

Matematika pro ekonomickou praxi

Jiří Fišer

6. listopadu 2025

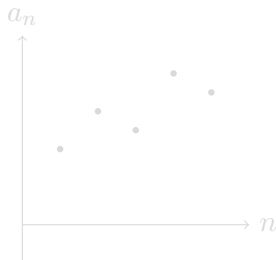
Definice posloupnosti

Posloupnost je zobrazení z množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel:

$$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Grafické znázornění:

- Na vodorovné ose: čísla $n \in \mathbb{N}$,
- Na svislé ose: hodnoty $a_n \in \mathbb{R}$.



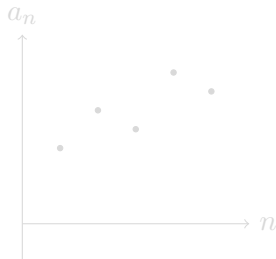
Definice posloupnosti

Posloupnost je zobrazení z množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel:

$$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Grafické znázornění:

- Na vodorovné ose: čísla $n \in \mathbb{N}$,
- Na svislé ose: hodnoty $a_n \in \mathbb{R}$.



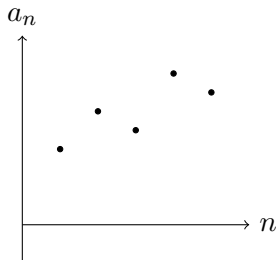
Definice posloupnosti

Posloupnost je zobrazení z množiny přirozených čísel do množiny reálných čísel:

$$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Grafické znázornění:

- Na vodorovné ose: čísla $n \in \mathbb{N}$,
- Na svislé ose: hodnoty $a_n \in \mathbb{R}$.



Způsoby zadání posloupnosti

Posloupnost lze zadat několika způsoby:

- 1 **Výpisem několika prvních členů**
- 2 **Rekurentně**
- 3 **Explicitním vzorcem pro n -tý člen**

1. Zadání výpisem prvních členů

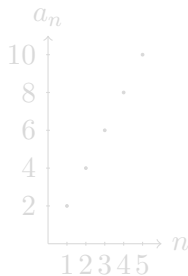
Příklad:

$$\{a_n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Pozorování:

- Z posloupnosti lze často odvodit pravidlo pro další členy.
- V tomto případě se členy zvyšují o 2.

Grafické znázornění:



1. Zadání výpisem prvních členů

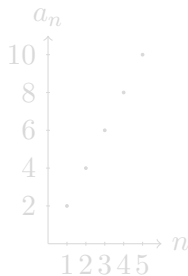
Příklad:

$$\{a_n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Pozorování:

- Z posloupnosti lze často odvodit pravidlo pro další členy.
- V tomto případě se členy zvyšují o 2.

Grafické znázornění:



1. Zadání výpisem prvních členů

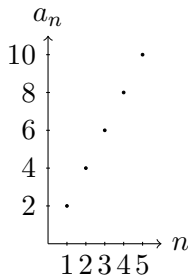
Příklad:

$$\{a_n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Pozorování:

- Z posloupnosti lze často odvodit pravidlo pro další členy.
- V tomto případě se členy zvyšují o 2.

Grafické znázornění:



2. Rekurentní zadání

Posloupnost je určena vztahem mezi členy:

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

a počátečním členem a_1 . **Příklad:**

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Výpočet prvních členů:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 5$$

$$\vdots$$

$$a_n = 1 + 2(n - 1)$$

2. Rekurentní zadání

Posloupnost je určena vztahem mezi členy:

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

a počátečním členem a_1 . **Příklad:**

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Výpočet prvních členů:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 5$$

$$\vdots$$

$$a_n = 1 + 2(n - 1)$$

2. Rekurentní zadání

Posloupnost je určena vztahem mezi členy:

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

a počátečním členem a_1 . **Příklad:**

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2$$

Výpočet prvních členů:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 5$$

$$\vdots$$

$$a_n = 1 + 2(n - 1)$$

3. Explicitní vzorec pro n -tý člen

Posloupnost je určena vzorcem:

$$a_n = f(n)$$

Příklad:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Výpočet prvních členů:

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

$\vdots$

3. Explicitní vzorec pro n -tý člen

Posloupnost je určena vzorcem:

$$a_n = f(n)$$

Příklad:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Výpočet prvních členů:

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

$\vdots$

3. Explicitní vzorec pro n -tý člen

Posloupnost je určena vzorcem:

$$a_n = f(n)$$

Příklad:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Výpočet prvních členů:

$$a_1 = \frac{1}{1} = 1$$

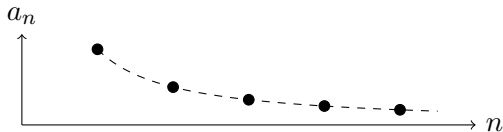
$$a_2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$a_3 = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

$\vdots$

3. Explicitní vzorec pro n -tý člen

Grafické znázornění:



Shrnutí způsobů zadání

Výhody a nevýhody jednotlivých způsobů:

- **Výpisem prvních členů:**

- ▶ Jednoduché, ale neumožňuje určit obecný člen přímo.

- **Rekurentně:**

- ▶ Umožňuje definovat složité posloupnosti, ale pro výpočet a_n je třeba znát všechny předchozí členy.

- **Explicitním vzorcem:**

- ▶ Přímý výpočet libovolného členu, vhodné pro analýzu chování při $n \rightarrow \infty$.

Základní vlastnosti posloupností

Každou posloupnost lze zkoumat z hlediska:

- 1 **Monotónnosti**
- 2 **Omezenosti**
- 3 **Chování pro $n \rightarrow \infty$**

Monotónnost posloupností

Definice: Posloupnost $\{a_n\}$ je:

- **Rostoucí**, pokud platí $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} > a_n$.
- **Klesající**, pokud platí $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} < a_n$.
- **Nemonotónní**, pokud není ani rostoucí, ani klesající.

Příklady monotónnosti

Příklad 1: Posloupnost $\{a_n\} = \{n\}$

- Každý další člen je o 1 větší než předchozí: $a_{n+1} = a_n + 1$.
- **Posloupnost je rostoucí.**

Příklad 2: Posloupnost $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

- Každý další člen je menší než předchozí: $b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$.
- **Posloupnost je klesající.**

Příklad 3: Posloupnost $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$

- Hodnoty střídají 1 a -1 .
- **Posloupnost je nemonotónní.**

Příklady monotónnosti

Příklad 1: Posloupnost $\{a_n\} = \{n\}$

- Každý další člen je o 1 větší než předchozí: $a_{n+1} = a_n + 1$.
- **Posloupnost je rostoucí.**

Příklad 2: Posloupnost $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

- Každý další člen je menší než předchozí: $b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$.
- **Posloupnost je klesající.**

Příklad 3: Posloupnost $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$

- Hodnoty střídají 1 a -1 .
- **Posloupnost je nemonotónní.**

Příklady monotónnosti

Příklad 1: Posloupnost $\{a_n\} = \{n\}$

- Každý další člen je o 1 větší než předchozí: $a_{n+1} = a_n + 1$.
- **Posloupnost je rostoucí.**

Příklad 2: Posloupnost $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

- Každý další člen je menší než předchozí: $b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$.
- **Posloupnost je klesající.**

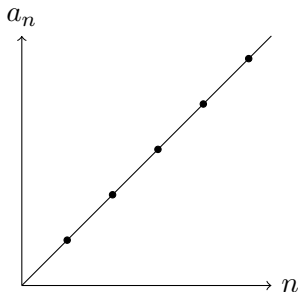
Příklad 3: Posloupnost $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$

- Hodnoty střídají 1 a -1 .
- **Posloupnost je nemonotónní.**

Grafické znázornění monotónnosti

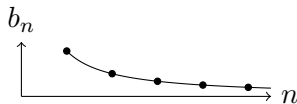
Rostoucí posloupnost

$$\{a_n\} = \{n\}:$$



Klesající posloupnost

$$\{b_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}:$$



Omezenost posloupností

Definice: Posloupnost $\{a_n\}$ je:

- **Omezená shora**, pokud existuje reálné číslo M , že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$.
- **Omezená zdola**, pokud existuje reálné číslo m , že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq m$.
- **Omezená**, pokud je omezená shora i zdola.

Příklady omezenosti

Příklad 1: Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

- $a_n \geq 0$ pro všechna n .
- **Omezená zdola nulou.**
- Největší hodnota je $a_1 = 1$, takže $\forall n : a_n \leq 1$.
- **Omezená shora jedničkou.**
- Posloupnost je **omezená**.

