Matematika pro ekonomickou praxi 1

Jiří Fišer

25. září 2025

Co se v tomto předmětu naučíte?

Nemusíte se matematiky bát! Společně se podíváme na několik základních témat, která vám mohou pomoci i v ekonomii. Bude to krok za krokem.

- Zjistíme, co je to výroková logika a jak určujeme pravdivost výroků.
- Naučíme se pracovat s množinami a množinovými operacemi.
- Probereme vektorový počet a jeho využití.
- Podíváme se na matice a jejich použití v ekonomii.
- Naučíme se počítat determinanty a využívat je při řešení problémů.
- Budeme řešit soustavy lineárních rovnic a jejich aplikaci.
- Probereme číselné posloupnosti a řady a jejich význam.
- Naučíme se počítat limity posloupností a součty řad.

Matematika pro ekonomii

Vše, co se naučíte, vám pomůže lépe porozumět ekonomickým problémům.

- Číselné posloupnosti vám pomohou modelovat ekonomické trendy.
- S maticemi budete lépe rozumět statistikám a analýzám dat.
- Řešení soustav rovnic je užitečné při práci s různými proměnnými v ekonomických modelech.
- Limity nám ukážou, jak se bude systém chovat v dlouhodobém horizontu.

Praktické využití matematiky

Nebudeme se učit teorii jen pro teorii. Vše, co si ukážeme, budete moci aplikovat na reálné problémy.

- Naučíte se, jak aplikovat matematiku na konkrétní ekonomické situace.
- Získáte schopnost vyhodnocovat data a porozumět vztahům mezi proměnnými.
- Budete mít jistotu při práci s matematickými nástroji pro ekonomické problémy.

Shrnutí

Co si odnesete?

- Schopnost definovat základní pojmy a využít je v praxi.
- Dovednost pracovat s matematickými nástroji pro řešení ekonomických problémů.
- Matematické sebevědomí!

RNDr. Jiří Fišer, Ph.D.

- IS MVŠO
  - **Interaktivní osnova předmětu**
    - *https://is.mvso.cz/auth/el/mvso/zima2025/P1MEP/index.qwarp*
    - zdroj informací a souborů,
    - odevzdávárna pro zápočtové úlohy,
- **Konzultační hodiny:**
  - Pondělí 13:00-14:30
  - Úterý 11:30-13:00

  (Jinak po dohodě e-mailem.)
- 8698@mail.mvso.cz

Obsah předmětu 1/3

1. Výroková logika. (Výroková forma a její pravdivostní hodnota.)
2. Množiny. (Definice. Operace na množinách. Číselné množiny.)
3. Vektorový počet. (Operace s vektory. Lineární závislost a nezávislost vektorů. Vektorové prostory.)
4. Matice a jejich využití v ekonomických aplikacích. (Typy matic. Operace s maticemi. Hodnost matice. Výpočet celkové produkce a zisku pomocí maticových operací. Optimalizační úlohy řešené pomocí maticových operací.)
5. Determinanty a jejich využití v ekonomické praxi. (Vlastnosti determinantů. Výpočet determinantu. Stanovení inverzní matice. Výpočet produkce využitím inverzní matice. Šifrování.)

Obsah předmětu 2/3

6. Soustavy lineárních rovnic. (Geometrické řešení soustav dvou rovnic pro dvě neznámé. Frobeniova věta.)
7. Řešení soustav lineárních rovnic a jejich využití v ekonomických aplikacích. (Gaussova eliminační metoda. Cramerovo pravidlo. Produkční matice a výpočet produkce pomocí soustavy lineárních rovnic. Výpočet minimální produkce zaručující návratnost investičních nákladů.)
8. Číselné posloupnosti a jejich využití v ekonomické praxi. (Definice posloupnosti. Způsoby zadávání a grafické znázornění posloupnosti. Vlastnosti posloupnosti. Geometrická a aritmetická posloupnost. Využití posloupností při úročení a spoření.)

Obsah předmětu 3/3

9. Limita posloupnosti. (Definice limit posloupnosti. Výpočet limit posloupnosti.)

10. Číselné řady a jejich využití v ekonomických aplikacích. (Konvergence číselné řady. Geometrická řada a její využití v praxi.)

11. Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy.

12. Řady s libovolnými členy. (Alternující řada. Leibnizovo kritérium. Absolutní konvergence řad s libovolnými členy.)

