Matematika pro ekonomickou praxi 1

Jiří Fišer

2. října 2025

Co je to lineární algebra?

- **Algebra = počítání se symboly**, nejen s čísly.
- **Lineární** = přímkový, jednoduchý, bez složitých křivek.
- **Vektory** = seznamy čísel (např. údaje o firmě).
- **Matice** = tabulky čísel (např. účetní výkazy, data v Excelu).
- **Soustavy rovnic** = více podmínek najednou (rozpočet, kapacita, poptávka).
- Pro ekonomy: základní jazyk pro **modelování**, **analýzu dat**, **rozhodování**.

Historie pojmu „vektor"

- **Mladý pojem:** objevuje se až v 19. století v souvislosti s fyzikou a novými číselnými systémy.
- **Na rozdíl od geometrie:** ta má tisíciletou tradici, vektory v dnešní podobě existují teprve dvě století.
- **Etymologie:**
  - *vector* (lat.) = „nosič, přenašeč"
  - od slovesa *vehere* = „nést, vézt"
- **Význam:** vektor „přenáší" bod z jednoho místa na jiné – určuje **směr a velikost posunu**.

Vektory a operace s nimi

- *n*-rozměrný vektor (uspořádaná *n*-tice reálných čísel)

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n$$

  - x_i, $i = 1, \dots, n$ — i-tá složka vektoru $\vec{u}$

- součet dvou vektorů z $\mathbb{R}^n$ (musí mít stejný rozměr):

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)\\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

  - výsledkem je opět *n*-rozměrný vektor,
  - $(2, 3) + (1, -1) = (2 + 1, 3 - 1) = (3, 2)$.

Násobení vektoru číslem

Definice: Násobení vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ reálným číslem (skalárem) k spočívá v tom, že každý prvek vektoru vynásobíme tímto číslem:

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2, \ldots, k \cdot a_n)$$

Vlastnosti:

- Výsledkem násobení vektoru číslem je nový vektor ve stejném směru jako původní vektor (pokud $k > 0$).
- Pokud $k < 0$, výsledný vektor směřuje opačným směrem.
- Pokud $k = 0$, výsledkem je nulový vektor.

Příklad: Mějme vektor $\vec{a} = (2, -3, 5)$ a skalár $k = 4$. Vynásobíme vektor číslem:

$$4 \cdot \vec{a} = 4 \cdot (2, -3, 5) = (8, -12, 20)$$

Skalární součin vektorů

Definice: Skalární součin dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je dán vztahem:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Vlastnosti:

- Výsledkem skalárního součinu je číslo (skalár).
- Skalární součin je komutativní: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
- Pokud je skalární součin nulový, vektory jsou na sebe kolmé (ortogonální).

Příklad: Mějme dva vektory $\vec{a} = (1, 2, 3)$ a $\vec{b} = (4, -1, 2)$. Vypočítejme jejich skalární součin:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 4 - 2 + 6 = 8$$

Výsledek: Skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je 8.

Vypočtěte

a) $(5,-3,9)+(2,8,-13)$,

b) $-\frac{1}{4}(4,8,-1)$,

c) $(2,-3,1)\cdot(2,3,-1)$.

a) Součet vektorů:
$(5,-3,9)+(2,8,-13)=(7,5,-4)$.

b) Násobek vektoru:
$-\frac{1}{4}(4,8,-1)=\left(-1,-2,\frac{1}{4}\right)$.

c) Skalární součin vektorů:
$(2,-3,1)\cdot(2,3,-1)=2\cdot 2+(-3)\cdot 3+1\cdot(-1)=4-9-1=-6$.

