

Zadání příkladů k zápočtu z P1MEP

Jiří Fišer a Martina Pavlačková

Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., 2025

UČO studenta:

Jméno studenta:

1 Množiny

Příklad 1. Uvažujme množiny $A = \{1, 2, 4, 5\}$ a $B = \{-5, 0, 1, 4\}$.

Určete množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Příklad 2. Uvažujme množiny (intervaly) $A = (3; 5)$ a $B = \langle 4; 6 \rangle$.

Určete množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Příklad 3. Určete, pro která reálná čísla x platí

a) $|x - 3| = 4$,

b) $|x + 2| > 2$,

c) $|x + 1| \leq 3$.

Příklad 4. Zjistěte, je-li výraz definován, a pokud ano, tak jej vypočítejte:

a) $-3 \cdot \infty + \frac{-17 \cdot \infty}{5} - \frac{3}{\infty}$,

b) $\frac{\infty}{-100\,000} - \frac{1}{\infty^3} - \infty \cdot (-\infty)$.

2 Vektorové prostory

Příklad 5. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ a jeho dva prvky $\mathbf{a} = (3, -2, 5)$ a $\mathbf{b} = (-2, 1, 2)$. Vypočítejte:

- a) součet těchto vektorů,
- b) lineární kombinaci těchto vektorů s koeficienty 3 a -2,
- c) skalární součin těchto vektorů.

Příklad 6. Potřebujeme koupit 20 sazenic rajčat, 15 sazenic paprik a 25 sazenic jahod. Na výběr máme dvě prodejny nabízející tyto sazenice. Z časových důvodů můžeme jet jen do jedné z nich.

V první prodejně stojí sazenice rajčat 16 Kč/ks, sazenice paprik 25 Kč/ks a sazenice jahod 28 Kč/ks. Ve druhé prodejně stojí sazenice rajčat 20 Kč/ks, sazenice paprik 20 Kč/ks a sazenice jahod 30 Kč/ks.

Která prodejna bude pro nás výhodnější?

3 Matice

Příklad 7.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ (pokud to rozměry matic umožňují).

Příklad 8. Uvažujme firmu, která ve 2 výrobních halách vyrábí 4 druhy produktů.

Objem produkce v 1. roce je popsán následující tabulkou:

	1. produkt	2. produkt	3. produkt	4. produkt
1. hala	1 000 ks	2 000 ks	1 500 ks	7 000 ks
2. hala	500 ks	0 ks	2 000 ks	2 000 ks

Objem produkce ve 2. roce je popsán následující tabulkou:

	1. produkt	2. produkt	3. produkt	4. produkt
1. hala	1 000 ks	11 000 ks	5 000 ks	4 000 ks
2. hala	0 ks	0 ks	6 000 ks	2 000 ks

Navíc víme, že 1 ks 1. produktu přinese zisk 87 Kč, 1 ks 2. produktu přinese zisk 24 Kč, 1 ks 3. produktu přinese zisk 29 Kč a 1 ks 4. produktu přinese zisk 37 Kč.

Určete pomocí maticových operací objem produkce za oba roky dohromady (v jednotlivých halách) a také velikost zisku za oba roky v jednotlivých halách a nakonec za celou firmu.

Příklad 9. Firma vyrábí dva typy výrobků, V_1 a V_2 . Počet hodin práce člověka, hodin práce stroje a množství kilogramů materiálu, které jsou potřeba na výrobu jednoho výrobku, jsou popsány následující tabulkou:

Výrobek	Lidská práce (h)	Práce stroje (h)	Materiál (kg)
V_1	2	3	5
V_2	1	3	3

Dále ceny jednotlivých výrobních faktorů jsou následující:

Výrobní faktor	Cena
Lidská práce	300 Kč/h
Práce stroje	50 Kč/h
Materiál	110 Kč/kg

V další tabulce je popsáno nastavení cen za 1 ks výrobku:

Výrobek	Cena (Kč)
V_1	1 150
V_2	900

Jaký zisk (ztrátu) přinese 1 ks prodaného výrobku V_1 a jaký výrobku V_2 ?

Příklad 10. Tři studenti ZŠ shání pomůcky do školy. Vzhledem k výši poštovného chce každý z nich objednávku pomůcek realizovat pouze v jednom z e-shopů, který je nabízí. Který e-shop bude pro jednotlivé studenty nejvýhodnější, když víme, že množství, která potřebují koupit, a jednotkové ceny jsou popsány následujícími tabulkami:

	Tužky	Sešity	Obaly
1. student	24 ks	16 ks	17 ks
2. student	6 ks	18 ks	11 ks
3. student	5 ks	16 ks	29 ks

	Cena v 1. e-shopu	Cena ve 2. e-shopu	Cena ve 3. e-shopu
Tužka	2,5 Kč/ks	3 Kč/ks	4 Kč/ks
Sešit	30 Kč/ks	29 Kč/ks	21 Kč/ks
Obal	4 Kč/ks	3,5 Kč/ks	4,5 Kč/ks

Příklad 11. Uvažujme následující matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte jejich hodnoti.

Příklad 12. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ a jeho tři prvky $(2, 2, 1)$, $(2, 2, 5)$ a $(0, -1, 0)$. Určete (s využitím hodnoty matice), zda jsou tyto vektory lineárně závislé nebo nezávislé.

Příklad 13. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ a jeho tři prvky $(1, 2, 4)$, $(2, 0, 5)$ a $(0, 4, 3)$. Určete (s využitím hodnoty matice), zda jsou tyto vektory lineárně závislé nebo nezávislé.

