

Aplikace číselných řad: Finance a úvěry

Matematika pro ekonomickou praxi

Jiří Fišer

Moravská vysoká škola Olomouc

27. listopadu 2025

Obsah přednášky

- 1 Geometrická řada v kostce
- 2 Odvození vzorců (Spoření)
- 3 Řešené příklady
- 4 Plánování: Kolik musím spořit?
- 5 Úvěry a hypotéky (Present Value)
- 6 Závěr

Většina finančních modelů stojí na jediném vzorci – součtu geometrické posloupnosti.

Geometrická posloupnost

$$a_1, \quad a_1 \cdot q, \quad a_1 \cdot q^2, \quad \dots, \quad a_1 \cdot q^{n-1}$$

Klíčový vzorec pro konečný součet (např. n splátek):

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Kde ve financích: a_1 = vklad, $q = (1 + r)$ úročitel, n = počet let.

Odvození: Polhůtní spoření (konec období)

Spoříme částku K na konci každého období po dobu n let.

- 1. vklad se úročí $(n - 1)$ -krát.
- Poslední vklad se neúročí vůbec.

Součet naspořené částky (FV):

$$FV = \underbrace{K \cdot (1 + r)^{n-1}}_{\text{1. vklad}} + K \cdot (1 + r)^{n-2} + \dots + \underbrace{K}_{\text{poslední vklad}}$$

Toto je geometrická řada: $a_1 = K$, $q = 1 + r$.

$$FV = K \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (1 + r)^k = K \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1}$$

Výsledek (Polhůtní)

$$FV = K \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$$

Odvození: Předlůžtní spoření (začátek období)

Spoříme částku K na začátku každého období.

- Každý vklad leží v bance o **jedno období déle** než u polhůtního případu.

$$\begin{aligned} FV &= K(1+r)^n + K(1+r)^{n-1} + \dots + K(1+r) \\ &= (1+r) \cdot \underbrace{\left[K(1+r)^{n-1} + \dots + K \right]}_{\text{Polhůtní případ}} \end{aligned}$$

Výsledek (Předlůžtní)

$$FV = K \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot (1+r)$$

Příklad 1: Spoření s ročními vklady

Úloha: Kolik naspoříme za 4 roky, ukládáme-li **počátkem** každého roku 1 000 Kč? Roční úroková míra je 5 %, úroky se připisují na konci roku.

Řešení:

- $K = 1\,000$, $r = 0,05$, $n = 4$.
- Jde o **předlůžtní** spoření.

$$FV = 1\,000 \cdot \frac{(1 + 0,05)^4 - 1}{0,05} \cdot (1 + 0,05)$$

$$\begin{aligned} FV &= 1\,000 \cdot \frac{1,2155 - 1}{0,05} \cdot 1,05 \\ &\approx 1\,000 \cdot 4,3101 \cdot 1,05 \\ &\approx \mathbf{4\,525,63 \text{ Kč}} \end{aligned}$$

Příklad 2: Spoření s daněním úroků

Úloha: Stejné zadání (1 000 Kč, 4 roky, 5 %, předlhůtní), ale úroky jsou daněny **15 % daní**.

Řešení:

- Musíme použít efektivní úrokovou sazbu:

$$r_{net} = 0,05 \cdot (1 - 0,15) = 0,05 \cdot 0,85 = \mathbf{0,0425}$$

Dosadíme $r = 0,0425$:

$$FV = 1\,000 \cdot \frac{(1 + 0,0425)^4 - 1}{0,0425} \cdot (1 + 0,0425)$$

$$FV \approx 1\,000 \cdot \frac{0,1859}{0,0425} \cdot 1,0425 \approx \mathbf{4\,561,71 \text{ Kč}}$$

Pozn.: Nižší úrok (kvůli dani) paradoxně trochu kompenzuje fakt, že u reálných produktů se často daň strhává až při připsání, ale zde snižujeme bázi pro úročení.

Příklad 3: Polhůtní varianta

Úloha: Kolik naspoříme za 4 roky, ukládáme-li 1 000 Kč na **konci** každého roku? ($r = 5\%$, bez daně).

Řešení:

- Použijeme vzorec pro polhůtní spoření (bez násobení $1 + r$ na konci).

$$FV = 1\,000 \cdot \frac{(1 + 0,05)^4 - 1}{0,05}$$

$$FV \approx 1\,000 \cdot \frac{0,2155}{0,05} \approx \mathbf{4\,310,13\text{ Kč}}$$

Rozdíl proti předlhůtnímu: $4\,525 - 4\,310 = 215\text{ Kč}$.

"Chci mít za 5 let 100 000 Kč. Kolik musím ročně odkládat?" ($r = 10\%$)

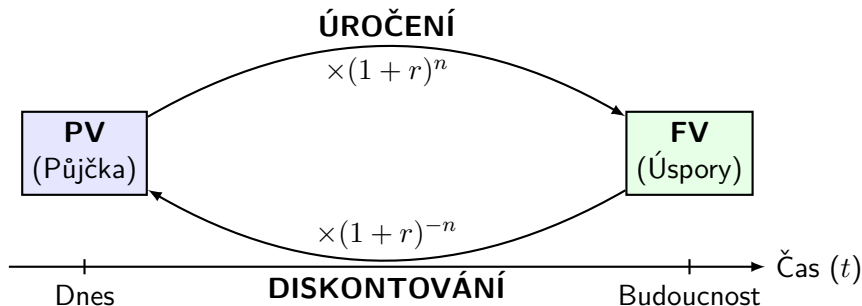
Známe $FV = 100\,000$, hledáme K . Ze vzorce pro předlhůtní spoření vyjádříme K :

$$K = \frac{FV}{\frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot (1+r)}$$

Dosazení:

$$K = \frac{100\,000}{\frac{(1,10)^5 - 1}{0,10} \cdot 1,10} \approx \frac{100\,000}{10,4359} \approx \mathbf{9\,586,79\,Kč}$$

Časová hodnota peněz: Vztah PV a FV



- **Spoření:** Posíláme peníze do budoucna ($\rightarrow FV$).
- **Hypotéka:** Půjčujeme si peníze z budoucnosti ($\leftarrow PV$).

Výpočet splátky hypotéky

Banka půjčí PV (Jistinu). Splácíme anuitou A .

Vzorec pro splátku (z PV)

$$A = PV \cdot \frac{r \cdot (1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}$$

Příklad: Hypotéka 3 mil. Kč, 30 let, 5 % p.a., měsíční splácení.

- $PV = 3\,000\,000$
- $n = 30 \times 12 = 360$
- $r = 0,05/12 \doteq 0,004167$

$$A = 3\,000\,000 \cdot \frac{0,004167 \cdot 1,004167^{360}}{1,004167^{360} - 1} \approx \mathbf{16\,105 \text{ Kč/měs.}}$$

- **Geometrická řada** je základ financí.
- **Vzorce není třeba "biflovat":**
 - ▶ Stačí umět sečíst geometrickou řadu.
 - ▶ $\text{Předlhůtní} = \text{Polhůtní} \times (1 + r)$.
- **Daně:** Snižují efektivní úrok ($r \times 0,85$).
- **Hypotéka:** Je jen "otočené" spoření (diskontování budoucích splátek k dnešku).

Děkuji za pozornost.