). Zdá se tedy, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, což podle Definice 10.1 znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Dokážeme, že toto opravdu platí:

Upravíme nerovnost

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} - 0 \right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ n &> \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Položme n_0 rovno nejmenšímu přirozenému číslu, které je větší než $\frac{1}{\varepsilon}$. Pak pro všechna $n \geq n_0$ platí

$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$, což znamená, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dokázali jsme jednu ze základních limit, kterou často užíváme při výpočtu komplikovanějších limit posloupností:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Pro větší názornost a důkladnější pochopení definice 10.1 provedeme konkrétní volbu ε . Zvolíme-li např. $\varepsilon = \frac{1}{10}$, pak $n_0 > \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$. Pak pro $\forall n \geq 11$ je $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \frac{1}{10}$. Vybereme-li např.

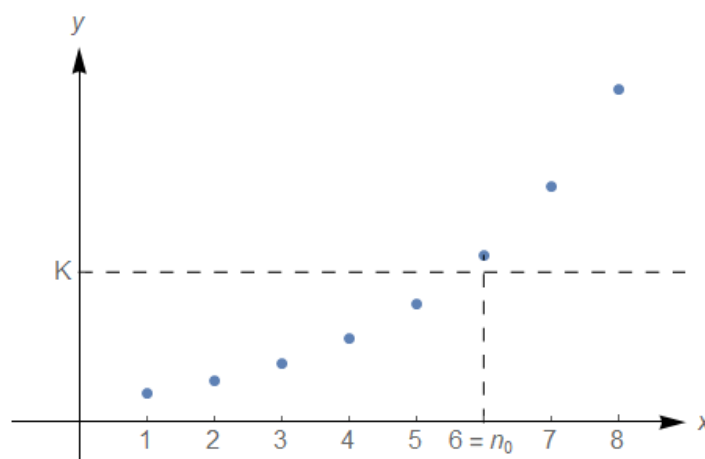
$n = 15$ a pak $\left| \frac{1}{15} - 0 \right| < \frac{1}{10}$, což platí, neboť $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$.

Definice 10.2 (Nevlastní limita posloupnosti.) Posloupnost $\{a_n\}$ má **nevlastní limitu** $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) platí $a_n > K$, resp. $a_n < K$. Zápís: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ($a_n \rightarrow +\infty$), resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ($a_n \rightarrow -\infty$).

Stručný zápis definice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < K.$$



Obr. 7 Nevlastní limita posloupnosti – geometrický význam $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

Poznámka Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, pak skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ patří do okolí $U(+\infty, K)$, což znamená, že skoro všechny body grafu posloupnosti $\{a_n\}$ leží nad přímkou o rovnici $y = K$.

Číslo n_0 **závisí** na volbě K , je funkcí čísla K , $n_0 = n_0(K)$. V případě $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ je účelné volit K dostatečně velké kladné číslo.

Definice 10.3 Posloupnost, která má vlastní limitu se nazývá **konvergentní**. Posloupnost, která není konvergentní se nazývá **divergentní**.

Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnosti $\{a_n\}$ **konverguje**.

Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, resp. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **diverguje**.

Neexistuje-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **diverguje (osciluje)**.

Divergentní posloupnost je tedy posloupnost, která má buď nevlastní limitu nebo posloupnost, jejíž limita neexistuje.

Příklad

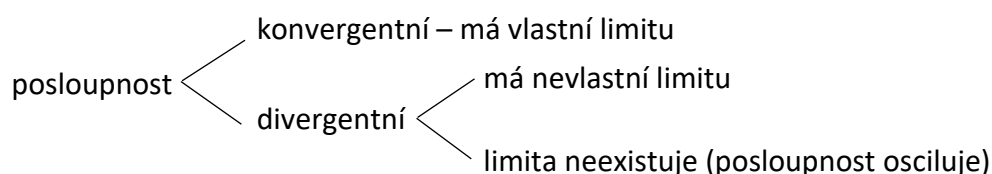
Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je konvergentní, protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Posloupnost $\{n^2\}$ je divergentní, protože $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.

Posloupnost $\{1 - 2n\}$ je divergentní, protože $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2n) = -\infty$.

Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je divergentní (osciluje), protože $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ neexistuje.

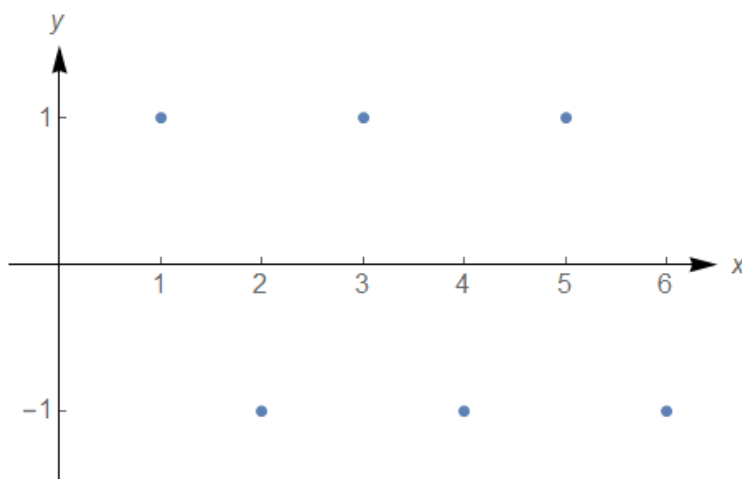
Shrnutí



Příklad Limita posloupnosti $\{(-1)^n\}$ neexistuje, protože neexistuje žádné číslo $a \in \mathbb{R}$, v jehož okolí by se nacházely skoro všechny členy dané posloupnosti.

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

Nekonečně mnoho členů posloupnosti leží v okolí bodu 1 a nekonečně mnoho členů posloupnosti leží v okolí bodu -1 .



Obr. 8 Část grafu posloupnosti $\{(-1)^n\}$, jejíž limita neexistuje

Definice 10.4 Posloupnost, jejíž limita je rovna nule, se nazývá **nulová**.

Příklad Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je nulová posloupnost, protože $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Poznámka Limitu posloupnosti hledáme vždy jen pro $n \rightarrow \infty$, proto můžeme stručně psát pouze $\lim a_n$ místo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Vlastnosti limity posloupnosti

Věta 10.1 Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Poznámka Tzn. buď žádnou nebo jednu.