Zakončení předmětu

- **Zápočet:**
  - aktivní účast na cvičeních,
  - maximálně 3 neomluvené absence,
  - vypracování zápočtové práce.
- **Zkouška:**
  - Písemná: příklady + teorie
  - Povolen: 1 ručně psaný a podepsaný tahák A4 (ne tištěný)
  - Podmínka: min. 50 % z příkladů i z teorie
  - Plus bonusové body → výsledná známka
  - Možný následný rozhovor k písemce (opravy, dovysvětlení, sporné případy)

Ukázka zkouškové písemky: příklady

Příklad 1. Určete, pro která reálná čísla x platí $|x-6| \geq 3$.

Příklad 2. Řešte soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= -4, \\ 2x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Příklad 3. Vypočítejte determinanty $\det(A)$ a $\det(B)$, je-li to možné:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4. Firma prodává 3 druhy zboží (x, y, z) na 4 pobočkách.

Zisky z jednoho prodaného kusu jsou: 60 Kč za x, 40 Kč za y a 80 Kč za z.

Na jednotlivých pobočkách prodali:

pobočka	x	y	z
1	0	2	7
2	2	3	0
3	0	1	2
4	1	0	2

Vypočtěte pomocí maticového počtu zisky na jednotlivých pobočkách a celkový zisk firmy.

Ukázka zkouškové písemky: teorie

Příklad 5 (Teoretické otázky).

a) Kdy je pravdivá konjunkce (disjunkce, implikace, ekvivalence)?

b) Jaký je rozdíl mezi singulární a regulární maticí?

c) Co je to Cramerovo pravidlo a kdy jej lze použít?

d) Co plyne z nesplnění nutné podmínky konvergence číselné řady?

Matematický výklad: použití definic, vět a důkazů

V matematice často pracujeme s:

- **Definicemi**, které vysvětlují nové pojmy,
- **Větami**, které jsou důležitými tvrzeními, a
- **Důkazy**, které ověřují správnost vět.

V našem předmětu se ale více zaměříme na:

- **Definice** a vysvětlení základních pojmů,
- **Počítání příkladů** a uvádění postupů.

Pokud budeme potřebovat nějakou matematickou větu, uvedeme ji **bez důkazu** a budeme se soustředit na její použití.

Náš pracovní postup v tomto semestru

Cvičení před přednáškou

1. Na cvičení:

- Skočíme rovnou do praxe.
- Vyzkoušíte si řešit konkrétní příklady.
- Objevíte, kde vám co není jasné.

2. Na přednášce:

- Vše si shrneme a teoreticky ukotvíme.
- Zaměříme se na to, proč postupy fungují.
- Představíme si látku na další týden.

Pojďme se tedy podívat, co jste si vyzkoušeli na prvním cvičení!

Ohlédnutí za cvičením 1: Množiny a intervaly

Klíčové pojmy, které jste potkali

Množina, prvek ($\in$), podmnožina ($\subset$), sjednocení ($\cup$), průnik ($\cap$), rozdíl ($\setminus$).

Dotaz

Na cvičení jste pracovali s množinami $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{2, 3, 5, 6\}$.

Co bylo jejich **průnikem** ($A \cap B$)?

$\rightarrow \{2, 3\}$ (prvky, které jsou v obou množinách zároveň)

A co bylo **rozdílem** $A \setminus B$?

$\rightarrow \{1, 4\}$ (prvky, které jsou v A, ale ne v B)

Podobně jste pracovali s intervaly, které jsou jen specifickým typem množin na číselné ose.

Ohlédnutí za cvičením 1: Množiny a intervaly

Klíčové pojmy, které jste potkali

Množina, prvek ($\in$), podmnožina ($\subset$), sjednocení ($\cup$), průnik ($\cap$), rozdíl ($\setminus$).

Dotaz

Na cvičení jste pracovali s množinami $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{2, 3, 5, 6\}$.

Co bylo jejich **průnikem** ($A \cap B$)?

$\rightarrow \{2, 3\}$ (prvky, které jsou v obou množinách zároveň)

A co bylo **rozdílem** $A \setminus B$?

$\rightarrow \{1, 4\}$ (prvky, které jsou v A, ale ne v B)

Podobně jste pracovali s intervaly, které jsou jen specifickým typem množin na číselné ose.

Ohlédnutí za cvičením 1: Množiny a intervaly

Klíčové pojmy, které jste potkali

Množina, prvek ($\in$), podmnožina ($\subset$), sjednocení ($\cup$), průnik ($\cap$), rozdíl ($\setminus$).

Dotaz

Na cvičení jste pracovali s množinami $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{2, 3, 5, 6\}$.

Co bylo jejich **průnikem** ($A \cap B$)?

