

Matematika pro ekonomickou praxi

Jiří Fišer

16. října 2025

- **Soustava m lineárních rovnic o n neznámých:**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,$$

-
-
-

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,$$

kde a_{ij} , b_i , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, jsou reálná čísla a x_j neznámé.

• $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ **matice soustavy**

$$\bullet \mathbf{A}_R = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad \text{rozšířená matice}$$

soustavy.

(Počet) řešení soustavy lineárních rovnic

- **Řešením soustavy** nazýváme každý vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, jehož složky u_j (dosazené za x_j) přemění soustavu rovnic na soustavu rovností.
- **Frobeniova věta:** Označme hodnotu matice soustavy $h(\mathbf{A})$ a hodnotu rozšířené matice soustavy $h(\mathbf{A}_R)$.
 - 1 Jestliže $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}_R)$, pak soustava **nemá řešení**.
 - 2 Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) = n$, pak soustava **má právě jedno řešení**.
 - 3 Jestliže $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) < n$, pak soustava **má nekonečně mnoho řešení**
závislých na $(n - h(\mathbf{A}_R))$ parametrech.

Gaussova metoda řešení soustav lineárních rovnic:

- 1 Napíšeme **rozšířenou matici** soustavy.
- 2 Pomocí ekvivalentních úprav ji **převedeme na horní stupňovitou** matici (pokud budeme zaměňovat sloupce, dodržíme následující zásady:
 - a) poslední sloupec pravých stran zůstane vždy na místě,
 - b) při záměně sloupců zaměníme odpovídajícím způsobem také proměnné).
- 3 **K získané matici napíšeme odpovídající soustavu lineárních rovnic, kterou už snadno vyřešíme.**

Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -5, \\2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= -7, \\x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1.\end{aligned}$$

- Zapišeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji na horní stupňovitou:

$$\mathbf{A}_R = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -4 & -4 & 16 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 7 & -2 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 7 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 13 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5 \\ x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 3 \\ 13x_3 + 12x_4 = -1 \\ x_4 = 1 \end{array}$$

- Výsledná horní stupňovitá (dokonce lichoběžníková) matice má čtyři řádky, takže **hodnost rozšířené matice soustavy i matice soustavy je 4**.
- Počet neznámých je také $4 = n$.
- Podle Frobeniovy věty má soustava **právě jedno řešení**.

Nyní ho najdeme:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5$$

$$x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 3$$

$$13x_3 + 12x_4 = -1$$

$$\boxed{x_4} = 1$$

$$13x_3 + 12x_4 = -1$$

$$13x_3 + 12(1) = -1$$

$$13x_3 = -13$$

$$\boxed{x_3} = -1$$

$$x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 3$$

$$x_2 - 5(-1) - 4(1) = 3$$

$$x_2 + 1 = 3$$

$$\boxed{x_2} = 2$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -5$$

$$x_1 - 2(2) + 3(-1) + (1) = -5$$

$$x_1 - 6 = -5$$

$$\boxed{x_1} = 1$$

Řešení je tedy skutečně právě jedno, a to vektor $(1, 2, -1, 1)$.

Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 1, \\ 2x_1 + 4x_2 & = & 2. \end{array}$$

- Zapišeme rozšířenou matici soustavy a tu dále upravíme na horní stupňovitou matici:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

- Výslednou matici přepíšeme zpět na „soustavu“ (v tomto případě jen jednu rovnici):

$$\underline{x_1 + 2x_2 = 1.}$$

- Platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) = 1$, přičemž $n = 2$ (počet neznámých).
- Tedy soustava má (podle Frobeniovy věty) nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru ($2 - 1 = 1$).

Volba parametru a)

$$\underline{x_1 + 2x_2 = 1.}$$

a) Jako tento parametr můžeme volit například přímo x_2 .
Zapíšeme

$$x_2 = t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Tuto volbu použijeme v rovnici:

$$x_1 + 2x_2 = 1, \quad x_1 + 2t = 1, \quad x_1 = 1 - 2t.$$

Řešením naší soustavy je tedy každý vektor tvaru

$$(x_1, x_2) = (1 - 2t, t), \quad \text{kde } t \text{ je libovolné reálné číslo.}$$

Například pro $t = 0$ dostaneme řešení $(1 - 2 \cdot 0, 0) = (1, 0)$,
pro $t = 1$ zase $(1 - 2 \cdot 1, 1) = (-1, 1)$ atd.

Pro ilustraci můžeme provést zkoušku, například pro řešení $(1, 0)$:

$$x_1 + 2x_2 = 1,$$

$$2x_1 + 4x_2 = 2.$$

$$1 + 2 \cdot 0 = 1,$$

$$2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 2,$$

$$1 = 1,$$

$$2 = 2,$$

Volba parametru a)

Nebo obecně pro $(1 - 2t, t)$:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & 1, \\ 2x_1 + 4x_2 & = & 2. \end{array} \quad \begin{array}{rcl} (1 - 2t) + 2t & = & 1, \\ 2 \cdot (1 - 2t) + 4t & = & 2, \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 1 & = & 1, \\ 2 & = & 2, \end{array}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Volba parametru b)

b) Pokud bychom na počátku volili naopak x_1 :

$$x_1 = t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R},$$

tak dostáváme:

$$x_1 + 2x_2 = 1, \quad t + 2x_2 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(1 - t).$$

Řešením naší soustavy je tedy každý vektor tvaru

$$(x_1, x_2) = \left(t, \frac{1}{2}(1 - t)\right), \quad \text{kde } t \text{ je libovolné reálné číslo.}$$