Věta 10.2 Necht' $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti takové, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = b_n$. Pak $\lim a_n$ existuje, právě když existuje $\lim b_n$ a obě limity jsou si rovny.

Důsledek Vynechání, přidání nebo změna konečného počtu členů posloupnosti nemá vliv na existenci a hodnotu limity.

Např. Posloupnost $\{3, 3, \dots\} = \{3\}_{n=1}^{\infty}$ je stacionární posloupnost, která má limitu 3.

A také posloupnost $\{ \underbrace{50, 40, 30, 20, 10, 1}_{\text{přidané členy}}, 3, 3, 3, \dots \}$ má limitu 3.

Věta 10.3 Jestliže pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, pak $\lim a_n = a$.

Důsledek Limita konstantní posloupnosti je rovna této konstantě.

Např. Posloupnost $\{3, 3, 3, \dots\} = \{3\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu 3.

Věta 10.4 (O limitě posloupností vzniklých početními operacemi.)

Necht' $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ a necht' jsou početní operace $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, a^m , $\sqrt[m]{a}$, $m \in \mathbb{N}$, definovány na množině $\mathbb{R}^*$.

Potom je

$$\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b \quad \lim |a_n| = |a|$$

$$\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \quad \lim (a_n)^m = a^m$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \lim \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}, \text{ pokud pro skoro všechna } n \text{ je } a_n \geq 0$$

Poznámka Dospějeme-li při výpočtu limity k výrazu, který není definován v $\mathbb{R}^*$, pak jej nazveme **neurčitým výrazem**. Ne proto, že by nešel určit, ale proto, že v tomto okamžiku ještě nedokážeme říci,

zda limita existuje či neexistuje a v případě, že existuje, zda je vlastní nebo nevlastní. V tomto případě musíme člen a_n posloupnosti vhodným matematickým obratem nejprve upravit, abychom mohli použít vhodné věty a vzorce.

Výčet neurčitých výrazů:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$$

Příklad Vypočtěme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{2 - 4n^2}$.

Řešení

Užijeme Větu 10.4 a vzorec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{2 - 4n^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 3)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - 4n^2)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n} = \frac{2 \cdot \infty + 3}{2 - 4 \cdot \infty} = \left(\frac{\infty}{-\infty} \right)$$

Obrželi jsme neurčitý výraz, proto nejprve upravíme člen a_n .

a) Vydělíme čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou n ve jmenovateli.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{2 - 4n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2 + 3}{n^2}}{\frac{2 - 4n^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - 4} = \frac{2 + 0}{0 - 4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

b) Vytkneme nejvyšší mocninou n v čitateli a nejvyšší mocninou n ve jmenovateli.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{2 - 4n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - 4 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - 4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Příklad Vypočtěme $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + 5n - 7} - 2n$.

Řešení

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + 5n - 7} - 2n \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n - 7 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 5n - 7} + 2n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 7}{\sqrt{4n^2 + 5n - 7} + 2n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{7}{n}}{\sqrt{4 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2}} + 2} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Poznámka Vzorec pro n -tý člen jsme v předchozím příkladu upravili rozšířením a použitím vzorce $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$.

Pozor! Neurčité výrazy nejsou:

$$\frac{\text{konstanta}}{0} = \begin{cases} +\infty; \text{čitatel a jmenovatel mají stejná znaménka} \\ -\infty; \text{čitatel a jmenovatel mají opačná znaménka} \end{cases}$$

$$\frac{\text{konstanta}}{\infty} = 0$$

Příklad

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3} = \left[\frac{2}{\infty} \right] = 0$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-15)^{11}}{n} = \left[\frac{-15^{11}}{\infty} \right] = 0$
- 3) $\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{n^4}{\frac{1}{n}} = \left[\frac{\infty}{\rightarrow 0^+} \right] = +\infty$
- 4) $\lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{5}{\frac{1}{n}} = \left[\frac{5}{\rightarrow 0^+} \right] = +\infty$
- 5) $\lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{5}{-\frac{1}{n}} = \left[\frac{5}{\rightarrow 0^-} \right] = -\infty$

Vlastnosti konvergentních posloupností

Věta 10.5 Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Věta 10.6 (O součinu nulové a omezené posloupnosti)

Je-li $\lim a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, pak $\lim(a_n \cdot b_n) = 0$.

Příklad Vypočtěme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$.

Řešení Upravíme $\frac{\cos n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \cos n$.

Víme, že $\lim \cos n$ neexistuje, avšak pro každé n je $|\cos n| \leq 1$, což znamená, že posloupnost $\{\cos n\}$ je omezená.

Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Potom podle Věty 10.6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = \left(\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}_0 \cdot \underbrace{\cos n}_{\text{omezená posl.}} \right) = 0$$

Věta 10.7 (O limitě tří posloupností)

Mějme tři posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$.

Nechť

- 1) $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$2) \lim a_n = \lim b_n = a, a \in \mathbb{R}^*.$$

Potom existuje i $\lim c_n$ a platí $\lim c_n = a$.

Příklad Vypočtěme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sin n}{3n + 4}$.

Řešení Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $-1 \leq \sin n \leq 1$. Potřebujeme posloupnost $\left\{ \frac{2n + \sin n}{3n + 4} \right\}$ „sevrít“ mezi další dvě posloupnosti, proto provedeme „strategické“ úpravy nerovnosti $-1 \leq \sin n \leq 1$ tak, abychom „uvnitř“ nerovnosti získali $c_n = \frac{2n + \sin n}{3n + 4}$.

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin n \leq 1 \quad / +2n \\ 2n - 1 &\leq 2n + \sin n \leq 2n + 1 \quad / : (3n + 4) > 0 \\ \frac{2n - 1}{3n + 4} &\leq \frac{2n + \sin n}{3n + 4} \leq \frac{2n + 1}{3n + 4} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{3n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{3n + 4} = \frac{2}{3} \quad (6)$$

Z (5) a (6) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sin n}{3n + 4}$ existuje a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sin n}{3n + 4} = \frac{2}{3}$.