$\rightarrow \{2, 3\}$ (prvky, které jsou v obou množinách zároveň)

A co bylo **rozdílem** $A \setminus B$?

$\rightarrow \{1, 4\}$ (prvky, které jsou v A, ale ne v B)

Podobně jste pracovali s intervaly, které jsou jen specifickým typem množin na číselné ose.

Množiny

Používané symboly:

- $a \in A$ – a je prvkem množiny A (a patří do A),
- $a \notin A$ – a není prvkem množiny A (a nepatří do A),
- $A \subset B$ – A je podmnožinou B.

Operace s množinami:

- $A \cup B$ – sjednocení = množina, kterou tvoří prvky, které leží v A nebo v B (tzn. alespoň v jedné z množin A a B),
- $A \cap B$ – průnik = množina, kterou tvoří prvky, které leží současně v A i B,
- $A \setminus B$ – rozdíl = množina, kterou tvoří prvky, které leží v A a současně neleží v B.

Základní číselné množiny

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ je množina všech *přirozených* čísel.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ je množina všech *celých* čísel.
- $\mathbb{Q}$ — množina všech zlomků $\left\{\frac{k}{n},\ \text{kde } k \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}\right\}$ je množinou všech čísel *racionálních*.

Racionální čísla

Úloha

Číslo $a = 1{,}5\overline{72}$ *převeďte na obyčejný zlomek.*

Řešení

Využijeme nekonečného periodického opakování:

$$\begin{aligned} a &= 1{,}5\overline{72}, \\ 100a &= 157{,}2\overline{72}, \\ 100a - a = 99a &= 157{,}2\overline{72} - 1{,}5\overline{72} = 155{,}7, \\ a &= \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}. \end{aligned}$$

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}',$$

kde $\mathbb{Q}'$ je množina tzv. iracionálních čísel

- $\mathbb{R}$ je základní číselná množina.
- Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose.
- Každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Pro číselné množiny platí:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Ohraničenost (omezenost) číselných množin

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}, \quad M_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots\right\},$$

$$M_3 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Ohraničenost (omezenost) číselných množin

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}, \quad M_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots\right\},$$

$$M_3 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Ohraničenost (omezenost) číselných množin

Definice

Množina M se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow$

- $\exists L \in \mathbb{R}$ *tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \leq L$.
  - *Toto číslo L se nazývá* **horní odhad** *(resp. horní závora).*

Množina M se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow$

- $\exists K \in \mathbb{R}$ *tak, že* $\forall x \in M$ *platí* $x \geq K$.
  - *Toto číslo K se nazývá* **dolní odhad** *(resp. dolní závora).*

Množina M se nazývá **omezená** $\Leftrightarrow$ *je omezená shora i zdola.*

Ohraničenost (omezenost) číselných množin

Největší a nejmenší prvek množiny

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Intervaly

Definice

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *definujeme*

uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

a podobně $\langle a, b)$ *a* $(a, b\rangle$.

Všechny tyto intervaly mají délku $b - a$.

Definice

- *Množinu* $\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ *nazýváme* **neomezený interval**.
- *Podobně* $(a, +\infty)$, $(-\infty, b\rangle$, $(-\infty, b)$.
- *Množinu* $\mathbb{R}$ *zapisujeme též jako* $(-\infty, +\infty)$.

Rozšířená reálná osa

- Číselnou osu rozšíříme o dvě nevlastní čísla: $+\infty$ a $-\infty$.
- Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje lépe a jednodušeji pracovat například s limitami posloupností a funkcí.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- *Uspořádání*:

  $$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

  zvláště

  $$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

  $$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

Početní operace s nevlastními čísly

Úloha

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

Početní operace s nevlastními čísly

$$
\begin{aligned}
a &= +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty} \\
&= \infty - (-\infty) + (-\infty) \cdot (-\infty) - 0 \\
&= \infty + \infty + \infty - 0 = \infty
\end{aligned}
$$

Poznámka

Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ *jen* ∞*, takže např. místo výrazu* $(+\infty) + (+\infty)$ *lze napsat jen* $\infty + \infty$.

Početní operace s nevlastními čísly

- *Sčítání a odčítání*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\pm x + (+\infty) = (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) =$$

$$= (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

$$\pm x + (-\infty) = (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) =$$

$$= (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty).$$

Početní operace s nevlastními čísly

- *Násobení*: $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

  Podobně pro $x < 0$.

- *Nedefinujeme*

$$0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

Početní operace s nevlastními čísly

- *Dělení*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

Pro $x > 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

pro $x < 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, atd., $\frac{x}{0}$ pro žádné $x \in \mathbb{R}$, tj. ani $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\pm\infty}{0}$.