Příklad 2: Posloupnost $\{b_n\} = \{n\}$

- Hodnoty b_n neomezeně rostou.
- **Není omezená shora.**
- Je omezená zdola, např. $b_n \geq 1$ pro $n \geq 1$.
- Posloupnost je **omezená zdola**, ale **neomezená shora**.

Příklady omezenosti

Příklad 1: Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

- $a_n \geq 0$ pro všechna n .
- **Omezená zdola nulou.**
- Největší hodnota je $a_1 = 1$, takže $\forall n : a_n \leq 1$.
- **Omezená shora jedničkou.**
- Posloupnost je **omezená**.

Příklad 2: Posloupnost $\{b_n\} = \{n\}$

- Hodnoty b_n neomezeně rostou.
- **Není omezená shora.**
- Je omezená zdola, např. $b_n \geq 1$ pro $n \geq 1$.
- Posloupnost je **omezená zdola**, ale **neomezená shora**.

Chování posloupností pro $n \rightarrow \infty$

Konvergence a divergence:

- Posloupnost $\{a_n\}$ **konverguje** k číslu L , pokud:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

- Posloupnost $\{a_n\}$ **diverguje**, pokud limitu nemá nebo je $\pm\infty$.

Příklady chování pro $n \rightarrow \infty$

Příklad 1: Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- Posloupnost **konverguje** k 0.

Příklad 2: Posloupnost $\{b_n\} = \{n\}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$
- Posloupnost **diverguje** k $+\infty$.

Příklad 3: Posloupnost $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$

- Posloupnost střídá hodnoty 1 a -1 .
- Limitní hodnota neexistuje.
- Posloupnost **diverguje**.

Příklady chování pro $n \rightarrow \infty$

Příklad 1: Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- Posloupnost **konverguje** k 0.

Příklad 2: Posloupnost $\{b_n\} = \{n\}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$
- Posloupnost **diverguje** k $+\infty$.

Příklad 3: Posloupnost $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$

- Posloupnost střídá hodnoty 1 a -1 .
- Limitní hodnota neexistuje.
- Posloupnost **diverguje**.

Příklady chování pro $n \rightarrow \infty$

Příklad 1: Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- Posloupnost **konverguje** k 0.

Příklad 2: Posloupnost $\{b_n\} = \{n\}$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$
- Posloupnost **diverguje** k $+\infty$.

Příklad 3: Posloupnost $\{c_n\} = \{(-1)^n\}$

- Posloupnost střídá hodnoty 1 a -1 .
- Limitní hodnota neexistuje.
- Posloupnost **diverguje**.

Shrnutí základních vlastností

- **Monotónnost** určuje, zda posloupnost roste, klesá nebo se chová jinak.
- **Omezenost** určuje, zda hodnoty posloupnosti leží v nějakém intervalu.
- **Chování pro $n \rightarrow \infty$** informuje o limitním chování posloupnosti.

Poznámka: Tyto vlastnosti jsou důležité pro analýzu posloupností a jejich aplikace v matematice a ekonomii.

Shrnutí základních vlastností

- **Monotónnost** určuje, zda posloupnost roste, klesá nebo se chová jinak.
- **Omezenost** určuje, zda hodnoty posloupnosti leží v nějakém intervalu.
- **Chování pro $n \rightarrow \infty$** informuje o limitním chování posloupnosti.

Poznámka: Tyto vlastnosti jsou důležité pro analýzu posloupností a jejich aplikace v matematice a ekonomii.

Definice aritmetické posloupnosti

Aritmetická posloupnost (AP) je posloupnost, ve které je rozdíl mezi po sobě jdoucími členy konstantní.

- Rekurentní zadání:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

kde d je **diference** (konstantní rozdíl).

- Explicitní vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

- Součet prvních n členů:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Definice aritmetické posloupnosti

Aritmetická posloupnost (AP) je posloupnost, ve které je rozdíl mezi po sobě jdoucími členy konstantní.

- **Rekurentní zadání:**

$$a_{n+1} = a_n + d$$

kde d je **diference** (konstantní rozdíl).

