

Matematika pro ekonomickou praxi

Jiří Fišer

23. října 2025

- V dnešní přednášce se vrátíme k soustavám lineárních rovnic.
- Již známe obecnou (Gaussovu) metodu jejich řešení.
- Dnes se zaměříme na soustavy n rovnic o n neznámých,

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

se (čtvercovou) maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

o plné hodnosti n .

- Z Frobeniový věty víme, že v tomto případě, kdy

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) = n,$$

máme zajištěnu existenci právě jednoho řešení

$$(x_1, \dots, x_n).$$

- Ukážeme si dva nové přístupy, jak toto řešení získat:
 - 1) pomocí Cramerova pravidla, kdy jsou jednotlivé složky řešení vyjádřeny jako podíly dvou determinantů,
 - 2) pomocí inverzních matic (to ale až na příští přednášce).

- **Determinant:** Každé (pouze) **čtvercové** matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

typu (n, n) lze přiřadit jisté číslo, kterému říkáme determinant matice $\mathbf{A}$ a **značíme** $\det \mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$ nebo i přímo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- **Subdeterminant** prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$:
 - ▶ je determinant matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$
 - ★ vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.
 - ▶ Značíme $\mathbf{A}_{ij}^*$.

Subdeterminantem prvku 3 v matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

je determinant

$$B_{22}^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

(vynechali jsme druhý řádek a druhý sloupec).

- **Doplňěk** prvku a_{ij} v matici **A**:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*.$$

Doplňkem prvku 3 v matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

je

$$B_{22} = (-1)^{2+2} B_{22}^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu

- **Křížové pravidlo** pro výpočet determinantů matic typu $(2, 2)$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- $\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 3 = 40 - 30 = 10$

- $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$

Výpočet determinantu

- **Sarrusovo pravidlo** pro výpočet determinantů matic typu (3, 3):

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.$$

Pomůcka:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = +aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 2$$
$$= 3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 18 = -15$$

Výpočet determinantu

- **Laplaceova věta** pro výpočet determinantů vyšších řádů:

Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (n, n) .

Potom platí vzorec pro tzv.

- ▶ rozvinutí determinantu podle prvků i -tého řádku

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

- ▶ rozvinutí determinantu podle prvků j -tého sloupce

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Úloha

Pomocí rozvinutí podle prvků druhého řádku vypočtěte

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \color{red}{2} & \color{green}{1} & \color{blue}{0} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= \color{red}{2}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \color{green}{1}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \color{blue}{0}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2(-1) + 1(-2) + 0 = 0. \end{aligned}$$



Úloha

Pomocí rozvinutí podle prvků třetího sloupce vypočtete

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \textcolor{red}{1} \\ 2 & 1 & \textcolor{green}{0} \\ 1 & -1 & \textcolor{blue}{-1} \end{vmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= \textcolor{red}{1}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \textcolor{green}{0}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \textcolor{blue}{1}(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(-3) + 0 - 1(-3) = 0. \end{aligned}$$



Vlastnosti determinantu

- Jestliže k některému řádku (sloupci) matice přičteme lineární kombinaci zbývajících řádků (sloupců), potom se hodnota determinantu nezmění.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

(Od třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního řádku.)

Vlastnosti determinantu

- Jestliže některý řádek (sloupec) je lineární kombinací zbývajících řádků (sloupců), potom je hodnota determinantu nula.
 - ▶ Speciální případy: nulový řádek (sloupec), dva stejné řádky (sloupce).

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

(První řádek je trojnásobkem druhého.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(Třetí řádek je nulový.)

Vlastnosti determinantu

- Vynásobíme-li některý řádek (sloupec) reálným číslem α , determinant výsledné matice bude α -násobkem determinantu původní matice.

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

(První matice má oproti druhé trojnásobný první řádek.)

Vlastnosti determinantu

- Vyměníme-li v matici $\mathbf{A}$ dva řádky (sloupce) a označíme novou matici písmenem $\mathbf{B}$, potom platí:

$$\det \mathbf{B} = - \det \mathbf{A}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Postup při výpočtu determinantu

- Pomocí výše uvedených úprav se snažíme upravit determinant matice typu (n, n) tak, aby měl v některém řádku (sloupci) co nejvíce nul.
- Pokud jsme nedošli k samým nulám (nulový determinant), tak podle tohoto řádku (sloupce) provedeme rozvinutí determinantu, čímž se sníží o jedničku jeho rozměr.
- Tento postup opakujeme tak dlouho, až dojdeme k determinantům matic typu $(3, 3)$ (při použití Sarrusova pravidla), nebo $(2, 2)$, když chceme použít až křížové pravidlo.
- (Ve vhodném případě můžeme použít i převod na horní $\triangle$ matici.)

Vypočteme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{1)}{=} 0 + 0 + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{2)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Popis úprav:

1) Rozvinutí podle druhého sloupce.

2) 1.ř.–3.ř.