Početní operace s nevlastními čísly

- *Mocniny*: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

Ohlédnutí za cvičením 1: Absolutní hodnota

Klíčová myšlenka: Absolutní hodnota jako VZDÁLENOST

Zápis $|a|$ znamená vzdálenost čísla a od nuly na číselné ose. Proto je vždy nezáporná.

- $|-3| = 3$ (vzdálenost čísla -3 od 0 je 3)
- $|5| = 5$ (vzdálenost čísla 5 od 0 je 5)

Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Na cvičení jste řešili např. $|x-2| = 3$. Jak to číst?

„Najdi všechna čísla x, jejichž vzdálenost od bodu 2 je přesně 3.“

Okamžitě vidíme, že řešením musí být $x = -1$ a $x = 5$.

Ohlédnutí za cvičením 1: Absolutní hodnota

Klíčová myšlenka: Absolutní hodnota jako VZDÁLENOST

Zápis $|a|$ znamená vzdálenost čísla a od nuly na číselné ose. Proto je vždy nezáporná.

- $|-3| = 3$ (vzdálenost čísla -3 od 0 je 3)
- $|5| = 5$ (vzdálenost čísla 5 od 0 je 5)

Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

Na cvičení jste řešili např. $|x-2| = 3$. Jak to číst?

„Najdi všechna čísla x, jejichž vzdálenost od bodu 2 je přesně 3.“

Okamžitě vidíme, že řešením musí být $x = -1$ a $x = 5$.

Absolutní hodnota

$$|-5| = 5, \quad |0| = 0, \quad |5| = 5$$

Definice

Absolutní hodnota *čísla* $a \in \mathbb{R}$ *se označuje* $|a|$ *a je definována takto:*

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \textit{pro } a \geq 0, \\ -a & \textit{pro } a < 0. \end{cases}$$

Geometrický význam absolutní hodnoty

- $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy,
- $|a-b|$ $(= |b-a|)$ vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose.

Absolutní hodnota

Věta (vlastnosti absolutní hodnoty)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ *platí*

1. $|a| \geq 0$, *přičemž* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(trojúhelníkovou nerovnost)*,
4. $|a-b| \geq |a| - |b|$,
5. $|ab| = |a| \cdot |b|$,
6. *pro* $b \neq 0$ *je* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Absolutní hodnota

Úloha

Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x-3| < 2,$

b) $2|x+2| - 3|x| - 2x \geq 4,$

c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}|x+1| - \frac{3}{4}|x-2| = 0.$

Výroková logika

Proč se zabýváme logikou v ekonomii?

Logika je základem pro jasné a přesné rozhodování. Pomáhá nám:

- Formulovat obchodní strategie („*Pokud se zvýší poptávka, navýšíme výrobu.*“)
- Analyzovat data v Excelu nebo databázích (filtry pomocí AND, OR, NOT).
- Rozumět podmínkám v modelech a smlouvách („*Pro všechny pobočky platí...*“, „*Existuje alespoň jeden trh, kde...*“)

Základní pojmy

- **Výrok**: Tvrzení, o kterém můžeme jednoznačně říci, zda je pravdivé (1) nebo nepravdivé (0).

Výroková logika

Proč se zabýváme logikou v ekonomii?

Logika je základem pro jasné a přesné rozhodování. Pomáhá nám:

- Formulovat obchodní strategie („*Pokud se zvýší poptávka, navýšíme výrobu.*“)
- Analyzovat data v Excelu nebo databázích (filtry pomocí AND, OR, NOT).
- Rozumět podmínkám v modelech a smlouvách („*Pro všechny pobočky platí...*“, „*Existuje alespoň jeden trh, kde...*“)

Základní pojmy

- **Výrok**: Tvrzení, o kterém můžeme jednoznačně říci, zda je pravdivé (1) nebo nepravdivé (0).

Výroková logika

Proč se zabýváme logikou v ekonomii?

Logika je základem pro jasné a přesné rozhodování. Pomáhá nám:

- Formulovat obchodní strategie („*Pokud se zvýší poptávka, navýšíme výrobu.*“)
- Analyzovat data v Excelu nebo databázích (filtry pomocí AND, OR, NOT).
- Rozumět podmínkám v modelech a smlouvách („*Pro všechny pobočky platí...*“, „*Existuje alespoň jeden trh, kde...*“)

Základní pojmy

- **Výrok**: Tvrzení, o kterém můžeme jednoznačně říci, zda je pravdivé (1) nebo nepravdivé (0).