Poznámka Zadanou limitu můžeme vypočítat i užitím Vět 10.4 a 10.6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \sin n}{3n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n + 4} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{1}{3n + 4}}_0 \cdot \underbrace{\sin n}_{\text{omezená posl.}} \right) = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

Poznámka Všimněte si, že limita tvaru podílu, popř. součinu, může existovat i když některý z činitelů nemá limitu. (Viz výše uvedené příklady.)

Věta 10.8 Každá omezená a monotónní posloupnost je konvergentní (tj. má vlastní limitu).

Na základě této věty lze ukázat, že existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, kde $e \doteq 2,7182$.

Zapamatuj! Číslo e je Eulerovo číslo a je základem přirozených logaritmů.

Příklad Užitím přechodního vzorce vypočtěme limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$.

Řešení

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \\ &= e \cdot (1 + 0)^{-1} = e \end{aligned}$$

Lze odvodit i další vzorce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, resp. $-\infty$, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k$.

Příklad Vypočtěme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n}$.

Řešení

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3-5}{n+3}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-5}{n+3}\right)^n\right]^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-5}{n+3}\right)^{n+3-3}\right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-5}{n+3}\right)^{n+3}\right]^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-5}{n+3}\right)^{-6} = \\ &= (e^{-5})^2 \cdot (1+0)^{-6} = e^{-10} \cdot 1 = e^{-10} \end{aligned}$$

Věta 10.9 (O limitě vybrané posloupnosti)

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu a , $a \in \mathbb{R}^*$, pak každá posloupnost $\{a_{k_n}\}$ z ní vybraná má také limitu a , tj. $\lim a_{k_n} = \lim a_n = a$.

Větu lze užít dvojím způsobem:

1. Určení limity vybrané posloupnosti, známe-li limitu posloupnosti, z níž byla vybrána.

Příklad Určeme limitu posloupnosti $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$.

Řešení

$$\left\{\frac{1}{2n-1}\right\} = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\right\}$$

Je to posloupnost vybraná z posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, kde posloupnost indexů $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost lichých čísel.

Víme, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$.

Všimněte si, že např. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$ a také $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+49} = 0$, poněvadž posloupnosti $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ a $\left\{\frac{1}{n+49}\right\}$ jsou vybrané posloupnosti z posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

2. Důkaz neexistence limity.

Lze-li z posloupnosti $\{a_n\}$ vybrat alespoň 2 vybrané posloupnosti, jejichž limity jsou různé, pak posloupnost $\{a_n\}$ limitu nemá.

Příklad Určete $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$.

Řešení

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$

Vybereme posloupnost lichých členů $\{-1, -1, -1, \dots\}$, je to stacionární posloupnost, jejíž limita je -1 .

Vybereme posloupnost sudých členů $\{1, 1, 1, \dots\}$, je to stacionární posloupnost, jejíž limita je 1 .

Dle Věty 10.9 pak posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá limitu; $\lim (-1)^n$ neexistuje, posloupnost $\{(-1)^n\}$ je divergentní (osciluje).

Přehled limit význačných posloupností

$$\text{I. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{II. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \begin{cases} 0 & \text{pro } a = 0 \\ 1 & \text{pro } a > 0 \end{cases}$$

$$\text{III. } \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } |a| < 1 \\ 1 & \text{pro } a = 1 \\ +\infty & \text{pro } a > 1 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } a \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{IV. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\text{V. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\text{VI. } \lim_{n \rightarrow \infty} n^r = \begin{cases} +\infty & \text{pro } r > 0 \\ 1 & \text{pro } r = 0 \\ 0 & \text{pro } r < 0 \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}$$

$$\text{VII. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq a \leq 1 \\ +\infty & \text{pro } a > 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Výpočet limit posloupností

Příklad Určete limitu posloupnosti.

$$\text{a) } \lim (3n^3 + 2n^6 - 10^{10}) = 2\infty^3 + \infty^6 - 10^{10} = \infty + \infty = \infty$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim (5n - 7n^2 + 5) &= (\infty - \infty) = \lim \left[n^2 \left(\frac{5}{n} - 7 + \frac{5}{n^2} \right) \right] = \\ &= \lim n^2 \cdot \lim \left(\frac{5}{n} - 7 + \frac{5}{n^2} \right) = \infty \cdot (0 - 7 + 0) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim \frac{n^3 + 2n - 4}{3n^3 - n + 5} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim \frac{1 + \frac{2}{n^2} - \frac{4}{n^3}}{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \frac{1}{3}$$

$$d) \quad \lim \frac{2n^2 - 4n^3}{5n^6 - 7n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\frac{2}{n^4} - \frac{4}{n^3}}{5 - \frac{7}{n^4}} = \frac{0}{5} = 0$$

$$e) \quad \lim \frac{2 - 3n^3}{5n^2 + 5n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\frac{2}{n^2} - 3n}{5 + \frac{5}{n}} = \frac{0 - \infty}{5} = -\infty$$

$$f) \quad \lim \left[\frac{n^2 - 3n^3 + 4}{4n + 2n^3 + 15} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{15n}{n^2 - 4} \right) \right] =$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{n} - 3 + \frac{4}{n^3}}{\frac{4}{n^2} + 2 + \frac{15}{n^3}} \cdot \lim \left(2 - \frac{2}{n} + \frac{\frac{15}{n}}{1 - \frac{4}{n^2}} \right) = -\frac{3}{2}(2 - 0 + 0) = -3$$

$$g) \quad \lim \frac{\sqrt{9 + n^3 + 4n^4}}{\sqrt[3]{n^6 + 27}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\sqrt{\frac{9}{n^4} + \frac{1}{n} + 4}}{\sqrt[3]{1 + \frac{27}{n^6}}} = \frac{\sqrt{0 + 0 + 4}}{\sqrt[3]{1 + 0}} = 2$$

$$h) \quad \lim (\sqrt{n^2 + n} - n) = (\infty - \infty) = \lim \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$$

$$= \lim \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$i) \quad \lim \left[\frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \right] = (0 \cdot \infty) = \lim \left[\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{2} (1 + n) \right] =$$

$$= \lim \frac{1 + n}{2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\frac{1}{n} + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$j) \quad \lim \frac{(n+1)! - (n-1)!}{n!} = \lim \frac{(n+1)n(n-1)! - (n-1)!}{n(n-1)!} =$$

$$= \lim \frac{(n-1)! [n(n+1) - 1]}{n(n-1)!} = \lim \frac{n^2 + n - 1}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim \frac{n + 1 - \frac{1}{n}}{1} = \infty$$

$$\begin{aligned}
 \text{k) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{4^n - 9 \cdot 7^n} &= \left(\frac{\infty}{\infty - \infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^n}{7^n}}{\frac{4^n}{7^n} - 9 \frac{7^n}{7^n}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n}{\left(\frac{4}{7}\right)^n - 9} = \frac{0}{0 - 9} = 0 \\
 \text{l) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-5}{n+3}\right)^{n+5} &= (1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3-8}{n+3}\right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{n+3}\right)^{n+5} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{n+3}\right)^{n+3+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{n+3}\right)^{n+3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-8}{n+3}\right)^2 = \\
 &= e^{-8} \cdot (1+0)^2 = e^{-8} \cdot 1 = e^{-8}
 \end{aligned}$$

