Matematika pro ekonomickou praxi

Jiří Fišer

23. října 2025

- V dnešní přednášce se vrátíme k soustavám lineárních rovnic.
- Již známe obecnou (Gaussovu) metodu jejich řešení.
- Dnes se zaměříme na soustavy n rovnic o n neznámých,

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

se (čtvercovou) maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

o plné hodnosti n.

- Z Frobeniovy věty víme, že v tomto případě, kdy

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_R) = n,$$

máme zajištěnu existenci právě jednoho řešení

$$(x_1, \dots, x_n).$$

- Ukážeme si dva nové přístupy, jak toto řešení získat:
  1) pomocí Cramerova pravidla, kdy jsou jednotlivé složky řešení vyjádřeny jako podíly dvou determinantů,
  2) pomocí inverzních matic.

- **Determinant:** Každé (pouze) čtvercové matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

typu (n, n) lze přiřadit jisté číslo, kterému říkáme determinant matice $\mathbf{A}$ a značíme $\det \mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$ nebo i přímo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- **Subdeterminant** prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$:
  - je determinant matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$
    - vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.
  - Značíme $\mathbf{A}^*_{ij}$.

Úloha

Subdeterminantem prvku 3 v matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

je determinant

$$B^*_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

(vynechali jsme druhý řádek a druhý sloupec).

- **Doplněk** prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^{*}.$$

Úloha

Doplňkem prvku 3 v matici

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & \boxed{3} & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

je

$$B_{22} = (-1)^{2+2} B_{22}^{*} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu

- **Křížové pravidlo** pro výpočet determinantů matic typu $(2,2)$:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Příklady:

- $\begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 \cdot 2 - 10 \cdot 3 = 40 - 30 = 10$
- $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$

Výpočet determinantu

- **Sarrusovo pravidlo** pro výpočet determinantů matic typu $(3,3)$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.$$

Pomůcka:

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{array} = +aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$$

Příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 2$$

$$= 3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 18 = -15$$

Výpočet determinantu

- **Laplaceova věta** pro výpočet determinantů vyšších řádů:

  Nechť je dána čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (n, n).

  Potom platí vzorec pro tzv.

  - rozvinutí determinantu podle prvků i-tého řádku

  $$\det \mathbf{A} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in},$$

  - rozvinutí determinantu podle prvků j-tého sloupce

  $$\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Úloha

Pomocí rozvinutí podle prvků druhého řádku vypočtěte

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \color{red}{2} & \color{green}{1} & \color{blue}{0} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= \color{red}{2}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \color{green}{1}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \color{blue}{0}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2(-1) + 1(-2) + 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Úloha

Pomocí rozvinutí podle prvků třetího sloupce vypočtěte

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(-3) + 0 - 1(-3) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Vlastnosti determinantu

- Jestliže k některému řádku (sloupci) matice přičteme lineární kombinaci zbývajících řádků (sloupců), potom se hodnota determinantu nezmění.

Úloha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

(Od třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního řádku.)

Vlastnosti determinantu

- Jestliže některý řádek (sloupec) je lineární kombinací zbývajících řádků (sloupců), potom je hodnota determinantu nula.
  - Speciální případy: nulový řádek (sloupec), dva stejné řádky (sloupce).

Úloha

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

(První řádek je trojnásobkem druhého.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(Třetí řádek je nulový.)

Vlastnosti determinantu

- Vynásobíme-li některý řádek (sloupec) reálným číslem α, determinant výsledné matice bude α-násobkem determinantu původní matice.

Úloha

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

(První matice má oproti druhé trojnásobný první řádek.)

Vlastnosti determinantu

- Vyměníme-li v matici $\mathbf{A}$ dva řádky (sloupce) a označíme novou matici písmenem $\mathbf{B}$, potom platí:

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}.$$

Úloha

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Postup při výpočtu determinantu

- Pomocí výše uvedených úprav se snažíme upravit determinant matice typu (n, n) tak, aby měl v některém řádku (sloupci) co nejvíce nul.

- Pokud jsme nedošli k samým nulám (nulový determinant), tak podle tohoto řádku (sloupce) provedeme rozvinutí determinantu, čímž se sníží o jedničku jeho rozměr.

- Tento postup opakujeme tak dlouho, až dojdeme k determinantům matic typu $(3, 3)$ (při použití Sarrusova pravidla), nebo $(2, 2)$, když chceme použít až křížové pravidlo.
- (Ve vhodném případě můžeme použít i převod na horní $\triangle$ matici.)