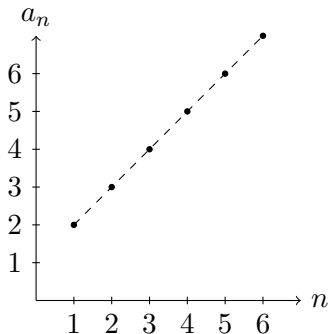
- **Explicitní vzorec pro n -tý člen:**

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

- **Součet prvních n členů:**

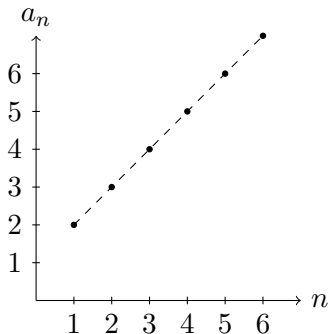
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Grafické znázornění aritmetické posloupnosti



Poznámka: Grafem aritmetické posloupnosti jsou body ležící na přímce.

Grafické znázornění aritmetické posloupnosti



Poznámka: Grafem aritmetické posloupnosti jsou body ležící na přímce.

Příklad aritmetické posloupnosti

Příklad: Mějme aritmetickou posloupnost s $a_1 = 5$ a $d = 3$.

- Výpočet prvních pěti členů:

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1 + d = 5 + 3 = 8$$

$$a_3 = a_2 + d = 8 + 3 = 11$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 3 = 14$$

$$a_5 = a_4 + d = 14 + 3 = 17$$

- Explicitní vzorec: $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 2$
- Součet prvních pěti členů:

$$S_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = \frac{5}{2}(5 + 17) = \frac{5}{2} \cdot 22 = 55$$

Příklad aritmetické posloupnosti

Příklad: Mějme aritmetickou posloupnost s $a_1 = 5$ a $d = 3$.

- **Výpočet prvních pěti členů:**

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = a_1 + d = 5 + 3 = 8$$

$$a_3 = a_2 + d = 8 + 3 = 11$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 3 = 14$$

$$a_5 = a_4 + d = 14 + 3 = 17$$

- **Explicitní vzorec:** $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 2$

- **Součet prvních pěti členů:**

$$S_5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_5) = \frac{5}{2}(5 + 17) = \frac{5}{2} \cdot 22 = 55$$

Aplikace: Rostoucí úspory

Úloha: Osoba si každý měsíc odkládá o 50 Kč více než předchozí měsíc. První měsíc uložila 200 Kč. Kolik celkem ušetří (bez úročení) za 12 měsíců?

- **Identifikace posloupnosti:**

- ▶ $a_1 = 200$ Kč

- ▶ $d = 50$ Kč

- **Výpočet součtu:** $S_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12})$

Nejprve spočítáme a_{12} :

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)d = 200 + 11 \cdot 50 = 200 + 550 = 750 \text{ Kč}$$

Pak součet: $S_{12} = \frac{12}{2}(200 + 750) = 6 \cdot 950 = 5\,700 \text{ Kč}$

Aplikace: Rostoucí úspory

Úloha: Osoba si každý měsíc odkládá o 50 Kč více než předchozí měsíc. První měsíc uložila 200 Kč. Kolik celkem ušetří (bez úročení) za 12 měsíců?

- **Identifikace posloupnosti:**

- ▶ $a_1 = 200$ Kč

- ▶ $d = 50$ Kč

- **Výpočet součtu:** $S_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12})$

Nejprve spočítáme a_{12} :

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)d = 200 + 11 \cdot 50 = 200 + 550 = 750 \text{ Kč}$$

Pak součet: $S_{12} = \frac{12}{2}(200 + 750) = 6 \cdot 950 = 5\,700 \text{ Kč}$

Aplikace: Rostoucí úspory

Úloha: Osoba si každý měsíc odkládá o 50 Kč více než předchozí měsíc. První měsíc uložila 200 Kč. Kolik celkem ušetří (bez úročení) za 12 měsíců?

- **Identifikace posloupnosti:**

- ▶ $a_1 = 200$ Kč

- ▶ $d = 50$ Kč

- **Výpočet součtu:** $S_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12})$

Nejprve spočítáme a_{12} :

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)d = 200 + 11 \cdot 50 = 200 + 550 = 750 \text{ Kč}$$

Pak součet: $S_{12} = \frac{12}{2}(200 + 750) = 6 \cdot 950 = 5\,700 \text{ Kč}$

Aplikace: Rostoucí úspory

Úloha: Osoba si každý měsíc odkládá o 50 Kč více než předchozí měsíc. První měsíc uložila 200 Kč. Kolik celkem ušetří (bez úročení) za 12 měsíců?