Σ

Limita posloupnosti je důležitým pojmem popisujícím chování posloupnosti. Informuje nás, co se děje se členy posloupnosti pokud n roste nade všechny meze, tj. $n \rightarrow \infty$. Mohou nastat tři případy: $a_n \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$, $a_n \rightarrow \pm\infty$ nebo $\lim a_n$ neexistuje. Věty o limitách využíváme při výpočtu limit posloupností.

1. Může mít posloupnost více než jednu limitu?
2. Má každá posloupnost limitu?
3. Ano či ne?
 - a) Geometrická posloupnost je vždy konvergentní.
 - b) Konvergentní posloupnost má vždy právě jednu limitu.
 - c) Grafem posloupnosti je spojitá křivka.
 - d) Posloupnost $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ je geometrická
 - e) Posloupnost $\{n^2\}$ je neomezená a divergentní.
 - f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$
4. Vypočtěte limitu posloupnosti.
 - a) $\lim (4 - n^2 + 3n^3)$ [∞]
 - b) $\lim \frac{n^3 - 5n^2 + 4}{6n^5 - 3n^2}$ [0]
 - c) $\lim \frac{7 - 15n^4}{3n^3 - 4n}$ [$-\infty$]
 - d) $\lim \frac{45n^2 + 15n - 3}{15n^2 - 7n + 5}$ [3]
 - e) $\lim \frac{\sqrt[3]{27n^3 + 6n^2 - 8}}{\sqrt{4n^2 + 1}}$ [$\frac{3}{2}$]

- f) $\lim (\sqrt[3]{n-5} - \sqrt[3]{n+5})$ [0]
- g) $\lim \frac{3(n+2)! - n!}{8(n+2)!}$ $\left[\frac{3}{8}\right]$
- h) $\lim \left[\frac{3}{n^2+4} (1+2+3+\dots+n) \right]$ $\left[\frac{3}{2}\right]$
- i) $\lim \frac{(-2)^n + 8^{n+3}}{\frac{1}{5} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 8^{n+2}}$ [-24]
- j) $\lim \left(\frac{n-7}{n+2} \right)^{n+8}$ $[e^{-9}]$



Literatura k tématu:

- [1] BRABEC, J., MARTAN, F. ROZENSKÝ, Z. *Matematická analýza I.* SNTL Praha, 1989. ISBN 04-013-89
- [2] DĚMIDOVÍČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy.* Fragment Praha, 2003. ISBN 80-7200-587-1
- [3] DOŠLÁ, Z., KUBEN, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. 2. vydání,* MU v Brně, 2012. ISBN 978-80-210-5814-9
- [4] MÁDROVÁ, V. *Matematická analýza I.* UP Olomouc, 2001. ISBN 80-244-0269-6
- [5] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R.* UP Olomouc, 2013. ISBN 978-80-244-3410-0
- [6] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza I.* UP Olomouc, 2002. ISBN 80-244-0464-8
- [7] POLANCO, C. *Differential and Integral Calculus - Theory and Cases.* Singapur, Bentham Science Publishers, 2020. ISBN 9789811465109

Kapitola 11

Číselné řady



Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozlišovat číselnou řadu a číselnou posloupnost,
- definovat součet řady,
- definovat, kdy číselná řada konverguje, resp. diverguje,
- identifikovat význačné řady.



Klíčová slova:

Číselná řada, součet řady, n -tý částečný součet, zbytek po n -tém členu, geometrická řada.

Náhled kapitoly

- V této kapitole budou nejprve zavedeny pojmy nekonečná číselná řada a její součet. Poté budou studovány vlastnosti číselných řad a nejvýznamnější typy řad. Důraz bude kladen na nutnou podmínku konvergence, pomocí níž lze dokázat divergence číselných řad.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je popsání pojmu číselná řada, studium vlastností číselných řad a určení divergence číselných řad pomocí nutné podmínky konvergence.

Odhad času potřebného ke studiu

- 2 hodiny

Definice číselné řady a jejího součtu

Teorie číselných řad navazuje na teorii číselných posloupností, proto při studiu řad uplatníme mnohé poznatky o posloupnostech.

Definice 11.1 Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel. **Nekonečnou číselnou řadou** (stručně jen **řadou**) nazveme symbol $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ($n \in \mathbb{N}$), který vznikne tak, že mezi každé dva sousední členy posloupnosti $\{a_n\}$ formálně vložíme znak $+$. Stručné označení řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nazýváme **členy** řady.

Číslo a_n nazýváme **n -tý člen** řady.

Součet prvních n členů $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ nazveme **n -tým částečným součtem** řady.

Rozdíl

$$R_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

je tzv. **zbytek po n -tém členu** řady.

Poznámka Místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ píšeme často stručně $\sum a_n$, indexy připisujeme jen v případě potřeby.

Příklad Z posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ utvoříme řadu $\sum \frac{1}{n}$.

Řešení

Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ a z ní utvořená řada $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

Vyvstává otázka: Jak sečíst nekonečně mnoho členů za konečně dlouhou dobu? Odpověď dává Definice 11.2.

Definice 11.2 Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Posloupnost $\{s_n\}$, kde

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

nazveme **posloupnost částečných součtů** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** a má součet s .

Píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** (k plus nekonečnu) a má součet $s = +\infty$.

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** (k minus nekonečnu) a má součet $s = -\infty$.

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ neexistuje, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (osciluje)** a nemá součet.