Výrokové operace

Spojujeme jednoduché výroky do složitějších pomocí logických operátorů.

- **Konjunkce ($\wedge$, AND)**: Platí oba výroky současně.
- **Disjunkce ($\vee$, OR)**: Platí alespoň jeden z výroků.
- **Negace ($\neg$, NOT)**: Opak původního výroku.

Příklad

p: „Zvýšili jsme výdaje na marketing." (1) **q**: „Prodeje vzrostly o více než 10 %." (1) $p \wedge q$: „Zvýšili jsme výdaje na marketing **a zároveň** prodeje vzrostly." (1)

Tabulka pravdivostních hodnot - Cvičení

Cvičení pro vás

Jak bude vypadat výsledek pro disjunkci (NEBO)? Zkuste si doplnit poslední sloupeček.

p	**q**	$p \wedge q$ (A)	$p \vee q$ (NEBO)
1	1	1	?
1	0	0	?
0	1	0	?
0	0	0	?

Odpověď na dalším snímku...

Tabulka pravdivostních hodnot - Cvičení

Cvičení pro vás

Jak bude vypadat výsledek pro disjunkci (NEBO)? Zkuste si doplnit poslední sloupeček.

p	**q**	$p \wedge q$ (A)	$p \vee q$ (NEBO)
1	1	1	?
1	0	0	?
0	1	0	?
0	0	0	?

Odpověď na dalším snímku...

Tabulka pravdivostních hodnot - Řešení

Správné řešení

Disjunkce je pravdivá, pokud je pravdivý alespoň jeden vstup.

p	**q**	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Implikace a ekvivalence v rozhodování

- **Implikace (⇒, POKUD...PAK)**: Z prvního výroku plyne druhý.
  - Nepravdivá je pouze v jednom případě: slib (první výrok) byl dán (1), ale nebyl splněn (druhý výrok je 0).
  - *Příklad: „Pokud ČNB zvýší úrokové sazby (p), pak klesne poptávka po hypotékách (q).“*
- **Ekvivalence (⇔, PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ)**: Oba výroky platí nebo neplatí společně.
  - Mají vždy stejnou pravdivostní hodnotu.
  - *Příklad: „Firma dosáhne bonusu právě tehdy, když splní plán prodejů.“*

Implikace a ekvivalence v rozhodování

- **Implikace (⇒, POKUD...PAK)**: Z prvního výroku plyne druhý.
  - Nepravdivá je pouze v jednom případě: slib (první výrok) byl dán (1), ale nebyl splněn (druhý výrok je 0).
  - *Příklad: „Pokud ČNB zvýší úrokové sazby (p), pak klesne poptávka po hypotékách (q).“*
- **Ekvivalence (⇔, PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ)**: Oba výroky platí nebo neplatí společně.
  - Mají vždy stejnou pravdivostní hodnotu.
  - *Příklad: „Firma dosáhne bonusu právě tehdy, když splní plán prodejů.“*

Příklad: Jak funguje implikace?

Výrok: „Pokud naše tržby přesáhnou 1 milion (p), dostanete prémie (q).“

p: Tržby > 1M	**q**: Prémie	$p \Rightarrow q$	**Vysvětlení**
1 (splněno)	1 (dostali)	1 (Pravda)	Slib byl dodržen.
1 (splněno)	0 (nedostali)	0 (Nepravda)	**Slib byl porušen!**
0 (nesplněno)	1 (dostali)	1 (Pravda)	Slib nebyl porušen (prémie jsou i tak).
0 (nesplněno)	0 (nedostali)	1 (Pravda)	Slib nebyl porušen.

Příklad: Jak funguje implikace?

Výrok: „Pokud naše tržby přesáhnou 1 milion (p), dostanete prémie (q).“

p: Tržby > 1M	**q**: Prémie	$p \Rightarrow q$	**Vysvětlení**
1 (splněno)	1 (dostali)	1 (Pravda)	Slib byl dodržen.
1 (splněno)	0 (nedostali)	0 (Nepravda)	**Slib byl porušen!**
0 (nesplněno)	1 (dostali)	1 (Pravda)	Slib nebyl porušen (prémie jsou i tak).
0 (nesplněno)	0 (nedostali)	1 (Pravda)	Slib nebyl porušen.

Příklad: Jak funguje implikace?