Vypočtěte

a) $(5,-3,9)+(2,8,-13)$,

b) $-\frac{1}{4}(4,8,-1)$,

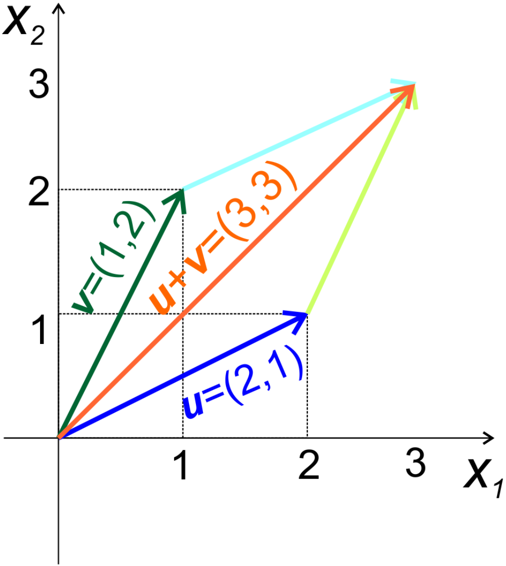
c) $(2,-3,1)\cdot(2,3,-1)$.

a) Součet vektorů:
$(5,-3,9)+(2,8,-13)=(7,5,-4)$.

b) Násobek vektoru:
$-\frac{1}{4}(4,8,-1)=\left(-1,-2,\frac{1}{4}\right)$.

c) Skalární součin vektorů:
$(2,-3,1)\cdot(2,3,-1)=2\cdot 2+(-3)\cdot 3+1\cdot(-1)=4-9-1=-6$.

Geometrický význam – součet vektorů



Vektory – nulový a opačný

- $\mathbf{o} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ — n-rozměrný nulový vektor:

$$\vec{u} + \mathbf{o} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{u}.$$

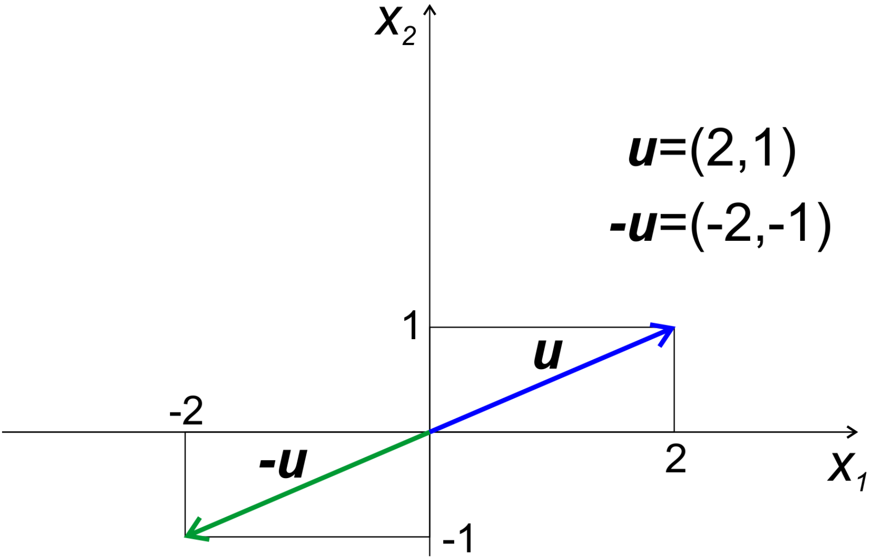
  - v $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{o} = (0, 0)$.

- $-\vec{u}$ — opačný vektor k vektoru $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, tedy

$$-\vec{u} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n), \qquad \vec{u} + (-\vec{u}) = \mathbf{o}.$$

  - $-(1, 3) = (-1, -3)$.