- **Identifikace posloupnosti:**

- ▶ $a_1 = 200$ Kč

- ▶ $d = 50$ Kč

- **Výpočet součtu:** $S_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12})$

Nejprve spočítáme a_{12} :

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)d = 200 + 11 \cdot 50 = 200 + 550 = 750 \text{ Kč}$$

Pak součet: $S_{12} = \frac{12}{2}(200 + 750) = 6 \cdot 950 = 5\,700 \text{ Kč}$

Definice geometrické posloupnosti

Geometrická posloupnost (GP) je posloupnost, ve které je podíl po sobě jdoucích členů konstantní.

- Rekurentní zadání:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

kde q je kvocient.

- Explicitní vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Součet prvních n členů (pro $q \neq 1$):

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Definice geometrické posloupnosti

Geometrická posloupnost (GP) je posloupnost, ve které je podíl po sobě jdoucích členů konstantní.

- **Rekurentní zadání:**

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

kde q je **kvocient**.

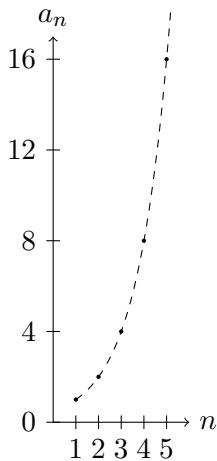
- **Explicitní vzorec pro n -tý člen:**

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- **Součet prvních n členů (pro $q \neq 1$):**

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Grafické znázornění geometrické posloupnosti



Příklad geometrické posloupnosti

Příklad: Mějme geometrickou posloupnost s $a_1 = 3$ a $q = 2$.

- Výpočet prvních pěti členů:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 12 \cdot 2 = 24$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = 24 \cdot 2 = 48$$

- Explicitní vzorec: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
- Součet prvních pěti členů:

$$S_5 = 3 \cdot \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 3 \cdot \frac{1 - 32}{-1} = 3 \cdot \frac{-31}{-1} = 93$$

Příklad geometrické posloupnosti

Příklad: Mějme geometrickou posloupnost s $a_1 = 3$ a $q = 2$.

- **Výpočet prvních pěti členů:**

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 12 \cdot 2 = 24$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = 24 \cdot 2 = 48$$

- **Explicitní vzorec:** $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

- **Součet prvních pěti členů:**

$$S_5 = 3 \cdot \frac{1 - 2^5}{1 - 2} = 3 \cdot \frac{1 - 32}{-1} = 3 \cdot \frac{-31}{-1} = 93$$

Aplikace: Úročení kapitálu

Úloha: Na účet vložíme 5 000 Kč s roční úrokovou sazbou 5%. Kolik budeme mít na účtu po 6 letech, pokud jsou úroky připisovány jednou ročně (na konci roku)?

- **Identifikace geometrické posloupnosti:**

- ▶ $a_1 = 5\,000$ Kč
- ▶ $q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$

- **Výpočet částky po 6 letech:**

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = 5\,000 \cdot 1,05^5 \approx 5\,000 \cdot 1,27628 \approx 6\,381,41 \text{ Kč}$$

- **Celkový úrok:**

$$\text{Úrok} = a_6 - a_1 = 6\,381,41 - 5\,000 = 1\,381,41 \text{ Kč}$$

Aplikace: Úročení kapitálu

Úloha: Na účet vložíme 5 000 Kč s roční úrokovou sazbou 5%. Kolik budeme mít na účtu po 6 letech, pokud jsou úroky připisovány jednou ročně (na konci roku)?

- **Identifikace geometrické posloupnosti:**

- ▶ $a_1 = 5\,000$ Kč
- ▶ $q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$

- **Výpočet částky po 6 letech:**

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = 5\,000 \cdot 1,05^5 \approx 5\,000 \cdot 1,27628 \approx 6\,381,41 \text{ Kč}$$

- **Celkový úrok:**

$$\text{Úrok} = a_6 - a_1 = 6\,381,41 - 5\,000 = 1\,381,41 \text{ Kč}$$

Složené úročení

Poznámka: Při častějším připisování úroků se používá složené úročení.

