

# Číselné řady: Teorie, praxe a paradoxy

## Matematika pro ekonomickou praxi

Jiří Fišer

Moravská vysoká škola Olomouc

20. listopadu 2025

- 1 Motivace a historie
- 2 Definice a základní pojmy
- 3 Geometrická řada a fraktály
- 4 Nutná podmínka konvergence
- 5 Harmonická řada
- 6 Kritéria konvergence
- 7 Aplikace v praxi

# Proč se učíme řady?

- **Historický kontext:** Řady vznikly z praktické potřeby počítat majetek, úrodu a dluhy.
- **Babylón (2000 př. n. l.):**
  - ▶ Bankéři řešili otázku: „*Kdy se zdvojnásobí dlužná částka?*“
  - ▶ Jde o předchůdce dnešní finanční matematiky (složené úročení).
- **Dnešní aplikace v ekonomii:**
  - ▶ Spoření a anuity (součet geometrické řady).
  - ▶ Oceňování nekonečných dluhopisů (perpetuity).
  - ▶ Diskontované cash-flow (DCF modely).

## Význam

Pochopení principu nekonečných řad je nutné pro správné chápání dlouhodobých finančních instrumentů.

# Paradox: Může být nekonečno konečné?

## Zénón z Eleje - Paradox Achilla a želvy

- Achilles (běžec) nikdy nedohoní želvu, protože musí nejdřív doběhnout tam, kde želva byla před chvílí.
- Vzniká nekonečně mnoho stále kratších časových úseků:  
 $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$

## Matematické rozuzlení:

- Intuitivně víme, že ji předběhne.
- Matematicky: **Součet nekonečného množství čísel může být konečné číslo.**
- Příklad:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$

# Posloupnost vs. Řada

Je třeba striktně rozlišovat:

## Posloupnost $(a_n)$

- Seznam čísel seřazených za sebou.
- Oddělovač: čárka.
- Příklad: 1, 2, 4, 8, 16, ...
- Zkoumáme  $n$ -tý člen  $(a_n)$ .

## Řada $\sum a_n$

- **Součet** členů posloupnosti.
- Oddělovač: plus.
- Příklad:  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$
- Zkoumáme součet  $(s)$ .

## Definice součtu řady

Součet řady definujeme jako limitu posloupnosti částečných součtů  $s_n$ :

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  může mít:

① **Konečný součet** (Konverguje)

▶  $\sum \frac{1}{2^n} = 1$ . V ekonomii žádoucí stav (rovnováha).

② **Nekonečný součet** (Diverguje k  $+\infty$  nebo  $-\infty$ )

▶  $1 + 2 + 3 + \dots = \infty$ .

③ **Nemá součet** (Osciluje)

▶  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  (součet skáče mezi 0 a 1).

# Geometrická řada

Pro ekonomii nejdůležitější typ řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots$$

kde  $q$  je **kvocient**.

**Podmínka konvergence:**

- Řada konverguje  $\iff |q| < 1$  (tj.  $q \in (-1; 1)$ ).

Vzorec pro součet (když  $|q| < 1$ )

$$s = \frac{a_1}{1 - q}$$

*Poznámka: Pokud  $|q| \geq 1$ , řada diverguje (nebo osciluje).*

# Aplikace: Kochova vložka (Matematický paradox)

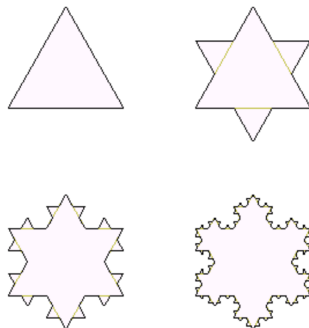
Představte si útvar, který vzniká postupným přidáváním trojúhelníků na strany předchozího útvaru.

## Obvod (Délka hranice):

- V každém kroku se délka zvětší o  $1/3$  (kvocient  $q = 4/3$ ).
- $q > 1 \implies$  Geometrická posloupnost **diverguje**.
- **Obvod je nekonečný!**

## Obsah (Plocha):

- Přidáváme stále menší trojúhelníčky.
- Ty tvoří geometrickou řadu s  $q = \frac{4}{9}$ .
- $q < 1 \implies$  Řada **konverguje**.
- **Obsah je konečný!**



**Paradox: Nekonečně dlouhá čára, která ohraničuje konečnou plochu.**

# Nutná podmínka konvergence (NPK)

## Věta (Nutná podmínka)

Pokud řada  $\sum a_n$  konverguje, pak musí platit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

**Logika:** Aby součet nepřerostl přes hlavu, musí být přičítaná čísla zanedbatelná.

## POZOR! (Častá chyba)

- $\lim a_n = 0$  **nestačí** k tomu, aby řada konvergovala!
- Je to podmínka *nutná*, nikoliv *postačující*.

# Harmonická řada: Klasický "chyták"

## Základní harmonická řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

- Splňuje NPK? **ANO** ( $\lim \frac{1}{n} = 0$ ).
- Konverguje? **NE**, součet je nekonečný (diverguje).
- Diverguje pomalu:  $s_{1000} = 7,485\dots$ ,  $s_{1000000} = 14,392\dots$ .

## Zobecněná harmonická řada:

$$\sum \frac{1}{n^k}$$

- Pokud  $k > 1$  (např.  $\frac{1}{n^2}$ ): **Konverguje** (členy klesají rychle).
- Pokud  $k \leq 1$  (např.  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ): **Diverguje** (klesají pomalu).

# Řady s nezápornými členy

## Definice

Řada  $\sum a_n$  má nezáporné členy, pokud  $a_n \geq 0$  pro všechna  $n$ .