Výrok: „Pokud naše tržby přesáhnou 1 milion (p), dostanete prémie (q).“

p: Tržby $>$ 1M	**q**: Prémie	$p \Rightarrow q$	**Vysvětlení**
1 (splněno)	1 (dostali)	1 (Pravda)	Slib byl dodržen.
1 (splněno)	0 (nedostali)	0 (Nepravda)	**Slib byl porušen!**
0 (nesplněno)	1 (dostali)	1 (Pravda)	Slib nebyl porušen (prémie jsou i tak).
0 (nesplněno)	0 (nedostali)	1 (Pravda)	Slib nebyl porušen.

Příklad: Jak funguje implikace?

Výrok: „Pokud naše tržby přesáhnou 1 milion (p), dostanete prémie (q).“

p: Tržby > 1M	**q**: Prémie	$p \Rightarrow q$	**Vysvětlení**
1 (splněno)	1 (dostali)	1 (Pravda)	Slib byl dodržen.
1 (splněno)	0 (nedostali)	0 (Nepravda)	**Slib byl porušen!**
0 (nesplněno)	1 (dostali)	1 (Pravda)	Slib nebyl porušen (prémie jsou i tak).
0 (nesplněno)	0 (nedostali)	1 (Pravda)	Slib nebyl porušen.

Kvantifikátory: Kolika prvků se tvrzení týká?

- Kvantifikátory upřesňují, zda se tvrzení vztahuje na všechny prvky, nebo stačí alespoň jeden.
- Existují dva základní typy:
  - **Obecný kvantifikátor ($\forall$)**: Čteme jako *„Pro všechny...“*, *„Pro každé...“*.

    Vyjadřuje, že tvrzení platí pro **všechny** prvky dané množiny.
  - **Existenční kvantifikátor ($\exists$)**: Čteme jako *„Existuje alespoň jeden...“*.

    Vyjadřuje, že existuje **alespoň jeden** prvek, pro který tvrzení platí.

Obecný kvantifikátor ($\forall$) v praxi

Příklad

Výrok: „Pro **všechny** naše produkty platí, že jejich prodejní cena je vyšší než výrobní náklady.“ **Schematicky:**

$\forall x \in \text{NašeProdukty} : \text{Cena}(x) > \text{Náklady}(x)$

Negace tohoto výroku

Co by znamenalo, kdyby původní výrok nebyl pravdivý? **Negace: „Existuje alespoň jeden** náš produkt, jehož prodejní cena **není** vyšší než výrobní náklady.“ **Schematicky:** $\exists x \in \text{NašeProdukty} : \text{Cena}(x) \leq \text{Náklady}(x)$

(Tj. máme proděločný produkt!)

Obecný kvantifikátor ($\forall$) v praxi

Příklad

Výrok: „Pro **všechny** naše produkty platí, že jejich prodejní cena je vyšší než výrobní náklady." **Schematicky:**

$$\forall x \in \text{NašeProdukty} : \text{Cena}(x) > \text{Náklady}(x)$$

Negace tohoto výroku

Co by znamenalo, kdyby původní výrok nebyl pravdivý? **Negace:** „**Existuje alespoň jeden** náš produkt, jehož prodejní cena **není** vyšší než výrobní náklady." **Schematicky:** $\exists x \in \text{NašeProdukty} : \text{Cena}(x) \leq \text{Náklady}(x)$

(Tj. máme prodělečný produkt!)

Existenční kvantifikátor (∃) v praxi

Příklad

Výrok: „**Existuje** na trhu konkurent, který prodává srovnatelný produkt za nižší cenu.“ **Schematicky:** $\exists k \in \text{Konkurenti} : \text{Cena}(k) < \text{NašeCena}$

Negace tohoto výroku

Co by znamenalo, kdyby původní výrok nebyl pravdivý? **Negace:** „Pro **všechny** konkurenty na trhu platí, že jejich cena **není** nižší než naše.“

Schematicky: $\forall k \in \text{Konkurenti} : \text{Cena}(k) \geq \text{NašeCena}$

(Tj. nikdo není levnější.)

Existenční kvantifikátor ($\exists$) v praxi

Příklad

Výrok: „**Existuje** na trhu konkurent, který prodává srovnatelný produkt za nižší cenu." **Schematicky:** $\exists k \in \text{Konkurenti} : \text{Cena}(k) < \text{NašeCena}$

Negace tohoto výroku

Co by znamenalo, kdyby původní výrok nebyl pravdivý? **Negace:** „Pro **všechny** konkurenty na trhu platí, že jejich cena **není** nižší než naše."

Schematicky: $\forall k \in \text{Konkurenti} : \text{Cena}(k) \geq \text{NašeCena}$

(Tj. nikdo není levnější.)