- Vzorec pro částku po n letech při k úročeních ročně:

$$a_n = a_1 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

kde:

- ▶ a_1 je počáteční vklad,
 - ▶ r je roční úroková sazba (v desetinném vyjádření),
 - ▶ k je počet úročení za rok,
 - ▶ n je počet let.
- **Příklad:** Při pololetním úročení ($k = 2$) s roční sazbou 4% ($r = 0,04$):
$$a_n = a_1 \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{2n} = a_1 \cdot 1,02^{2n}$$

Složené úročení

Poznámka: Při častějším připisování úroků se používá složené úročení.

- **Vzorec pro částku po n letech při k úročeních ročně:**

$$a_n = a_1 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

kde:

- ▶ a_1 je počáteční vklad,
 - ▶ r je roční úroková sazba (v desetinném vyjádření),
 - ▶ k je počet úročení za rok,
 - ▶ n je počet let.
- **Příklad:** Při pololetním úročení ($k = 2$) s roční sazbou 4% ($r = 0,04$):
$$a_n = a_1 \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{2n} = a_1 \cdot 1,02^{2n}$$

Aplikace: Pololetní úročení

Úloha: Vložíme 10 000 Kč na účet s roční úrokovou sazbou 4%, úroky jsou připisovány pololetně. Kolik bude na účtu po 3 letech?

● Parametry:

- ▶ $a_1 = 10\,000$ Kč
- ▶ $r = 0,04$
- ▶ $k = 2$
- ▶ Počet období: $n = 3 \text{ roky} \times 2 = 6$

● Výpočet:

$$a_6 = 10\,000 \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^6 = 10\,000 \cdot 1,02^6 \approx 11\,261,62 \text{ Kč}$$

● Celkový úrok:

$$\text{Úrok} = a_6 - a_1 = 11\,261,62 - 10\,000 = 1\,261,62 \text{ Kč}$$

Aplikace: Pololetní úročení

Úloha: Vložíme 10 000 Kč na účet s roční úrokovou sazbou 4%, úroky jsou připisovány pololetně. Kolik bude na účtu po 3 letech?

● Parametry:

- ▶ $a_1 = 10\,000$ Kč
- ▶ $r = 0,04$
- ▶ $k = 2$
- ▶ Počet období: $n = 3 \text{ roky} \times 2 = 6$

● Výpočet:

$$a_6 = 10\,000 \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^6 = 10\,000 \cdot 1,02^6 \approx 11\,261,62 \text{ Kč}$$

● Celkový úrok:

$$\text{Úrok} = a_6 - a_1 = 11\,261,62 - 10\,000 = 1\,261,62 \text{ Kč}$$

- **Aritmetická posloupnost:**

- ▶ Konstantní diference d
- ▶ Lineární růst nebo pokles

- **Geometrická posloupnost:**

- ▶ Konstantní kvocient q
- ▶ Exponenciální růst nebo pokles

- **Aplikace v praxi:**

- ▶ Finanční matematika (úroky, investice)
- ▶ Ekonomické modely (růst populace, inflace)

Daňové zatížení úroků

Zdanění úroků ovlivňuje konečný zůstatek na účtu:

- **Hrubý úrok** je úrok před zdaněním.
- **Čistý úrok** je úrok po odečtení daně.

$$\text{Čistý úrok} = \text{Hrubý úrok} \times (1 - \text{sazba daně})$$

- V České republice je sazba daně z úroků **15%**.

Daňové zatížení úroků

Zdanění úroků ovlivňuje konečný zůstatek na účtu:

- **Hrubý úrok** je úrok před zdaněním.
- **Čistý úrok** je úrok po odečtení daně.

$$\text{Čistý úrok} = \text{Hrubý úrok} \times (1 - \text{sazba daně})$$

- V České republice je sazba daně z úroků **15%**.

Příklad: Vliv daně na úročení

Navážeme na poslední příklad z předchozí kapitoly:

Připomenutí předchozího příkladu

Vložíme 10 000 Kč na účet s roční úrokovou sazbou 4%, úroky jsou připisovány pololetně. Po 3 letech máme na účtu:

$$a_n = 10\,000 \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{2 \times 3} \approx 11\,261,62 \text{ Kč}$$

Otázka: Jak se změní zůstatek, pokud je úrok daněn sazbou 15%?