## Důležitá vlastnost:

- Protože stále přičítáme kladná čísla (nebo nulu), součet  $s_n$  neustále roste (je neklesající).
- Taková řada buď konverguje (narazí na strop), nebo diverguje k  $+\infty$ . Nemůže oscilovat.

Pro tyto řady máme silná kritéria:

- Limitní podílové
- Limitní odmocninové
- Srovnávací (Limitní srovnávací)

# Limitní podílové kritérium (D'Alembertovo)

Vhodné, když člen  $a_n$  obsahuje **faktoriály** ( $n!$ ) nebo **exponenciály** ( $3^n$ ).  
Spočítáme limitu podílu sousedních členů:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

## Rozhodnutí:

- $L < 1 \implies$  **Konverguje**
- $L > 1 \implies$  **Diverguje**
- $L = 1 \implies$  Nevíme (zkusit jiné kritérium)

**Příklad:**  $\sum \frac{1}{n!}$ .

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \implies \text{Konv.}$$

# Limitní odmocninové kritérium (Cauchyho)

Vhodné, když je celý člen "**na  $n$ -tou**".

Spočítáme limitu  $n$ -té odmocniny:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

**Rozhodnutí:** (Stejně jako u podílového)

- $L < 1 \implies$  **Konverguje**
- $L > 1 \implies$  **Diverguje**
- $L = 1 \implies$  Nevíme

**Příklad:**  $\sum \left( \frac{2n}{3n+1} \right)^n$ .

$$L = \lim \sqrt[n]{\left( \frac{2n}{3n+1} \right)^n} = \lim \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1 \implies \text{Konv.}$$

# Limitní srovnávací kritérium (Metoda "selského rozumu")

*Jak vyřešit složité zlomky s polynomy?*

**Princip:** Pro obrovská  $n$  se řada chová stejně jako její "dominantní" členy. Konstanty a nižší mocniny zanedbáváme.

**Příklad 1:**  $\sum \frac{1}{3n+5}$

- Pro  $n \rightarrow \infty$  je 5 zanedbatelné.
- Chová se jako  $\sum \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{n}$ .
- Harmonická řada  $(1/n)$  diverguje  $\implies$  **Původní řada diverguje.**

**Příklad 2:**  $\sum \frac{1}{(4n-3)^2}$

- Zanedbáme -3.
- Chová se jako  $\sum \frac{1}{(4n)^2} = \frac{1}{16} \sum \frac{1}{n^2}$ .
- Řada typu  $1/n^2$  ( $k = 2 > 1$ ) konverguje  $\implies$  **Původní řada konverguje.**

# Spoření a finance (Anuity)

Řada finančních vzorců vychází z geometrické řady.

**Budoucí hodnota (Future Value)** Pravidelně spoříme částku  $A$  s úrokovou mírou  $r$ . Kolik naspoříme za  $n$  let?

- Pokud ukládáme vždy na konci období (**spoření polhůtní**):

$$FV = A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

- Pokud ukládáme vždy na začátku období (**spoření předlhůtní**):

$$FV = A \cdot (1+r) \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

**Věčná renta (Perpetuita)** Chci dostávat částku  $R$  navždy. Kolik musím vložit dnes ( $PV$ )? Jde o součet *nekonečné* geometrické řady:

$$PV = \frac{R}{r}$$

## Úloha:

Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li počátkem každého roku 500 Kč?  
Roční úroková míra je 4 %, úroky se připisují na konci roku.

## Řešení:

- Úroková sazba  $r = 0,04$ .
- Počet období  $n = 5$ .
- Využijeme (předlhuční) vzorec:
- Výpočet:

$$FV = A \cdot (1 + r) \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

$$\begin{aligned} FV &= 500 \cdot (1 + 0,04) \cdot \frac{(1 + 0,04)^5 - 1}{0,04} \\ &= 500 \cdot 1,04 \cdot \frac{1,04^5 - 1}{0,04} \doteq 2\,816,49 \text{ Kč} \end{aligned}$$

# Spoření a finance (Anuity)

## Úloha:

Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li počátkem každého roku 500 Kč?  
Roční úroková míra je 4 %, úroky se připisují na konci roku.

Zahrňte zdanění.

## Řešení:

- Úroková sazba  $r = 0,04$ .
- Počet období  $n = 5$ .
- Využijeme (předlhůtní, zdanění) vzorec:

$$FV = A \cdot (1 + r \cdot 0,85) \frac{(1 + r \cdot 0,85)^n - 1}{r}.$$

- Výpočet:

$$\begin{aligned} FV &= 500 \cdot (1 + 0,04 \cdot 0,85) \cdot \frac{(1 + 0,04 \cdot 0,85)^5 - 1}{0,04 \cdot 0,85} \\ &= 500 \cdot 1,034 \cdot \frac{1,034^5 - 1}{0,034} \doteq 2766,86 \text{ Kč} \end{aligned}$$

- ① **Geometrická řada:** Základ financí. Konverguje pro  $|q| < 1$ .
- ② **Kochova vložka:** Ukazuje, že konečná plocha může mít nekonečný obvod.
- ③ **Nutná podmínka:**  $\lim a_n \neq 0 \implies$  Divergence.
- ④ **Harmonická řada:**  $1/n$  diverguje,  $1/n^2$  konverguje.
- ⑤ **Kritéria:**
  - ▶ Máme faktoriál?  $\rightarrow$  Podílové.
  - ▶ Máme "vše na  $n$ -tou"?  $\rightarrow$  Odmocninové.
  - ▶ Máme ve jmenovateli polynom?  $\rightarrow$  Srovnávací (škrtneme nižší mocniny a konstanty).

**Děkuji za pozornost.**