Vypočteme

$$\begin{aligned} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} &\stackrel{3)}{=} - \left(0 + 0 + 0 + 4(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \right) \\ &= 4 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{4)}{=} 4 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & \boxed{1} & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Popis úprav:

3) Rozvinutí podle prvního řádku.

4) 1.ř. – 2·2.ř.

$$\begin{aligned}
 4 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & \boxed{1} & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} &\stackrel{5)}{=} 4 \left(0 + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \right) \\
 &= 4 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{6)}{=} 4(9 + 10) = 76.
 \end{aligned}$$

Popis úprav:

5) Rozvinutí podle druhého sloupce.

6) Křížové pravidlo.

Determinant horní trojúhelníkové matice

Horní $\triangle$ matice

Matice, která má pod hlavní diagonálou samé nuly.

Determinant horní $\triangle$ matice $\mathbf{A}_\triangle$

$\det \mathbf{A}_\triangle = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ (součin prvků na hlavní diagonále).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2 = -6$$

Výpočet determinantu pomocí převodu na horní Δ tvar

- Postup podobný převodu na horní stupňovitou matici.
- **Pozor!** Některé úpravy by nám mohly změnit hodnotu determinantu (viz vlastnosti determinantu):
 - ▶ Přičtení násobku řádku k jinému řádku (sloupce k jinému sloupci) hodnotu nemění.
 - ▶ Například zdvojnásobení řádku zdvojnásobí i hodnotu determinantu. Pro zachování rovnosti je třeba determinant nové matice vydělit dvěma.
 - ▶ Přehození dvou řádků (sloupců) změní znaménko determinantu.

Determinant horní trojúhelníkové matice

1) Příklad převodu na horní $\triangle$ matici (hodnost = 3 $\Rightarrow$ det $\neq$ 0):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{1.ř./3}}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{2.ř.-2}\cdot\text{1.ř., 3.ř.}+\text{1.ř.}}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{3.ř.-2.ř.}}{=} 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{horní } \triangle \text{ matice}}{=} 3(1 \cdot 1 \cdot 1) = 3$$

2) Příklad převodu na horní $\triangle$ matici (hodnost = 2 < 3 $\Rightarrow$ det = 0):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Cramerovo pravidlo

Nechť je dána soustava n rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}$$

Jestliže pro matici (této) soustavy $\mathbf{A} = (a_{ij})$ platí $\det \mathbf{A} \neq 0$, pak daná soustava má právě jedno řešení $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, přičemž platí:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad \text{pro každé } i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

kde A_i je matice, která vznikne z matice A tak, že i -tý sloupec v matici A nahradíme sloupцем pravých stran a ostatní sloupce ponecháme beze změny.

Úloha

Užitím Cramerova pravidla vyřešte soustavu

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3, \\2x_1 + x_3 &= 7, \\x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7.\end{aligned}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad \det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 12.$$

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{12}{4} = 3.$$

Řešení soustavy je vektor $(2, -1, 3)$.

Úloha

Užitím Cramerova pravidla vyřešte soustavu

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2. \end{array}$$

[Řešení $(-2, 3, 2)$]

Úloha

Užitím Cramerova pravidla vyřešte soustavu

$$\begin{array}{lcl} \text{a)} & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 0, \\ & 3x_1 + x_3 - x_4 & = 0, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 0, \\ & x_2 + 2x_4 & = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{b)} & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 & = 1, \\ & 3x_1 + x_3 - x_4 & = 2, \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 1, \\ & x_2 + 2x_4 & = 2. \end{array}$$

Úlohy a) a b) se liší pouze pravými stranami, a tak mají shodnou matici soustavy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro další řešení bude rozhodující, zda determinant matice $\mathbf{A}$ je nenulový.

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot (6 + 1) = -7 \neq 0.\end{aligned}$$

V obou případech tedy půjde použít Cramerovo pravidlo.

ad a)

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ neboť } A_1 \text{ obsahuje nulový sloupec}$$

(viz Vlastnosti determinantů).

Stejně to dopadne i pro matice A_2 , A_3 a A_4 .

Tudíž máme

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{0}{-7} = 0.$$

Jediné řešení je tedy $(0, 0, 0, 0)$.

ad b)

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A}_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\&= -1 \left(-1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\&= - \left(-1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \\&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\&= 1(2 - 3) + 2(-6 - 6) - 3(-3 - 2) = -1 - 24 + 15 = -10.\end{aligned}$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \dots = 16, \quad \det \mathbf{A}_3 = \dots = 1, \quad \det \mathbf{A}_4 = \dots = -15.$$

Složky jediného řešení (x_1, x_2, x_3, x_4) jsou tedy

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det A} = \frac{-10}{-7} = \frac{10}{7},$$

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det A} = \frac{16}{-7} = -\frac{16}{7},$$

$$x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det A} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7},$$

$$x_4 = \frac{\det \mathbf{A}_4}{\det A} = \frac{-15}{-7} = \frac{15}{7}.$$

Soustava má jediné řešení $\left(\frac{10}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{15}{7}\right)$.