Příklad: Vliv daně na úročení

Navážeme na poslední příklad z předchozí kapitoly:

Připomenutí předchozího příkladu

Vložíme 10 000 Kč na účet s roční úrokovou sazbou 4%, úroky jsou připisovány pololetně. Po 3 letech máme na účtu:

$$a_n = 10\,000 \left(1 + \frac{0,04}{2}\right)^{2 \times 3} \approx 11\,261,62 \text{ Kč}$$

Otázka: Jak se změní zůstatek, pokud je úrok daněn sazbou 15%?

Řešení příkladu s daní

Postup:

- 1 Spočítáme úroky za každé období a zdaníme je.
- 2 Připisujeme zdaněné úroky k jistině.

Výpočet:

- Úroková sazba na období: $i = \frac{0,04}{2} = 0,02$
- Počet období: $kn = 6$

Výpočet zůstatku po 6 obdobích:

$$a_n = a_1 (1 + i \times (1 - 0,15))^{kn} = 10\,000 (1 + 0,02 \times 0,85)^6$$

$$a_n = 10\,000 (1 + 0,017)^6 = 10\,000 \times 1,017^6 \approx 10\,000 \times 1,107 \approx 11\,070 \text{ Kč}$$

Řešení příkladu s daní

Postup:

- 1 Spočítáme úroky za každé období a zdaníme je.
- 2 Připisujeme zdaněné úroky k jistině.

Výpočet:

- Úroková sazba na období: $i = \frac{0,04}{2} = 0,02$
- Počet období: $kn = 6$

Výpočet zůstatku po 6 obdobích:

$$a_n = a_1 (1 + i \times (1 - 0,15))^{kn} = 10\,000 (1 + 0,02 \times 0,85)^6$$

$$a_n = 10\,000 (1 + 0,017)^6 = 10\,000 \times 1,017^6 \approx 10\,000 \times 1,107 \approx 11\,070 \text{ Kč}$$

Řešení příkladu s daní

Postup:

- 1 Spočítáme úroky za každé období a zdaníme je.
- 2 Připisujeme zdaněné úroky k jistině.

Výpočet:

- Úroková sazba na období: $i = \frac{0,04}{2} = 0,02$
- Počet období: $kn = 6$

Výpočet zůstatku po 6 obdobích:

$$a_n = a_1 (1 + i \times (1 - 0,15))^{kn} = 10\,000 (1 + 0,02 \times 0,85)^6$$

$$a_n = 10\,000 (1 + 0,017)^6 = 10\,000 \times 1,017^6 \approx 10\,000 \times 1,107 \approx 11\,070 \text{ Kč}$$

Výsledek a srovnání

Zůstatek po zdanění: 11 070 Kč **Rozdíl oproti nezdaněnému úroku:**

$$11\,261,62 \text{ Kč} - 11\,070 \text{ Kč} = 191,62 \text{ Kč}$$

Závěr: Daň z úroků snížila konečný zůstatek o 191,62 Kč.

Výsledek a srovnání

Zůstatek po zdanění: 11 070 Kč **Rozdíl oproti nezdaněnému úroku:**

$$11\,261,62 \text{ Kč} - 11\,070 \text{ Kč} = 191,62 \text{ Kč}$$

Závěr: Daň z úroků snížila konečný zůstatek o 191,62 Kč.

Výsledek a srovnání

Zůstatek po zdanění: 11 070 Kč **Rozdíl oproti nezdaněnému úroku:**

$$11\,261,62 \text{ Kč} - 11\,070 \text{ Kč} = 191,62 \text{ Kč}$$

Závěr: Daň z úroků snížila konečný zůstatek o 191,62 Kč.

Výpočet počátečního vkladu

Cíl: Chceme zjistit, kolik musíme dnes vložit, abychom po n letech měli požadovanou částku. **Využití geometrické posloupnosti:**

- Použijeme vzorec:

$$a_n = a_1 \cdot q^n$$

- Přeskládáme rovnici pro výpočet a_1 :

$$a_1 = \frac{a_n}{q^n}$$

Kde:

- a_n je cílová částka,
- $q = 1 + \text{úroková sazba}$.

