

Matematika pro ekonomickou praxi

Jiří Fišer

9. října 2025

Motivace – soustavy lineárních rovnic

Určete reálná čísla a, b, c tak, aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 2 \cdot c \\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c \\ 2 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{rcl} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 2 \cdot c & = & 2 \\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c & = & 3 \\ 2 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c & = & 4 \end{array} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c & = & 3 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b - 2 \cdot c & = & -2 \\ 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c & = & 1 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} a & & + & c & = & 3 & & \\ & b & - & 2c & = & -2 & \longleftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & & & c & = & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 2c = 2 \\ a & + & c = 3 \\ 2a + b & = & 4 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{array}{rcl} a & + & c = 3 \\ b - 2c & = & -2 \\ & c = & 1 \end{array}$$

Řešení:

$$(x, y, z) = (2; 0; 1)$$

Motivace – soustavy lineárních rovnic

Určete reálná čísla x, y, z , aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z & = & 1 \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y + 2 \cdot z & = & 2 \\ 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z & = & 0 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z & = & 1 \\
 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z & = & 0 \\
 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z & = & 0
 \end{array}
 \longleftrightarrow
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z & = & 1 \\
 & 0 & = 0 \\
 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z & = & 0
 \end{array}
 \longleftrightarrow
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z & = & 1 \\
 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z & = & 0
 \end{array}
 \longleftrightarrow
 \left(\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & -1
 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z & = & 1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z & = & -1 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z & = & 1 \\ & & z = -1 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Řešení soustavy tedy dává:

$$z = -1, \quad x + y - 1 = 1 \quad \rightarrow \quad z = -1, \quad y = 2 - x.$$

Budeme zapisovat

$$(x, y, z) = (t, 2 - t, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hodnost matice

- Hodností matice $\mathbf{A}$ nazýváme maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků. Značíme $h(\mathbf{A})$.
- Platí tedy: $h(\mathbf{A}) \leq m = \text{počet řádků}$.
- Také platí: $h(\mathbf{A}^T) = h(\mathbf{A})$, tedy $h(\mathbf{A}) \leq n = \text{počet sloupců}$.
- Dohromady: $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Příklad

Co byste řekli o této matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$?

Dokázali byste určit nebo alespoň shora odhadnout její hodnost?

- Jak určit hodnotu matice?
- Nejprve si řekneme, že **hodnota** každé horní lichoběžníkové matice typu (m, n) , $m \leq n$, je m .
- Například

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

je horní lichoběžníková, a tak by mělo platit $h(\mathbf{A}) = 3$.

- To znamená, že ji tvoří $m = 3$ lineárně nezávislých řádků.
- Nebudeme to dokazovat obecně, jen si to ukážeme na tomto jednom příkladu.

Určete hodnotu horní lichoběžníkové matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ukážeme, že tato matice je tvořena trojicí lineárně nezávislých řádků. Řešíme vektorovou rovnici (z definice lineární nezávislosti vektorů)

$$\alpha_1(1, 2, 1, 4) + \alpha_2(0, 6, 4, 4) + \alpha_3(0, 0, 3, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

Po složkách:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 & = & 0 \\ \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 6 + \alpha_3 \cdot 0 & = & 0 \\ \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 3 & = & 0 \\ \alpha_1 \cdot 4 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 0 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 0 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 & = & 0 \\ 4\alpha_1 + 4\alpha_2 & = & 0 \end{array}$$

Vyšlo nám tedy jen triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, a tak jde o trojici lineárně nezávislých řádků (vektorů). Tedy skutečně $h(\mathbf{A}) = 3$.

Stejnou vlastnost mají i tzv. horní stupňovité matice:

- Jestliže v matici má každý následující řádek více nul na začátku než řádek předchozí a poslední řádek je nenulový, pak tuto matici nazveme **horní stupňovitou maticí**.
- Každá horní lichoběžníková matice je současně horní stupňovitá matice.
- **Hodnost horní stupňovité matice je rovna počtu jejích řádků.**

Matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je horní stupňovitá matice. Tedy $h(\mathbf{B}) = 3$.

Ekvivalentní úpravy

Hodnost matice se nezmění, jestliže v ní provedeme následující úpravy:

- zaměníme pořadí řádků nebo sloupců,

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- vynásobíme některý řádek nenulovým číslem,

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{1}{2} \cdot 3. \text{ řádek} \right)$$

Ekvivalentní úpravy

- přičteme k některému řádku lineární kombinaci zbývajících řádků, nejčastěji násobek jiného řádku

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad (3. \text{ řádek} - 2 \cdot 1. \text{ řádek})$$

- vynecháme řádek, který je lineární kombinací zbývajících řádků speciálně **nulový řádek**, nebo **jeden ze dvou stejných řádků**

Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Předchozí úpravy nazýváme ekvivalentní (zachovávají hodnotu matice).

Gaussův algoritmus pro určení hodnoty matice:

- Danou matici převedeme pomocí ekvivalentních úprav na horní lichoběžníkovou (stupňovitou) matici.
- Ta má stejnou hodnotu jako výchozí matice.
- Již víme, že hodnota horní lichoběžníkové (stupňovité) matice je dána počtem jejích řádků.

Určete hodnotu matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 13 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Máme vynulovat oblast matice vlevo dole pod diagonálou.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 13 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Budeme postupovat po sloupcích zleva doprava.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 13 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ① První řádek ponecháme. Je výhodné, že na první pozici je jednička. Od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku (značíme 2.ř.−2·1.ř), ke třetímu řádku přičteme první řádek (3.ř.+1.ř) a ke čtvrtému přičteme dvojnásobek prvního (4.ř.+2·1.ř.). Tím dostaneme matici (se stejnou hodnotí):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & 13 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

- ② V dalším kroku zaměníme druhý a třetí řádek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

- 3 Od 4. řádku odečteme dvojnásobek druhého řádku (4.ř.-2·2.ř.):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 8 & 9 & 2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \end{pmatrix}.$$

- 4 Vynecháme čtvrtý řádek, neboť je stejný jako třetí řádek (je tedy lineární kombinací zbývajících řádků):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Výsledkem je horní lichoběžníková matice, která má tři řádky, a tak i hodnost 3, stejně jako původní matice:

$$h(\mathbf{A}) = 3.$$

Určete hodnotu matice $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & -11 & 13 & -3 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ -4 & -11 & 13 & -3 & 8 \end{pmatrix} \stackrel{1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & 18 & -22 & 2 & -12 \\ 0 & -27 & 33 & -3 & 16 \end{pmatrix}$$

1) 2.ř. $-2 \cdot 1.$ ř., 3.ř. $-5 \cdot 1.$ ř., 4.ř. $+4 \cdot 1.$ ř.;

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & 18 & -22 & 2 & -12 \\ 0 & -27 & 33 & -3 & 16 \end{pmatrix} \stackrel{2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & -27 & 33 & -3 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & -27 & 33 & -3 & 16 \end{pmatrix} \stackrel{3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & -11 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

2) $3.\text{ř.} \cdot \frac{1}{2}$;

3) 3. řádek vynecháme (neboť je stejný jako druhý řádek), $4.\text{ř.} + 3 \cdot 2.\text{ř.}$

$$h(\mathbf{B}) = 3.$$