Geometrický význam – opačný vektor



Lineární kombinace vektorů

Definice: Lineární kombinace k vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ (kde $k \in \mathbb{N}$) s reálnými koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ je vektor $\vec{u}$, který můžeme vyjádřit jako:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{x}_k$$

Příklad: Mějme tři vektory:

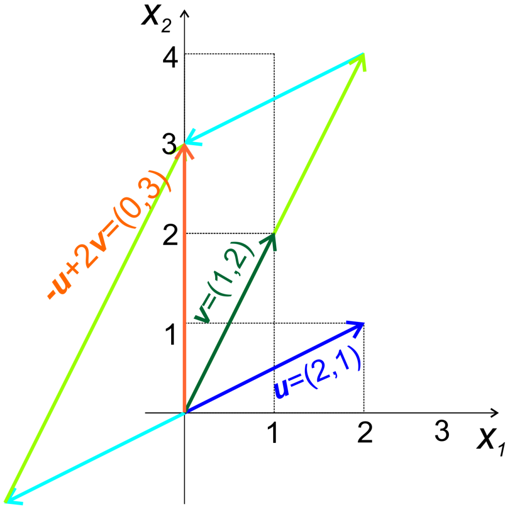
$$\vec{x} = (2, 3, 4), \quad \vec{y} = (1, 0, 4), \quad \vec{z} = (1, 1, 1)$$

a koeficienty $-1, 2, 5$. Lineární kombinace těchto vektorů s uvedenými koeficienty je:

$$\begin{aligned} -\vec{x} + 2\vec{y} + 5\vec{z} &= -1(2, 3, 4) + 2(1, 0, 4) + 5(1, 1, 1) \\ &= (-2, -3, -4) + (2, 0, 8) + (5, 5, 5) = (5, 2, 9) \end{aligned}$$

Výsledek: Výsledný vektor je $\vec{u} = (5, 2, 9)$.

Geometrický význam – lineární kombinace vektorů



Lineární závislost a nezávislost vektorů

- Řekneme, že množina vektorů $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ je lineárně závislá, jestliže alespoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.
  - V opačném případě řekneme, že je lineárně nezávislá.

- Lineární (ne)závislost se dá také vyjádřit pomocí vektorové rovnice

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_k \vec{u}_k = \mathbf{o},$$

kde neznámými jsou koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Tato rovnice má vždy tzv. triviální řešení

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

  - Pokud má pouze toto triviální řešení, potom je množina vektorů $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$ lineárně nezávislá,
  - pokud existuje i netriviální řešení (alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$), potom je lineárně závislá.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Rozhodněte, zda množina vektorů $\{(1,0,1),(-3,2,-1),(2,1,3)\}$ lineárně závislá nebo nezávislá.

Budeme zkoumat rovnici

$$\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(-3,2,-1)+\alpha_3(2,1,3)=(0,0,0),$$

$$(\alpha_1,0,\alpha_1)+(-3\alpha_2,2\alpha_2,-\alpha_2)+(2\alpha_3,\alpha_3,\alpha_3)=(0,0,0).$$

Rozepíšeme ji po složkách (soustav tří rovnic o třech neznámých):

$$\begin{aligned} \alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_2+\alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

Tato soustava má kromě triviálního řešení $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$
také netriviální řešení $\alpha_1=7,\quad \alpha_2=1,\quad \alpha_3=-2$,
a tak jde o lineárně závislou množinu vektorů.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

pokračování

Rozhodněte, zda množina vektorů $\{(1,0,1),(-3,2,-1),(2,1,3)\}$ lineárně závislá nebo nezávislá.

Netriviální řešení $\alpha_1 = 7, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -2$:

- $\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(-3,2,-1) + \alpha_3(2,1,3) = (0,0,0)$,
- $7(1,0,1) + 1(-3,2,-1) - 2(2,1,3) = (0,0,0)$,
- $1(-3,2,-1) = (0,0,0) - 7(1,0,1) + 2(2,1,3)$,
- $(-3,2,-1) = -7(1,0,1) + 2(2,1,3)$

  (druhý vektor je lineární kombinací prvního a třetího vektoru, tedy tato trojice vektorů je lineárně závislá)

Příklad: Firma prodává čtyři druhy zboží

Firma prodává čtyři druhy zboží na třech pobočkách. Cena za jeden kus zboží je následující:

- 1. zboží: 12 Kč
- 2. zboží: 7 Kč
- 3. zboží: 18 Kč
- 4. zboží: 5 Kč

Během jednoho dne se na pobočkách prodalo následující množství zboží:

- 1. pobočka: 5, 2, 7, 8
- 2. pobočka: 6, 4, 2, 1
- 3. pobočka: 3, 5, 0, 4

Úkoly:

1. Kolik se prodalo tento den celkem kusů jednotlivých druhů zboží?
2. Jaké byly tržby na jednotlivých pobočkách?
3. Jaké byly firemní celkové tržby?

Řešení: Kolik se prodalo celkem kusů jednotlivých druhů zboží?

Postup: Sečteme vektory prodaného zboží na jednotlivých pobočkách po složkách.

$$\textbf{Celkem prodané množství} = (5, 2, 7, 8) + (6, 4, 2, 1) + (3, 5, 0, 4)$$

$$= (5 + 6 + 3, 2 + 4 + 5, 7 + 2 + 0, 8 + 1 + 4) = (14, 11, 9, 13)$$

Výsledek: Celkem se prodalo 14 kusů 1. zboží, 11 kusů 2. zboží, 9 kusů 3. zboží a 13 kusů 4. zboží.

Řešení: Jaké byly tržby na jednotlivých pobočkách?

Postup: Pro každou pobočku vynásobíme vektory prodaného množství vektorem cen.

Tržby pro 1. pobočku:

$$(5, 2, 7, 8)\cdot(12, 7, 18, 5) = 5\cdot 12+2\cdot 7+7\cdot 18+8\cdot 5 = 60+14+126+40 = 240\,\text{Kč}$$

Tržba 2. pobočky:

$$(6, 4, 2, 1)\cdot(12, 7, 18, 5) = 6\cdot 12+4\cdot 7+2\cdot 18+1\cdot 5 = 72+28+36+5 = 141\,\text{Kč}$$

Tržba 3. pobočky:

$$(3, 5, 0, 4)\cdot(12, 7, 18, 5) = 3\cdot 12+5\cdot 7+0\cdot 18+4\cdot 5 = 36+35+0+20 = 91\,\text{Kč}$$

Výsledek: Tržby na pobočkách jsou: 1. pobočka: 240 Kč, 2. pobočka: 141 Kč, 3. pobočka: 91 Kč.

Řešení: Jaké byly firemní celkové tržby?

Postup: Sečteme tržby na všech pobočkách:

$$240 + 141 + 91 = 472\,\text{Kč}$$

Výsledek: Celkové tržby firmy byly 472 Kč.

Příklad: Tomášův nákup

Tomáš dostal od rodičů 300 Kč a seznam na nákup: 4 housky, 2 másla, 1 pomerančový džus, 15 dkg salámu a 2 jablka.
Blízko jeho domu jsou dva obchody, Tesco a Penny, ve kterých tyto věci (Kč za 1 kus nebo v tabulce uvedené množství) stojí:

	Tesco	**Penny**
Houska	3,00	2,80
Máslo	48	45
Džus	32	30
Salám (10 dkg)	25	28
Jablko	12	10

Peníze, které mu po nákupu zbudou, si může nechat. Do kterého obchodu je pro něj výhodnější jít? Kolik mu zbyde?

Řešení: Tomášův nákup

Ceny v obchodech:

- **Tesco:** Vektor cen: $\vec{c}_T = (3{,}00; 48; 32; 25; 12)$
- **Penny:** Vektor cen: $\vec{c}_P = (2{,}80; 45; 30; 28; 10)$
- Vektor počtu položek: $\vec{q} = (4; 2; 1; 1{,}5; 2)$

Náklady v Tescu:

$$\vec{c}_T \cdot \vec{q} = 3{,}00 \cdot 4 + 48 \cdot 2 + 32 \cdot 1 + 25 \cdot 1{,}5 + 12 \cdot 2 = 201{,}50\,\text{Kč}.$$

Náklady v Penny:

$$\vec{c}_P \cdot \vec{q} = 2{,}80 \cdot 4 + 45 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 28 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 2 = 193{,}20\,\text{Kč}.$$

Závěr:

- V Tescu Tomáš zaplatí 201,50 Kč.
- V Penny Tomáš zaplatí 193,20 Kč.
- **Penny** je pro Tomáše výhodnější.
- Zbyde mu $300 - 193{,}20 = 106{,}80$ Kč.