Využití kvantifikátorů v matematice a ekonomii

- **V teorii množin**: Popisují vlastnosti množin, např. „Pro všechny prvky množiny A platí...“
- **V důkazech**: Umožňují vyjádřit obecná či existenční tvrzení, např. důkaz existence řešení rovnice.
- **V teorii čísel**: Používají se k vyjádření tvrzení o všech číslech nebo existenci konkrétních čísel.
- **V ekonomii**: Klíčové pro definování modelů a podmínek. Např. v teorii her: *„Existuje optimální strategie...“* nebo v makroekonomii: *„Pro všechny spotřebitele platí...“*

Cvičení - Analýza složeného výroku

Úkol

Pojďme společně analyzovat pravdivost tohoto výroku pomocí tabulky:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \vee q)$$

Postup:

- Rozložíme výrok na části: $p, q, r, \neg r, p \Rightarrow q, \neg r \vee q, \ldots$
- Vytvoříme tabulku pro všechny kombinace pravdivosti p, q, r.

Řešení na dalším snímku...

Tabulka pravdivostních hodnot:

p	q	r	$\neg r$	$p \Rightarrow q$	$\neg r \vee q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \vee q)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Vyhodnocení

Vidíme, že celkový výrok je pravdivý jen v 5 z 8 možných případů. Není tedy vždy pravdivý, ani vždy nepravdivý.

Tautologie: Výroky, které jsou vždy pravdivé

- **Tautologie** je výroková forma, která je vždy pravdivá, bez ohledu na pravdivost vstupních výroků.
- V pravdivostní tabulce má ve výsledném sloupci samé jedničky (1).
- **Příklad:** $(p \vee \neg p)$
  - *„Buď naše firma dosáhne zisku, nebo naše firma nedosáhne zisku.“*
  - Toto tvrzení je logicky vždy pravdivé.

Tautologie: Výroky, které jsou vždy pravdivé

- **Tautologie** je výroková forma, která je vždy pravdivá, bez ohledu na pravdivost vstupních výroků.
- V pravdivostní tabulce má ve výsledném sloupci samé jedničky (1).
- **Příklad:** $(p \vee \neg p)$
  - *„Buď naše firma dosáhne zisku, nebo naše firma nedosáhne zisku.“*
  - Toto tvrzení je logicky vždy pravdivé.

Kontradikce: Výroky, které jsou vždy nepravdivé

- **Kontradikce** (spor) je výroková forma, která je vždy nepravdivá.
- V pravdivostní tabulce má ve výsledném sloupci samé nuly (0).
- **Příklad:** $(p \wedge \neg p)$
  - *„Naše tržby jsou vyšší než 1 milion a zároveň naše tržby nejsou vyšší než 1 milion."*
  - Toto tvrzení je logický nesmysl, nemůže nikdy platit.

Kontradikce: Výroky, které jsou vždy nepravdivé

- **Kontradikce** (spor) je výroková forma, která je vždy nepravdivá.
- V pravdivostní tabulce má ve výsledném sloupci samé nuly (0).
- **Příklad:** $(p \wedge \neg p)$
  - *„Naše tržby jsou vyšší než 1 milion a zároveň naše tržby nejsou vyšší než 1 milion."*
  - Toto tvrzení je logický nesmysl, nemůže nikdy platit.

Co nás čeká příště?

Preview na cvičení č. 2:

Vektory v praxi

Cíl

Na příštím cvičení si osaháte základy operací s vektory. Dnes si ukážeme, proč jsou pro ekonomy tak užitečné a co vás čeká.

Co je to vektor?

Definice: Vektor si můžeme představit jako uspořádaný seznam čísel.

Každé číslo v seznamu nazýváme složka vektoru.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

Příklad z praxe

Představte si, že firma prodává 4 druhy zboží. Její denní prodeje na jedné pobočce můžeme zapsat jako vektor:

$$\vec{p} = (\underbrace{6}_{\text{kusů 1. zboží}}, \underbrace{0}_{\text{kusů 2. zboží}}, \underbrace{3}_{\text{kusů 3. zboží}}, \underbrace{8}_{\text{kusů 4. zboží}})$$

Tento jediný objekt (vektor) v sobě nese více informací najednou.

Co je to vektor?

Definice: Vektor si můžeme představit jako uspořádaný seznam čísel.

Každé číslo v seznamu nazýváme složka vektoru.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

Příklad z praxe

Představte si, že firma prodává 4 druhy zboží. Její denní prodeje na jedné pobočce můžeme zapsat jako vektor:

$$\vec{p} = (\underbrace{6}_{\text{kusů 1. zboží}}, \underbrace{0}_{\text{kusů 2. zboží}}, \underbrace{3}_{\text{kusů 3. zboží}}, \underbrace{8}_{\text{kusů 4. zboží}})$$

Tento jediný objekt (vektor) v sobě nese více informací najednou.