Vypočteme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} 0 + 0 + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 \overset{2)}{=}$$

$$\overset{2)}{=} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{3)}{=} - \left(0 + 0 + 0 + 4(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \right) \overset{4)}{=}$$

$$\overset{4)}{=} 4 \begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & \boxed{1} & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{5)}{=} 4 \left(0 + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 0 \right) \overset{6)}{=} 4(9 + 10) = 76.$$

Popis úprav: 1) Rozvinutí podle druhého sloupce. 2) 1.ř.$-$3.ř. 3) Rozvinutí podle prvního řádku. 4) 1.ř.$-2\cdot$2.ř. 5) Rozvinutí podle druhého sloupce. 6) Křížové pravidlo.

Determinant horní trojúhelníkové matice

Horní △ matice

Matice, která má pod hlavní diagonálou samé nuly.

Determinant horní △ matice $\mathbf{A}_\triangle$

$\det \mathbf{A}_\triangle = a_{11}\, a_{22}\, \cdots\, a_{nn}$ (součin prvků na hlavní diagonále).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2 = -6$$

Determinant horní trojúhelníkové matice

Převod determinantu na horní △ tvar

- Postup podobný převodu na horní stupňovitou matici.
- Pozor! Některé úpravy by nám mohly změnit hodnotu determinantu (viz vlastnosti determinantu):
  - Přičtení násobku řádku k jinému řádku (sloupce k jinému sloupci) hodnotu nemění.
  - Například zdvojnásobení řádku zdvojnásobí i hodnotu determinantu. Pro zachování rovnosti je třeba determinant nové matice vydělit dvěma.
  - Přehození dvou řádků (sloupců) změní znaménko derminantu.

Determinant horní trojúhelníkové matice

1) Příklad převodu na horní $\triangle$ matici (hodnost $= 3 \Rightarrow \det \neq 0$):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3(1 \cdot 1 \cdot 1) = 3$$

1.ř/3 2.ř-2·1.ř, 3.ř.+1.ř. 3.ř.-2.ř. horní $\triangle$ matice

2) Příklad převodu na horní $\triangle$ matici (hodnost $= 2 < 3 \Rightarrow \det = 0$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

Cramerovo pravidlo

Nechť je dána soustava n rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}$$

Jestliže pro matici (této) soustavy $\mathbf{A} = (a_{ij})$ platí $\det \mathbf{A} \neq 0$, pak daná soustava má právě jedno řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, přičemž platí:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad \text{pro každé} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

kde $\mathbf{A}_i$ je matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ tak, že i-tý sloupec v matici $\mathbf{A}$ nahradíme sloupcem pravých stran a ostatní sloupce ponecháme beze změny.

Úloha

Užitím Cramerova pravidla vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3, \\ 2x_1 + x_3 &= 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7. \end{aligned}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8, \qquad \det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 12.$$

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = \frac{12}{4} = 3.$$

Řešení soustavy je vektor $(2, -1, 3)$.

Úloha

Užitím Cramerova pravidla vyřešte soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Řešení.

$\left[\text{Řešení} \quad (-2, 3, 2)\right]$ $\square$

Úloha

Užitím Cramerova pravidla vyřešte soustavu

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 + 2x_4 &= 0, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 3x_1 + x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 1, \\ x_2 + 2x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Úlohy a) a b) se liší pouze pravými stranami, a tak mají shodnou matici soustavy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro další řešení bude rozhodující, zda determinant matice $\mathbf{A}$ je nenulový.

$$
\begin{aligned}
\det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -1 \cdot (6+1) = -7 \neq 0.
\end{aligned}
$$

V obou případech tedy půjde použít Cramerovo pravidlo.

ad a)

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$ neboť A_1 obsahuje nulový sloupec

(viz Vlastnosti determinantů).

Stejně to dopadne i pro matice A_2, A_3 a A_4.

Tudíž máme

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{0}{-7} = 0.$$

Jediné řešení je tedy $(0, 0, 0, 0)$.

ad b)

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\left(-1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -\left(-1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2-3) + 2(-6-6) - 3(-3-2) = -1 - 24 + 15 = -10.$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \cdots = 16, \quad \det \mathbf{A}_3 = \cdots = 1, \quad \det \mathbf{A}_4 = \cdots = -15.$$

Složky jediného řešení (x_1, x_2, x_3, x_4) jsou tedy

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det A} = \frac{-10}{-7} = \frac{10}{7},\\
x_2 &= \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det A} = \frac{16}{-7} = -\frac{16}{7},\\
x_3 &= \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det A} = \frac{1}{-7} = -\frac{1}{7},\\
x_4 &= \frac{\det \mathbf{A}_4}{\det A} = \frac{-15}{-7} = \frac{15}{7}.
\end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení $\left(\frac{10}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{15}{7}\right)$.