Poznámka U každé řady nastane právě jedna z výše uvedených možností, což vyplývá z vlastností limity posloupnosti. Symbolem $\sum a_n$ značíme nejen řadu, ale i její součet, pokud existuje.

Příklad Rozhodněte o konvergenci řady a pokud konverguje, stanovte její součet.

a) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

Sestavíme posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady.

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Při výpočtu limity $\{s_n\}$ využijeme vztahu $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje a její součet $s = 1$; nazveme ji „Užitečná“ řada.

b) Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots$.

$$\text{Součet jejích prvních } n \text{ členů je } s_n = \begin{cases} \frac{a(1-q^n)}{1-q} & \text{pro } q \neq 1 \\ na & \text{pro } q = 1 \end{cases}$$

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ pro $|q| < 1$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ pro $q > 1$, konverguje řada pouze v případě, že $|q| < 1$. Její součet je pak $s = \frac{a}{1-q}$.

c) Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

Pro vybrané částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ máme

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \\ s_4 &= s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}, \\ s_8 &= s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{3}{2}, \\ &\vdots \\ s_{2^n} &> 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že vybraná posloupnost $\{s_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a není shora omezená. Dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $s_{n+1} > s_n$. Z toho plyne, že $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, což znamená, že harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

d) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$

Protože $s_{2n-1} = -1$ a $s_{2n} = 0$, neexistuje limita posloupnosti částečných součtů, a tedy zadaná řada osciluje.

Přehled význačných řad

(1) Geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{konverguje pro } |q| < 1 \text{ a má součet } s = \frac{a}{1-q} \\ \text{diverguje pro } |q| \geq 1 \end{cases}$$

(2) „Užitečná“ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1; \text{ konverguje a má součet } s = 1$$

(3) Řada typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \begin{cases} \text{konverguje pro } k > 1 \\ \text{diverguje pro } k \leq 1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

(4) Harmonická řada (speciální případ řady (3))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverguje a má součet } s = +\infty$$

(5) Leibnizova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \text{ konverguje relativně (viz dále) a má součet } s = \ln 2$$

(6) Grandiho řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{ diverguje (osciluje) a nemá součet}$$

(7) Aritmetická řada

$\sum [a_1 + (n-1)d]$ konverguje pouze pro $a_1 = d = 0$, pak má součet $s=0$.
Jinak diverguje.

Poznámky

- 1) Geometrickou a harmonickou řadu často užíváme ve srovnávacím kritériu (viz dále) k porovnávání řad.
- 2) U geometrické řady dovedeme ihned rozhodnout podle jejího kvocientu q , zda konverguje či diverguje.
- 3) Konvergentní geometrická řada je jednou z mála řad, které umíme sečíst.
- 4) Stejný konvergenční charakter mají i řady, které vzniknou z výše uvedených řad dosazením $n + l, l \in \mathbb{R}$, za n .

Příklad Řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje $\Rightarrow$ řada $\sum \frac{1}{n+3}$ také diverguje.

Řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje $\Rightarrow$ řada $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ také konverguje.

Vlastnosti libovolných řad

Věta 11.1 (Nutná podmínka konvergence)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Poznámka Není-li tato podmínka splněna, tj. $\lim a_n \neq 0$ nebo neexistuje, pak řada nemůže konvergovat, a tedy diverguje.

Poznámka Věta 11.1 udává pouze nutnou, nikoliv postačující podmínku pro konvergenci řady.

Příklad U harmonické řady $\sum \frac{1}{n}$ je splněna nutná podmínka konvergence, tj. $\lim \frac{1}{n} = 0$ a přitom tato řada diverguje.

U „užitečné“ řady $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ je splněna nutná podmínka konvergence, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$ a tato řada skutečně konverguje.

Příklad Užitím nutné podmínky konvergence rozhodněte o divergenci řady.

$$\text{a) } \sum \frac{2n^2 - 4}{n^2 + 6} \quad \text{b) } \sum \frac{n^2 + 18}{3n^3}$$

Řešení

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 4}{n^2 + 6} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{6}{n^2}} = 2 \neq 0$$

Nutná podmínka konvergence není splněna, řada diverguje.

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 18}{3n^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{18}{n^3}}{3} = 0$$

O divergenci této řady nelze rozhodnout. (Řada může konvergovat, ale může i divergovat.)

Věta 11.2 *Konvergence nebo divergence řady se nezmění, když konečný počet jejích členů vynecháme, přidáme nebo zaměníme.*

Příklad Víme, že harmonická řada

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots \text{diverguje.}$$

Zaměníme-li prvních 100 členů např.

$$\underbrace{10 + \frac{1}{10} + 10 + \frac{1}{10} + \dots + 10 + \frac{1}{10}}_{100 \text{ členů}} + \frac{1}{101} + \dots,$$

pak tato řada také diverguje.

Obdobně: Řada $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{51 \cdot 52} + \frac{1}{52 \cdot 53} + \dots$ konverguje. Vynecháme-li prvních 50 členů této řady, pak řada $\frac{1}{51 \cdot 52} + \frac{1}{52 \cdot 53} + \dots$ také konverguje.

Věta 11.3 (O součtu a násobku řad)

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady a $k \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, pak řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ konvergují a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Poznámka Z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ neplyne ještě konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Např. $\sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n + (-1)^{n-1}] = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ sice konverguje, ale řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ oscilují.

Poznámka Konstantu můžeme vytknout před sumační znak.

Příklad Dokažte konvergenci řady a stanovte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^{n-1} - 3^n}{6^{n-1}}.$$

Řešení Upravíme n -tý člen dané řady.

$$\sum \frac{5 \cdot 4^{n-1} - 3^n}{6^{n-1}} = \sum \left[5 \left(\frac{4}{6} \right)^{n-1} - 3 \left(\frac{3}{6} \right)^{n-1} \right] = \sum \left[5 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right]$$

Řada $\sum \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots$ je geometrická řada, v níž $a = 1$ a $q = \frac{2}{3}$, $|q| < 1$, řada konverguje a má součet $s_1 = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Obdobně řada $\sum \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \dots$ je geometrická řada, v níž $a = 1$ a $q = \frac{1}{2}$, $|q| < 1$, řada konverguje a má součet $s_2 = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Podle Věty 11.3: $\sum \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$ konverguje $\Rightarrow \sum 5 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$ konverguje a má součet $5s_1 = 5 \cdot 3 = 15$

Dále $\sum \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ konverguje $\Rightarrow \sum 3 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ konverguje a má součet $3s_2 = 3 \cdot 2 = 6$

Závěrem podle Věty 11.3 obdržíme, že řada $\sum \frac{5 \cdot 4^{n-1} - 3^n}{6^{n-1}}$ konverguje a má součet $s = 5s_1 - 3s_2 = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 9$. Lze také psát $\sum \frac{5 \cdot 4^{n-1} - 3^n}{6^{n-1}} = 9$.