Matice

Historie pojmu „matice“

- **Původ slova:** lat. *matrix* = „děloha“, „matka“, „zdroj“ (od *m?ter* = matka).
- **Obrazný význam:** označovalo místo, kde se něco tvoří nebo vyvíjí.
- **Další obory:** v geologii „matrix“ = základní horninová hmota s krystaly/fosiliemi.
- **V matematice:**
  - 1850 – James J. Sylvester použil „matrix“ jako obdélníkové pole termínů,
  - determinanty byly chápány jako „potomci“ matice.
- **Cayley (1858):** první systematická práce o maticích a jejich algebře.
- **Proč „matice“?** ? vnímána jako „matka“ nebo „zdroj“ dalších objektů (determinantů, operací).

Matice

Schéma $m \times n$ reálných čísel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

- matice typu (m, n) (tvořena m řádky a n sloupci).
- Čísla a_{ij} jsou prvky matice.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}$ je typu $(3, 3)$ $\quad$ $\mathbf{C}$ je typu $(4, 2)$ $\quad$ $\mathbf{D}$ je typu $(2, 4)$

Diagonální prvky matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

- Prvky a_{ii} se nazývají diagonální a tvoří hlavní diagonálu.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Pojmenované typy matic

Horní lichoběžníková matice $(m \leq n)$

- všechny diagonální prvky nenulové
- a všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové;
- v případě $(m = n)$ **horní trojúhelníková matice**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ \boxed{0} & 6 & 4 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

horní lichoběžníková

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{0} & 6 & 4 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 3 \end{pmatrix}$$

horní $\triangle$

Pojmenované typy matic

Matici typu (m, n), která má všechny prvky nulové nazýváme **nulová matice** $\mathbf{O}_{mn}$.

$$\mathbf{O}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{O}_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jestliže $m = n$, pak matici nazýváme **čtvercová** matice

Jestliže $m \neq n$, pak ji nazýváme **obdélníková** matice.

Pojmenované typy matic

Čtvercovou matici typu (n, n), jejíž všechny diagonální prvky jsou rovny jedné a všechny ostatní prvky rovny nule, nazýváme **jednotková** matice a značíme $\mathbf{E}_n$

$$\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pojmenujte různé typy matic

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

- **A**:
- **B**:
- **C**:
- **D**:
- **E**:
- **F**:

Různé typy matic

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

- **A**: obdélníková (4,5) + horní lichoběžníková matice
- **B**: čtvercová (3,3) + horní trojúhelníková matice
- **C**: čtvercová matice (2,2)
- **D**: čtvercová (3,3) + jednotková matice
- **E**: čtvercová (3,3) + nulová matice
- **F**: obdélníková matice (2,4)

Matice

- **Transponovaná** matice k matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice

$$\mathbf{A}^T = (a_{ji}).$$

1. řádek se stane 1. sloupcem, 2. řádek se stane 2. sloupcem, ...

Příklad

Určete transponovanou matici k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Základní operace s maticemi

- **Součin** čísla α a matice $\mathbf{A}$:

$$\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})$$

(každý prvek matice $\mathbf{A}$ vynásobíme číslem α, výsledkem je opět matice typu (m, n)).