Například pro $t = 0$ dostaneme řešení $\left(0, \frac{1}{2}(1 - 0)\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, pro $t = 1$ zase $\left(1, \frac{1}{2}(1 - 1)\right) = (1, 0)$, tedy řešení, které jsme získali při předchozí parametrizaci pro $t = 0$. Jde o stejnou množinu řešení, jen zapsanou jiným způsobem. Přidejme ještě obecný důkaz, že $\left(t, \frac{1}{2}(1 - t)\right)$ je řešením pro každé reálné t :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1, & t + 2 \cdot \frac{1}{2}(1 - t) &= 1, & 1 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 &= 2. & 2 \cdot t + 4 \cdot \frac{1}{2}(1 - t) &= 2, & 2 &= 2, \end{aligned}$$

Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 & = & 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0. \end{array}$$

Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a tu dále upravíme na horní stupňovitou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -2 \end{array} \right).$$

- Máme tedy $h = k = 2$ a $n = 4$.
- Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech.
- Budeme tedy při vyjadřování řešení postupně volit dvě složky.

Výslednou matici přepíšeme na soustavu:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 1, \\4x_3 - 9x_4 &= -2.\end{aligned}$$

- Ve **druhé rovnici** při volbě $x_4 = t$ dostaneme:

$$4x_3 - 9x_4 = 4x_3 - 9t = -2, \quad x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{9}{4}t.$$

- Dále **z první rovnice**, při volbě $x_2 = s$, dostaneme:

$$x_1 + 2s - \left(-\frac{1}{2} + \frac{9}{4}t\right) + 4t = 1, \quad x_1 + 2s + \frac{7}{4}t = \frac{1}{2}, \quad x_1 = \frac{1}{2} - 2s - \frac{7}{4}t.$$

- Řešením je tedy každý vektor tvaru

$$\left(\frac{1}{2} - 2s - \frac{7}{4}t, s, -\frac{1}{2} + \frac{9}{4}t, t\right), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

například $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right)$ (pro $s = t = 0$).

Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + 4z & = & 2, \\ 2x - 4y + 8z & = & 1. \end{array}$$


$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & 8 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

- Zpětně prepíšeme na soustavu:

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + 4z & = & 2, \\ 0 & = & -3. \end{array}$$

- Zřejmě **druhá rovnice nemá řešení**, a tak ani celá soustava nemůže mít řešení.

Z pohledu Frobeniovy věty:

- hodnost rozšířené matice soustavy je **$k = 2$** , ale hodnost matice soustavy je jen **$h = 1$** .
- Máme tedy situaci, kdy **$h \neq k$** , z čehož podle Frobeniovy věty plyne **neexistence řešení**.

Další úlohy

Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} -4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 &= -11, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_5 &= 4, \\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 &= -3, \\ -6x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 - 12x_5 &= -7. \end{aligned}$$

Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= 4, \\ x_1 + 2x_3 &= -2, \\ 3x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 6x_4 &= 7. \end{aligned}$$

Zadání úlohy – Sestavení diety

V nemocnici se připravuje speciální dieta kombinováním 4 základních potravin 1, 2, 3 a 4 tak, aby obsahovala:

- 110 jednotek vápníku (Ca)
- 120 jednotek železa (Fe)
- 130 jednotek mědi (Cu)
- 140 jednotek vitamínu A (A)

Počet jednotek těchto složek v jedné jednotce příslušné potraviny je uveden v tabulce:

	1	2	3	4
Ca	10	20	30	40
Fe	20	30	40	10
Cu	30	40	10	20
A	40	10	20	30

Úkol: Kolik jednotek potravin 1–4 se má použít na sestavení takové diety?

Matematická formulace

- Daný problém lze transformovat na soustavu
 - ▶ 4 lineárních rovnic o 4 neznámých:
- označíme-li x_i množství i -té potraviny použité při přípravě diety ($i = 1, 2, 3, 4$),
- pak má příslušná soustava tvar

$$10x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 40x_4 = 110, \quad (\text{Ca})$$

$$20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 10x_4 = 120, \quad (\text{Fe})$$

$$30x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 130, \quad (\text{Cu})$$

$$40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 = 140. \quad (\text{A})$$

Řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & | & 110 \\ 20 & 30 & 40 & 10 & | & 120 \\ 30 & 40 & 10 & 20 & | & 130 \\ 40 & 10 & 20 & 30 & | & 140 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & | & 110 \\ 0 & -10 & -20 & -70 & | & -100 \\ 0 & -20 & -80 & -100 & | & -200 \\ 0 & -70 & -100 & -130 & | & -300 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & | & 110 \\ 0 & -10 & -20 & -70 & | & -100 \\ 0 & 0 & -40 & 40 & | & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 360 & | & 400 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & | & 110 \\ 0 & -10 & -20 & -70 & | & -100 \\ 0 & 0 & -40 & 40 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 400 & | & 400 \end{pmatrix}$$

Frobeniova věta: Vidíme, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) = 4$, což je také počet neznámých. Podle Frobeniové věty má soustava **právě 1 řešení**.

Výpočet řešení:

$$400x_4 = 400 \implies x_4 = 1,$$

$$-40x_3 + 40 \cdot 1 = 0 \implies x_3 = 1,$$

$$-10x_2 - 20 \cdot 1 - 70 \cdot 1 = -100 \implies x_2 = 1,$$

$$10x_1 + 20 \cdot 1 + 30 \cdot 1 + 40 \cdot 1 = 110 \implies x_1 = 2.$$

Závěr:

- Řešením soustavy je vektor $\mathbf{x} = (2, 1, 1, 1)$.
- Dieta se tedy má sestavit
 - ▶ ze dvou jednotek potravin 1
 - ▶ a jedné jednotky každé z potravin 2, 3 a 4.