Nekonečná číselná řada vzniká součtem všech členů číselné posloupnosti. Číselné řady mohou konvergovat, divergovat nebo oscilovat. Jedním z mála typů řad, které dokážeme sečíst, jsou řady geometrické.



1. Jak je definována číselná řada?
2. Jaký je vztah mezi číselnou posloupností a řadou?
3. Formulujte nutnou podmínku pro konvergenci číselné řady.
4. Ověřte konvergenci geometrické řady a určete její součet

$$\text{a) } \sqrt{5} - 2 + (\sqrt{5} - 2)^2 + (\sqrt{5} - 2)^3 + \dots \quad \left[\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right]$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} \quad [\text{diverguje}]$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2n} \quad \left[\frac{1}{99} \right]$$

5. Ověřte, zda je splněna nutná podmínka konvergence řady.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} \quad [\text{podmínka je splněna}]$$

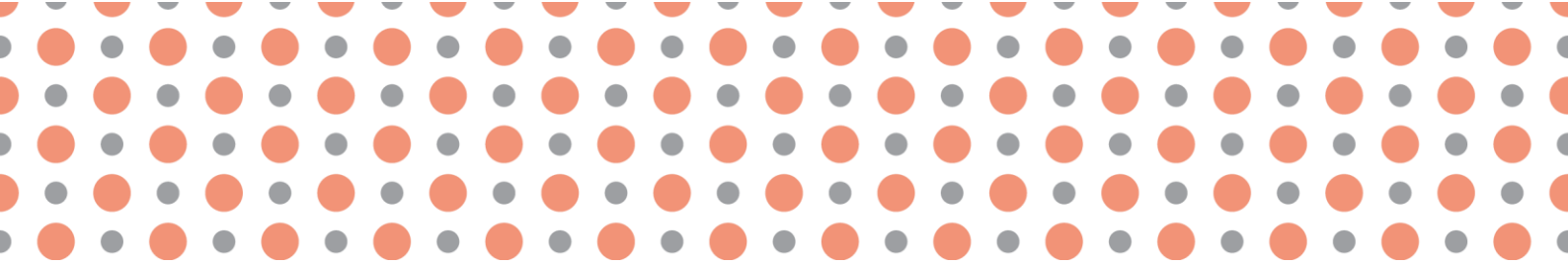
$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n+1} \quad [\text{podmínka není splněna; řada diverguje}]$$

$$\text{c) } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \quad [\text{podmínka je splněna}]$$



Literatura k tématu:

- [1] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87
- [2] DĚMIDOVÍČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. ISBN 80-7200-587-1
- [3] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-01-7
- [4] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza II*. UP Olomouc, 2005. ISBN 80-244-1005-2
- [5] POLANCO, C. *Differential and Integral Calculus - Theory and Cases*. Singapur, Bentham Science Publishers, 2020. ISBN 9789811465109



Kapitola 12

Kritéria konvergence číselných řad



Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozhodnout o konvergenci řady s nezápornými členy,
- rozhodnout o konvergenci alternujících řad,
- vyšetřit absolutní a relativní konvergenci řady.

Klíčová slova:

Relativní konvergence, absolutní konvergence, srovnávací kritérium, podílové kritérium, odmocninové kritérium, Raabeovo kritérium, Leibnizovo kritérium.

Náhled kapitoly

- V této kapitole budou studována kritéria, pomocí kterých lze stanovit, zda daná číselná řada konverguje nebo diverguje. Nejprve budou zmíněna kritéria pro řady s nezápornými nebo kladnými členy a poté bude v krátkosti řešena také konvergence obecnějších typů řad.

Cíle kapitoly

- Cílem kapitoly je zavedení kritérií vhodných pro stanovení konvergence (divergence) číselných řad a jejich ilustrování na konkrétních příkladech.

Odhad času potřebného ke studiu

- 3 hodiny

Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy

Stanovení součtu řady bývá zpravidla obtížný úkol. Vzhledem k tomu, že součet číselné řady lze snadno vypočítat pouze u řady geometrické a několika málo dalších řad, soustředíme se především na zkoumání, zda řada konverguje nebo diverguje. K tomu nám slouží kritéria. Kritéria udávají jednak postačující podmínky pro konvergenci a jednak postačující podmínky pro divergenci řady. Nemá-li postačující podmínka stanovená kritériem splněna, nedává kritérium výsledek a je nutné užít jiné kritérium. Kritéria totiž nejsou stejně silná, účinná.

Definice 12.1 Řada $\sum a_n$ se nazývá **řadou se nezápornými (kladnými) členy**, platí-li $a_n \geq 0$ ($a_n > 0$) pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Věta 12.1 (Srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy takové, že pro skoro všechna n platí $a_n \leq b_n$.

➤ *Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

➤ *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Poznámka Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z Věty 12.1 se nazývá **minorantou** řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je **majoranta** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Předchozí větu lze proto vyslovit takto: S každou majorantou konverguje i její minoranta a s každou minorantou diverguje její majoranta.

Příklad Rozhodněte o konvergenci řady $\sum \frac{1}{n2^n}$.

Řešení Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Protože majorantní řada $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konverguje (je to geometrická řada, jejíž kvocient je $q = \frac{1}{2}$) a obě uvažované řady mají nezáporné členy, konverguje také minoranta $\sum \frac{1}{n2^n}$.

Věta 12.2 (D'Alembertovo podílové kritérium a jeho limitní verze)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

1) Jestliže existují čísla $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (0,1)$, že pro všechna $n > n_0$ platí

➤ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

➤ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

2) Nechť existuje konečná nebo nevlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

➤ Je-li $L < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

➤ je-li $L > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,

➤ je-li $L = 1$, pak o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze prostřednictvím limitního podílového kritéria rozhodnout.