Násobení matice číslem

$$2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix},$$

Základní operace s maticemi

- **Součet** matic **A** a **B** (obě typu (m, n)):

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})$$

  - sčítáme podle pozic po prvcích (jako u součtu vektorů),
  - výsledkem je opět matice typu (m, n),
  - matice **A** a **B** musí být stejného typu.

Sčítání matic

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2 & 2+5 & 7-1 \\ 1+3 & 4-8 & -2+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Základní operace s maticemi

- Pro matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, které jsou typu (m, n), nulovou matici $\mathbf{O}_{mn}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ platí:
    - $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
    - $\mathbf{A} + \mathbf{O}_{mn} = \mathbf{A}$,
    - $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$.

Základní operace s maticemi – **násobení matic**

Nechť

- $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n)
- $\mathbf{B} = (b_{ij})$ je typu (n, p) (počet řádků $\mathbf{B}$ = počet sloupců $\mathbf{A}$)
- Potom existuje součin matic $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (matice typu (m, p))
- Prvky matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ vypočteme jako skalární součiny:
  - $c_{11} =$ (1. řádek $\mathbf{A}$) $\cdot$ (1. sloupec $\mathbf{B}$)
  - $c_{12} =$ (1. řádek $\mathbf{A}$) $\cdot$ (2. sloupec $\mathbf{B}$) ...
  - $c_{ij} =$ (i-tý řádek $\mathbf{A}$) $\cdot$ (j-tý sloupec $\mathbf{B}$) ...
- Zapsáno po složkách

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

Úloha (Násobení matic)

Vypočtěte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *pro matice* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *a* $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Matice $\mathbf{A}$ (2, 2) má dva sloupce a matice $\mathbf{B}$ (2 ,3) dva řádky, součin $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ tedy existuje. Výsledná matice bude mít dva řádky (=počet řádků matice $\mathbf{A}$) a tři sloupce (=počet sloupců matice $\mathbf{B}$).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Násobení matic

- V předchozím případě nelze vypočítat $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, neboť matice $\mathbf{B}$ má jiný počet sloupců (3) než má matice $\mathbf{A}$ řádků (2).
- Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ jsou matice a $\mathbf{E}$ je jednotková matice (vhodného rozměru). Potom každá z rovností
  - $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$,
  - $\mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$,
  - $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$,
  - $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$,

  platí, pokud mají příslušné operace smysl.

Index bídy: Definice

- Index bídy je ekonomický ukazatel, který se počítá jako součet míry inflace a míry nezaměstnanosti.
- Výpočet:

$$\text{Index bídy} = \text{Míra inflace} + \text{Míra nezaměstnanosti.}$$

- Vyšší hodnota indexu značí horší ekonomickou situaci pro obyvatele.

Index bídy: Příklad s reálnými daty

Mějme následující reálná data o inflaci a nezaměstnanosti:

Stát	2001	2002	2003	2004	2005
Německo	1,9%	1,4%	1,0%	1,6%	1,8%
Nizozemsko	4,5%	3,4%	2,1%	1,2%	1,7%
Velká Británie	1,2%	1,3%	1,4%	1,3%	1,9%
Španělsko	3,6%	3,5%	3,0%	3,1%	3,4%

Tabulka: Průměrná roční míra inflace (2001–2005)

Stát	2001	2002	2003	2004	2005
Německo	8,3%	8,7%	9,3%	10,5%	11,1%
Nizozemsko	2,5%	2,8%	3,7%	4,6%	4,7%
Velká Británie	5,1%	5,0%	4,9%	4,7%	4,7%
Španělsko	10,5%	11,5%	11,0%	10,8%	9,2%

Tabulka: Průměrná roční míra nezaměstnanosti (2001–2005)