4 Determinanty a inverzní matice

Příklad 14. Vypočítejte determinanty $\det(\mathbf{A})$, $\det(\mathbf{B})$ a $\det(\mathbf{C})$, je-li to možné:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 15. Vypočítejte determinant $\det(\mathbf{A})$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 16. Vypočítejte inverzní matici k matici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Správnost svého výpočtu ověřte zkouškou.

Příklad 17. Vypočítejte inverzní matici k matici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Výpočet můžete provést manuálně nebo pomocí softwaru (v takovém případě uveďte použitý software/příkazy).

Správnost výpočtu ověřte zkouškou.

Příklad 18. Zášifrujte zprávu „REINKARNACE“ pomocí matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přiřazení čísel písmenům proveďte podle kódovací tabulky:

0 = –	9 = I	18 = R
1 = A	10 = J	19 = S
2 = B	11 = K	20 = T
3 = C	12 = L	21 = U
4 = D	13 = M	22 = V
5 = E	14 = N	23 = W
6 = F	15 = O	24 = X
7 = G	16 = P	25 = Y
8 = H	17 = Q	26 = Z

5 Soustavy lineárních rovnic

Příklad 19. Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 - x_3 & = & 3, \\ \text{a)} \quad 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 & = & 1, \\ -x_2 - x_3 & = & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & -1, \\ \text{b)} \quad 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 & = & 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 & = & -1. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 - x_4 & = & 3, \\ \text{c)} \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 3, \\ -x_2 - x_4 & = & 0. \end{array}$$

Příklad 20. Řešte soustavy lineárních rovnic z předchozího příkladu Cramerovým pravidlem (pokud to je možné).

Příklad 21. Ve firmě vyrábí dva druhy výrobků (1;2) a každý z nich musí při své výrobě projít 2 výrobními linkami (v libovolném pořadí). Počet hodin, který výrobky stráví na jednotlivých linkách jsou uvedeny v následující tabulce:

	1	2
1. výrobní linka	0,9	2
2. výrobní linka	0,4	0,8

První výrobní linka může být v provozu maximálně 1725 hodin/období, druhá 724 hodin/období.

Kolik jednotlivých výrobků je možné měsíčně vyrobit, aby byla využita maximální kapacita linek?

Příklad 22. Máme za úkol připravit ovocný salát kombinováním 3 ovocí 1, 2, 3 tak, aby obsahoval 34 jednotek vitamínu A, 27 jednotek vitamínu B, 39 jednotek vitamínu C. Počet jednotek těchto složek v 1 dkg příslušného ovoce je uveden v následující tabulce:

	1. ovoce	2. ovoce	3. ovoce
Vitamín A	1	3	2
Vitamín B	1	2	2
Vitamín C	2	3	2

Kolik dkg jednotlivých druhů ovoce se má na salát použít?

6 Posloupnosti

Příklad 23. Určete první čtyři členy posloupnosti dané n -tým členem

$$a_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

a nakreslete příslušnou část grafu této posloupnosti.

Příklad 24. Předpokládejme, že je na začátku roku vložena částka 3 000 Kč na spořicí účet s roční úrokovou mírou 4 %, který je úročen jednou ročně vždy na konci roku.

Vypočítejte, kolik bude na tomto účtu po 1, 2, 3 a 4 letech.

Příklad 25. Předpokládejme, že je na začátku roku vložena částka 3 000 Kč na spořicí účet s roční úrokovou mírou 4 %, který je úročen jednou ročně vždy na konci roku a předpokládejme, že jsou úroky daněny 15% daní.

Vypočítejte, kolik bude na tomto účtu po 1, 2, 3 a 4 letech.

Příklad 26. Na začátku roku vložíme částku 15 000 Kč na spořicí účet s roční úrokovou mírou 6 %, který je úročen čtyřikrát ročně vždy na konci čtvrtletí.

Vypočítejte, kolik bude na tomto účtu po 4 letech.

7 Limity posloupnosti

Příklad 27. Vypočítejte limity posloupností:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{18n + 4},$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^8 - n^3 + 150}{1 - 3n^4},$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 3}{n} \right)^n,$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}{2 \cdot 5^n - 2^n},$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - n + 2}{-2n^3 + 4},$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - n + 3),$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 - n + 2}{-2n^3 + 4} + \frac{-3n^5 - n + 2}{2n^3 + 1} \right),$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n}{5n^6 + 1} \cdot \sin(3n),$

ch) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - 2n^4 + 3).$

8 Číselné řady

Příklad 28. Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8^n},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+6},$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+6)^2},$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n,$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n,$$

$$\text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^3}.$$

Příklad 29. Rozhodněte, zda je daná řada geometrická. Pokud je, tak stanovte její součet.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1},$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n},$$

$$\text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{4^{n-1}}.$$

Příklad 30. Kolik naspoříme za 6 let, ukládáme-li počátkem každého roku 8 000 Kč? Roční úroková míra je 5 %, úrok se připisuje vždy na konci roku. (Pro výpočet použijte vzorec odvozený ve studijní opoře.)

Příklad 31. Kolik naspoříme za 6 let, ukládáme-li počátkem každého roku 8 000 Kč? Roční úroková míra je 5 %, úrok se připisuje vždy na konci roku a je daněn 15% daní. (Pro výpočet použijte vzorec odvozený ve studijní opoře.)

Příklad 32. Za 5 let chceme koupit automobil za 650 000 Kč. Kolik musíme spořit počátkem každého roku při roční úrokové míře 4 %, abychom si na něj našetřili? Úrok se přispisuje vždy na konci roku. (Pro výpočet použijte vzorec odvozený ve studijní opoře.)