Příklad Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Řešení

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} n!}{(n+1)! 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

Řada podle Věty 12.2 konverguje.

Věta 12.3 (Cauchyovo odmocninové kritérium a jeho limitní verze)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

1) Jestliže existují čísla $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (0,1)$ tak, že

- pro všechna $n > n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
 - Pokud ale pro všechna $n > n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
- 2) Necht' existuje konečná nebo nevlastní limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.
- Je-li $L < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
 - je-li $L > 1$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,
 - je-li $L = 1$ nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ prostřednictvím limitního podílového kritéria rozhodnout.

Příklad Rozhodněte o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

Řešení: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^3})^3 = \frac{1}{2} \cdot 1^3 = \frac{1}{2} < 1$.

Řada konverguje.

Věta 12.4 (Raabeovo kritérium a jeho limitní verze)

Necht' $\sum a_n$ je řada s kladnými členy.

- 1) Jestliže existují čísla $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (0, 1)$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí
- $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq q > 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje,
 - $n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.
- 2) Necht' existuje konečná nebo nevlastní limita $\lim \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] = L$.
- Je-li $L > 1$, pak řada $\sum a_n$ konverguje,
 - je-li $L < 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Příklad Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady

$$\sum \frac{1}{n(2n+1)}.$$

Řešení Zkusíme užít limitní podílové kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)[2(n+1)+1]}}{\frac{1}{n(2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{2n^2 + 5n + 3} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} = 1$$

Podle limitního podílového kritéria nelze rozhodnout.

Zkusíme užít Raabeovo kritérium.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{2n^2 + 5n + 3}{2n^2 + n} - 1 \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \frac{2n^2 + 5n + 3 - 2n^2 - n}{2n^2 + n} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n}{2n^2 + n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 2 > 1. \end{aligned}$$

Řada konverguje.

Poznámky

- Příklad dokládá, že kritéria nejsou stejně „silná“.
- Zdůrazňujeme, že u limitních forem kritérií nelze rozhodnout o konvergenci či divergenci řady v případě, že $L = 1$.
- Výčet kritérií není úplný (Není např. uvedeno integrální kritérium, protože s integrálním počtem se seznámíte až v dalším semestru.)

Alternující řady

Dosud jsme se zabývali pouze řadami, které mají nezáporné členy. Nyní zaměříme pozornost na konvergenci řad, jejichž členy mění znaménko.

Definice 12.2 Řada $\sum a_n$ se nazývá **alternující**, platí-li pro její členy $\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka V alternující řadě se střídají znaménka pravidelně. Alternující řadou rozumíme řadu

$$\sum (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \text{ resp. řadu } \sum (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots.$$

Poznámka Symbol sgn je zkratka pro signum = znaménko.

Příklad Známá alternující řada je především Leibnizova řada.

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Pro alternující řady uvádíme pouze jediné kritérium.

Věta 12.5 (Leibnizovo kritérium)

Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Alternující řada $\sum (-1)^{n+1} a_n$ konverguje, právě když $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Přitom součet s řady splňuje nerovnosti

$$a_1 - a_2 < s < a_1.$$

Poznámka Podmínka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ je pro alternující řady nutnou a zároveň postačující podmínkou pro konvergenci.

Příklad Rozhodněte, zda Leibnizova řada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje.

Řešení

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Posloupnost členů je $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = \frac{1}{n} > 0$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, tzn., že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Jsou splněny všechny předpoklady Leibnizova kritéria, Leibnizova řada tedy konverguje.

Poznámka Leibnizova řada konverguje pouze relativně.

Absolutní konvergence řad

Definice 12.3 Řekneme, že řada $\sum a_n$ konverguje **absolutně** (je absolutně konvergentní), konverguje-li řada $\sum |a_n|$. Řekneme, že řada $\sum a_n$ konverguje **neabsolutně (relativně)**, jestliže řada $\sum a_n$ konverguje, ale řada $\sum |a_n|$ diverguje.

Poznámka $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \dots$$

Příklad Dle Leibnizova kritéria jsme zjistili, že řada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje a také jsme dříve dokázali, že řada $\sum \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ diverguje – je to harmonická řada.

Leibnizova řada tedy konverguje relativně (neabsolutně).

Věta 12.6 Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Poznámka Z absolutní konvergence plyne „obyčejná“ konvergence řady.

Poznámka Pro řady s nezápornými členy platí $\sum |a_n| = \sum a_n$ a proto pojem absolutní konvergence nepřináší pro tyto řady nic nového.

Příklad Vyšetřete, zda konverguje absolutně řada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$.

Řešení Řada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots$ je alternující řada.

Dle Leibnizova kritéria vyšetříme její konvergenci.

Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n^2} > 0$,

pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $n < n+1 \Rightarrow n^2 < (n+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$, což znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Jsou splněny všechny podmínky Leibnizova kritéria, tzn., že řada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Řada $\left| \sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$ je řada typu $\sum \frac{1}{n^k}$, kde $k = 2 > 1$, a tato řada konverguje.

Konverguje řada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ i řada $\sum \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \right|$, a tedy řada $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně.

Poznámka Vzhledem k tomu, že $\sum |a_n|$ je řada s nezápornými členy, dávají Věty 12.1 – 12.4 ihned kritéria pro absolutní konvergenci.

Věta 12.7 (Kritéria pro absolutní konvergenci řad)

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, právě když je splněna některá z následujících podmínek:

- Existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tak, že $|a_n| \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,
- existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,
- existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,
- existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$.

Příklad Zjistěte, zda konverguje absolutně řada $\sum (-1)^n \frac{15^n}{n!}$.

Řešení Vypočteme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 15^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(-1)^n 15^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -1 \frac{15^{n+1} n!}{15^n (n+1)!} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15}{n+1} = 0 = L \text{ a } L < 1$$

Daná řada konverguje absolutně.

Σ

Při vyšetřování konvergence řad s nezápornými členy užíváme srovnávací, podílové, odmocninové a Raabeovo kritérium, a to v nelimitní nebo limitní formě. O relativní konvergenci alternujících řady se rozhodne pomocí Leibnizova kritéria. Alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ konverguje, právě když posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel a limita $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Řady s libovolnými členy mohou konvergovat absolutně nebo relativně. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. O absolutní konvergenci rozhodujeme opět podle příslušných kritérií.