Index bídy: Příklad s reálnými daty

Index bídy vypočteme jako součet matic:

$$\text{Index bídy} = \text{Inflace} + \text{Nezaměstnanost}$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}9 & 1{,}4 & 1{,}0 & 1{,}6 & 1{,}8 \\ 4{,}5 & 3{,}4 & 2{,}1 & 1{,}2 & 1{,}7 \\ 1{,}2 & 1{,}3 & 1{,}4 & 1{,}3 & 1{,}9 \\ 3{,}6 & 3{,}5 & 3{,}0 & 3{,}1 & 3{,}4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8{,}3 & 8{,}7 & 9{,}3 & 10{,}5 & 11{,}1 \\ 2{,}5 & 2{,}8 & 3{,}7 & 4{,}6 & 4{,}7 \\ 5{,}1 & 5{,}0 & 4{,}9 & 4{,}7 & 4{,}7 \\ 10{,}5 & 11{,}5 & 11{,}0 & 10{,}8 & 9{,}2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10{,}2 & 10{,}1 & 10{,}3 & 12{,}1 & 12{,}9 \\ 7{,}0 & 6{,}2 & 5{,}8 & 5{,}8 & 6{,}4 \\ 6{,}3 & 6{,}3 & 6{,}3 & 6{,}0 & 6{,}6 \\ 14{,}1 & 15{,}0 & 14{,}0 & 13{,}9 & 12{,}6 \end{pmatrix}$$

Index bídy: Příklad s reálnými daty

Stát	2001	2002	2003	2004	2005
Německo	10,2%	10,1%	10,3%	12,1%	12,9%
Nizozemsko	7,0%	6,2%	5,8%	5,8%	6,4%
Velká Británie	6,3%	6,3%	6,3%	6,0%	6,6%
Španělsko	14,1%	15,0%	14,0%	13,9%	12,6%

Tabulka: Index bídy (2001–2005)

Závěr:

- Země s vyšším indexem bídy čelí průměrně horším ekonomickým podmínkám pro obyvatelstvo.

Praktický příklad – zadání

Firma vyrábí 2 druhy výrobků V_1 a V_2, přitom:

výrobek	doba výroby (1 ks)	spotřebovaný materiál na 1 ks
V_1	4 hod	2 kg
V_2	3 hod	3 kg

- 1 hodina výroby stojí 3 500 Kč a materiál stojí 2 000 Kč za 1 kg.
- 1 ks V_1 se prodává za 26 500 Kč a 1 ks V_2 za 21 000 Kč.

a) Kolik stojí výroba 1 ks jednotlivých výrobků?

b) Jaký zisk přinese prodej 1 ks jednotlivých výrobků?

Výpočet výrobních nákladů

Nejprve vypočítáme výrobní náklady na 1 ks výrobku pomocí matic. Mějme matici **A**, která reprezentuje dobu výroby a spotřebu materiálu:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Dále mějme vektor $\vec{b}$, který obsahuje náklady na hodinu výroby a cenu materiálu za 1 kg:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3\,500 \\ 2\,000 \end{pmatrix}$$

Nyní spočítáme výrobní náklady jako maticový součin:

$$\text{Náklady} = \mathbf{A} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3\,500 \\ 2\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19\,000 \\ 16\,500 \end{pmatrix} \text{ Kč}$$

Výpočet zisku z prodeje

Zisk z prodeje 1 ks každého výrobku vypočítáme jako rozdíl mezi prodejní cenou a výrobními náklady.
Prodejní ceny:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 26\,500 \\ 21\,000 \end{pmatrix}$$

Zisk spočítáme jako rozdíl mezi prodejní cenou a výrobními náklady:

$$\text{Zisk} = \mathbf{C} - \text{Náklady} = \begin{pmatrix} 26\,500 \\ 21\,000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19\,000 \\ 16\,500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,500 \\ 4\,500 \end{pmatrix} \text{ Kč}$$

Závěr

a) Náklady na výrobu 1 ks výrobku jsou:
   - V_1: 19 000 Kč,
   - V_2: 16 500 Kč.

b) Zisk z prodeje 1 ks výrobku je:
   - V_1: 7 500 Kč,
   - V_2: 4 500 Kč.