Výpočet počátečního vkladu

Cíl: Chceme zjistit, kolik musíme dnes vložit, abychom po n letech měli požadovanou částku. **Využití geometrické posloupnosti:**

- Použijeme vzorec:

$$a_n = a_1 \cdot q^n$$

- Přeskládáme rovnici pro výpočet a_1 :

$$a_1 = \frac{a_n}{q^n}$$

Kde:

- a_n je cílová částka,
- $q = 1 + \text{úroková sazba}$.

Výpočet počátečního vkladu

Cíl: Chceme zjistit, kolik musíme dnes vložit, abychom po n letech měli požadovanou částku. **Využití geometrické posloupnosti:**

- Použijeme vzorec:

$$a_n = a_1 \cdot q^n$$

- Přeskládáme rovnici pro výpočet a_1 :

$$a_1 = \frac{a_n}{q^n}$$

Kde:

- a_n je cílová částka,
- $q = 1 + \text{úroková sazba}$.

Příklad: Výpočet počátečního vkladu

Úloha: Kolik musíme dnes vložit na účet s roční úrokovou sazbou 5%, abychom po 5 letech měli 20 000 Kč? **Řešení:**

- Úroková sazba: $r = 0,05$
- Kvocient: $q = 1 + r = 1,05$
- Cílová částka: $a_n = 20\,000$ Kč
- Počet let: $n = 5$

Výpočet počátečního vkladu:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^n} = \frac{20\,000}{1,05^5} \approx \frac{20\,000}{1,27628} \approx 15\,674,12 \text{ Kč}$$

Příklad: Výpočet počátečního vkladu

Úloha: Kolik musíme dnes vložit na účet s roční úrokovou sazbou 5%, abychom po 5 letech měli 20 000 Kč? **Řešení:**

- Úroková sazba: $r = 0,05$
- Kvocient: $q = 1 + r = 1,05$
- Cílová částka: $a_n = 20\,000$ Kč
- Počet let: $n = 5$

Výpočet počátečního vkladu:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^n} = \frac{20\,000}{1,05^5} \approx \frac{20\,000}{1,27628} \approx 15\,674,12 \text{ Kč}$$

Příklad: Výpočet počátečního vkladu

Úloha: Kolik musíme dnes vložit na účet s roční úrokovou sazbou 5%, abychom po 5 letech měli 20 000 Kč? **Řešení:**

- Úroková sazba: $r = 0,05$
- Kvocient: $q = 1 + r = 1,05$
- Cílová částka: $a_n = 20\,000$ Kč
- Počet let: $n = 5$

Výpočet počátečního vkladu:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^n} = \frac{20\,000}{1,05^5} \approx \frac{20\,000}{1,27628} \approx 15\,674,12 \text{ Kč}$$

Ověření výsledku

Kontrola:

$$a_n = a_1 \cdot q^n = 15\,674,12 \times 1,05^5 \approx 15\,674,12 \times 1,27628 \approx 20\,000 \text{ Kč}$$

Závěr: Musíme dnes vložit přibližně 15 674,12 Kč, abychom za 5 let měli 20 000 Kč.

Ověření výsledku

Kontrola:

$$a_n = a_1 \cdot q^n = 15\,674,12 \times 1,05^5 \approx 15\,674,12 \times 1,27628 \approx 20\,000 \text{ Kč}$$

Závěr: Musíme dnes vložit přibližně 15 674,12 Kč, abychom za 5 let měli 20 000 Kč.

Shrnutí kapitoly

- **Daňové zatížení úroků** snižuje konečný zůstatek na účtu.
- **Výpočet počátečního vkladu** umožňuje plánovat finanční cíle.

Důležité vzorce:

- Konečný zůstatek s úročením:

$$a_n = a_1 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

- Počáteční vklad pro cílovou částku:

$$a_1 = \frac{a_n}{\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}}$$

- Úprava úrokové sazby po zdanění:

$$i_{\text{ef}} = i \times (1 - \text{sazba daně})$$

Shrnutí kapitoly

- **Daňové zatížení úroků** snižuje konečný zůstatek na účtu.
- **Výpočet počátečního vkladu** umožňuje plánovat finanční cíle.

Důležité vzorce:

- Konečný zůstatek s úročením:

$$a_n = a_1 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

- Počáteční vklad pro cílovou částku:

$$a_1 = \frac{a_n}{\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}}$$

- Úprava úrokové sazby po zdanění:

$$i_{\text{ef}} = i \times (1 - \text{sazba daně})$$