1. Zformulujte kritéria, podle kterých můžeme rozhodnout o konvergenci či divergenci řady s nezápornými členy.
2. Srovnávacím kritériem rozhodněte o konvergenci řady
 - a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n+\sqrt{n}}}$ [konverguje (srovnáme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$)]
 - b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ [diverguje (srovnáme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$)]
3. Rozhodněte o konvergenci řady pomocí limitního podílového kritéria
 - a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$ [konverguje]
 - b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$ [diverguje]
 - c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ [konverguje]
 - d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ [nelze rozhodnout]
4. Rozhodněte o konvergenci řady pomocí limitního odmocninového kritéria.
 - a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ [konverguje]
 - b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n(2n+1)}}$ [diverguje]
 - c) $2 + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \frac{2^4}{4^{10}} + \dots$ [diverguje]
 - d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(3+\frac{1}{n}\right)}$ [konverguje]
5. Jaký je vztah mezi relativní a absolutní konvergencí?

6. Rozhodněte o konvergenci alternující řady

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$ [diverguje]
b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ [konverguje absolutně]
c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [konverguje neabsolutně]

**Literatura k tématu:**

- [1] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87
[2] DĚMIDOVÍČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. ISBN 80-7200-587-1
[3] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-01-7
[4] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza II*. UP Olomouc, 2005. ISBN 80-244-1005-2
[5] POLANCO, C. *Differential and Integral Calculus - Theory and Cases*. Singapur, Bentham Science Publishers, 2020. ISBN 9789811465109

Seznam literatury a použitých zdrojů

- [1] BAUER, L., LIPOVSKÁ, H., MIKULÍK, M., MIKULÍK, V. *Matematika v ekonomii a ekonomice*. Grada, 2015. ISBN 978-80-247-4419-3
- [2] BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra*. 4. vydání. Matfyzpress Praha, 2010. ISBN 978-80-7378-135-4
- [3] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*. 2. vydání. Academia Praha, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9
- [4] BOHDALOVÁ, M., BOHDAL R. *Matematika nielen pre manažérov*. Univerzita Komenského v Bratislavě, 2022. ISBN 978-80-223-5392-2.
- [5] BRADLEY, T., PATTON, P. *Essential Mathematics for Economics and Business*, 2nd Edition. New York: J. Wiley, 2002. ISBN 04-708-4466-3
- [6] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87
- [7] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. ISBN 80-7200-587-1
- [8] DOŠLÁ, Z., KUBEN, J. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 2. vydání. MU v Brně, 2012. ISBN 978-80-210-5814-9
- [9] DVOŘÁKOVÁ, Ľ. *Lineární algebra 2*. 2. vydání. ČVUT Praha, 2020. ISBN 978-80-01-06721-5
- [10] HENDL, J. *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*. 3. vydání. Karolinum, 2022. ISBN 978-80-246-5400-3
- [11] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-01-7
- [12] KATRIŇÁK, T. *Algebra a teoretická aritmetika*. 4. vydání. Univerzita Komenského Bratislava, 2002. ISBN 80-223-1674-1
- [13] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. ISBN 80-86119-00-9
- [14] KOUŘILOVÁ P., PAVLAČKOVÁ, M. *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii*. UP Olomouc, 2013. ISBN 978-80-244-3317-2
- [15] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v R*. UP Olomouc, 2013. ISBN 978-80-244-3410-0
- [16] MAREŠ, J. *Algebra*. České vysoké učení technické Praha, 2014. ISBN 978-80-01-05445-1

- [17] MEZNÍK, I. *Základy matematiky pro ekonomii a management*. Akademické nakladatelství CERM, 2018. ISBN 978-80-214-5522-1
- [18] MOISES PENA-LEVANO, L. *Schaum's Outline of Mathematical Methods for Business, Economics and Finance*. 2nd ed., McGraw-Hill Education, 2021. ISBN 9781264266876
- [19] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza II*. UP Olomouc, 2005. ISBN 80-244-1005-2
- [20] MOUČKA, J., RÁDL, P. *Matematika pro studenty ekonomie*. 2., upravené a doplněné vydání. Grada, 2015. ISBN: 978-80-247-5406-2
- [21] MOUHAMMED, A. D. *Introductory Mathematical Economics*. Routledge, 2020. ISBN 978-07-656-0459-0.
- [22] NOVOTNÁ, J., TRCH, M. *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů*, 2. dopl. vydání. Univerzita Karlova Praha, 2000. ISBN 80-7290-007-2
- [23] O'LEARY, M. L. *Linear Algebra*. Wiley, 2021. ISBN 9781119437444
- [24] OLŠÁK, P. *Úvod do algebry, zejména lineární*, 2. přepracované vydání. České vysoké učení technické Praha, 2013. ISBN 978-80-01-05291-4
- [25] POLANCO, C. *Differential and Integral Calculus - Theory and Cases*. Singapur, Bentham Science Publishers, 2020. ISBN 9789811465109
- [26] PEREN, F. W. *Math for Business and Economics, Compendium of Essential Formulas*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2022. ISBN 978-36-626-3251-2
- [27] ROSSER, M. *Basic mathematics for economists*, 2nd Edition. London: Routledge, 2003. ISBN 02-034-2439-5
- [28] SIMON, C.P., BLUME, L.E. *Mathematics for Economists*. New York: W.W. Norton, 1994. ISBN 03-939-5733-0
- [29] ŠABO, M., 2018. *Matematika 1*. STU. ISBN 978-80-227-3421-9

Seznam obrázků

Obr. 1 Grafické znázornění intervalů	30
Obr. 2 Grafické znázornění δ -okolí bodu c	31
Obr. 3 Grafické znázornění redukovaného δ -okolí bodu c	31
Obr. 4 Část grafu posloupnosti $\{2n - 5\}$	94
Obr. 5 Vlastní limita posloupnosti - geometrický význam $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$	102
Obr. 6 Část grafu posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$	103
Obr. 7 Nevlastní limita posloupnosti – geometrický význam $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$	104
Obr. 8 Část grafu posloupnosti $\{(-1)^n\}$, jejíž limita neexistuje	105