Základní operace s vektory

1. Sčítání vektorů (musí mít stejný počet složek)

Sčítáme jednoduše "složku po složce".

Příklad: Celkové prodeje ze dvou poboček.

$$\vec{p}_1 = (6, 0, 3, 8) \quad \vec{p}_2 = (10, 11, 0, 1)$$

$$\vec{p}_{celkem} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (6 + 10, 0 + 11, 3 + 0, 8 + 1) = (16, 11, 3, 9)$$

2. Násobení vektoru číslem (skalárem)

Každou složku vektoru vynásobíme daným číslem.

Příklad: Chceme zdvojnásobit výrobu.

$$2 \cdot (10, 5, 8) = (20, 10, 16)$$

Základní operace s vektory

1. Sčítání vektorů (musí mít stejný počet složek)

Sčítáme jednoduše "složku po složce".

Příklad: Celkové prodeje ze dvou poboček.

$$\vec{p}_1 = (6, 0, 3, 8) \quad \vec{p}_2 = (10, 11, 0, 1)$$

$$\vec{p}_{celkem} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (6 + 10, 0 + 11, 3 + 0, 8 + 1) = (16, 11, 3, 9)$$

2. Násobení vektoru číslem (skalárem)

Každou složku vektoru vynásobíme daným číslem.

Příklad: Chceme zdvojnásobit výrobu.

$$2 \cdot (10, 5, 8) = (20, 10, 16)$$

Klíčová operace: Skalární součin

Skalární součin nám umožňuje elegantně propojovat dva vektory (např. množství a ceny) a jeho výsledkem je jedno číslo (skalár).

Definice: Vynásobíme odpovídající si složky a výsledky sečteme.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Příklad

$$(1, 2, 3) \cdot (2, 0, -1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 2 + 0 - 3 = -1$$

Klíčová operace: Skalární součin

Skalární součin nám umožňuje elegantně propojovat dva vektory (např. množství a ceny) a jeho výsledkem je jedno číslo (skalár).

Definice: Vynásobíme odpovídající si složky a výsledky sečteme.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Příklad

$$(1, 2, 3) \cdot (2, 0, -1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 2 + 0 - 3 = -1$$

Praktická ukázka: Výpočet zisku

Firma má pro 4 druhy zboží následující zisky za kus:

- Vektor zisků: $\vec{z} = (5, 8, 10, 6)$

Na první pobočce se prodalo:

- Vektor prodejů: $\vec{p}_1 = (5, 6, 0, 22)$

Jaký byl zisk na 1. pobočce?

Spočítáme skalární součin vektorů $\vec{z}$ a $\vec{p}_1$:

$$
\begin{aligned}
\text{Zisk}_1 &= \vec{z} \cdot \vec{p}_1 \\
&= (5, 8, 10, 6) \cdot (5, 6, 0, 22) \\
&= 5 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 22 \\
&= 25 + 48 + 0 + 132 = 205 \text{ Kč}
\end{aligned}
$$

Praktická ukázka: Výpočet zisku

Firma má pro 4 druhy zboží následující zisky za kus:

- Vektor zisků: $\vec{z} = (5, 8, 10, 6)$

Na první pobočce se prodalo:

- Vektor prodejů: $\vec{p}_1 = (5, 6, 0, 22)$

Jaký byl zisk na 1. pobočce?

Spočítáme skalární součin vektorů $\vec{z}$ a $\vec{p}_1$:

$$\begin{aligned}
\text{Zisk}_1 &= \vec{z} \cdot \vec{p}_1 \\
&= (5, 8, 10, 6) \cdot (5, 6, 0, 22) \\
&= 5 \cdot 5 + 8 \cdot 6 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 22 \\
&= 25 + 48 + 0 + 132 = 205 \text{ Kč}
\end{aligned}$$

Shrnutí a co vás čeká

Co si odnášíte?

- Vektor je uspořádaný seznam čísel, který skvěle reprezentuje data v ekonomii.
- Základní operace (sčítání, násobení číslem) jsou intuitivní.
- Skalární součin je klíčový nástroj pro výpočty jako jsou celkové náklady, tržby nebo zisk.

Na cvičení si vyzkoušíte:

- Procvičit všechny dnes uvedené operace.
- Řešit praktické úlohy z firemního prostředí.
- Definovat, co je a jak se realizuje lineární kombinace vektorů.