

Matematika pro ekonomickou praxi

Jiří Fišer

13. listopadu 2025

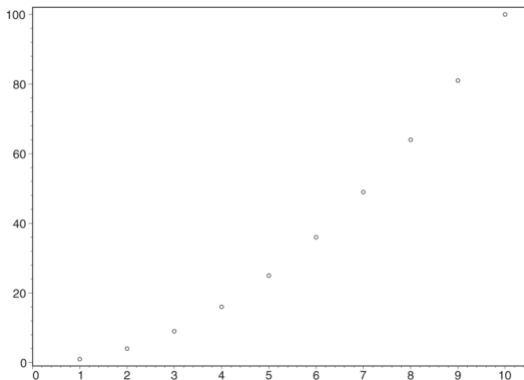
Význam limit v praxi: Prognóza na "dlouhý horizont"

- Limity umožňují analyzovat chování systémů při extrémních hodnotách.
- **V ekonomii pro modelování trendů a predikci.**
 - ▶ "Kam směřuje státní dluh, pokud poroste tímto tempem?"
 - ▶ "Máme nový produkt. Jaký je maximální (limitní) počet uživatelů, kterého můžeme na trhu dosáhnout, než se trh 'nasytí'?"
 - ▶ "Kolik budu mít naspořeno za 40 let při složeném úročení?"
- V inženýrství pro analýzu stability systémů.
- V informatice při analýze algoritmů a jejich složitosti.

Motivační příklady: Kam to směřuje?

Prozkoumejme, zatím „laicky“, následující posloupnosti:

1) Posloupnost $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$:

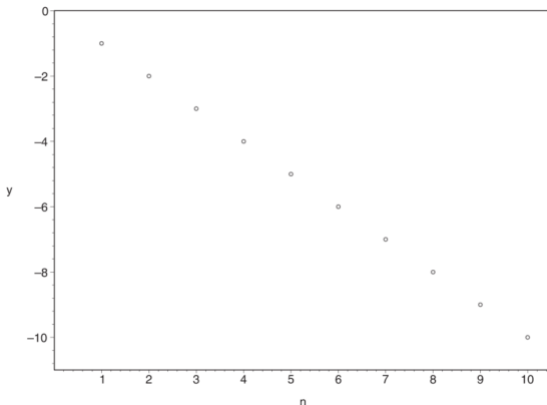


Hodnoty rostou nade všechny meze.

Limita je $+\infty$

Motivační příklady: Kam to směřuje?

2) Posloupnost $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$:

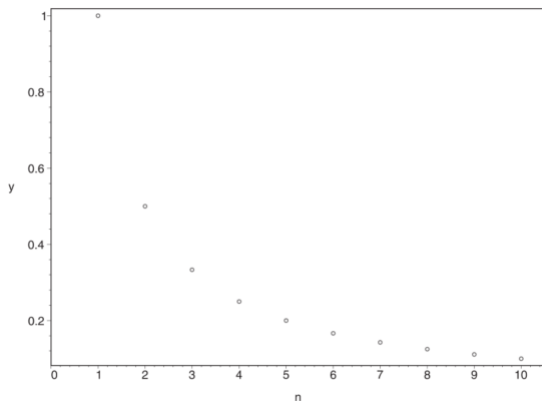


Hodnoty klesají pod všechny meze.

Limita je $-\infty$

Motivační příklady: Kam to směřuje?

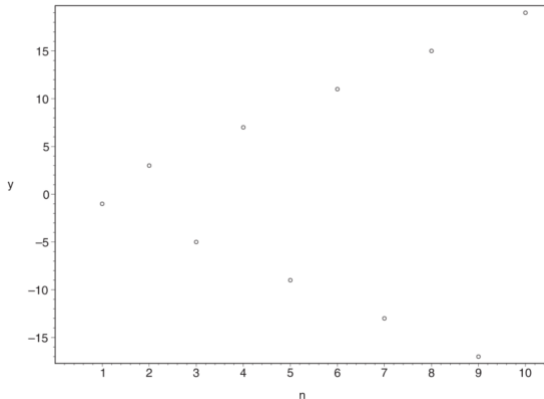
3) Posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$:



Hodnoty leží v intervalu $(0; 1]$ a s rostoucím n se blíží nule. **Limita je 0**

Motivační příklady: Kam to směřuje?

4) Posloupnost $1, -2, 3, -4, 5, \dots, 2n - 1, -2n, \dots$:

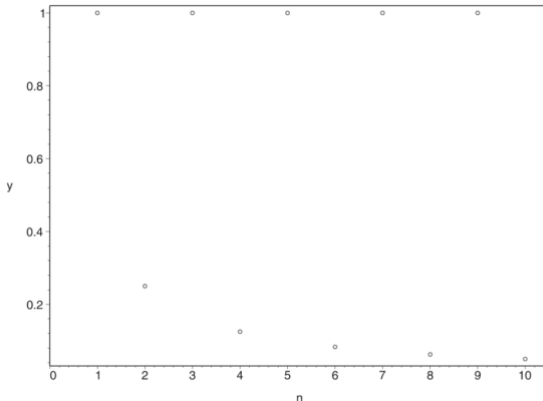


Hodnoty střídají znaménko (oscilují) a rostou (v absolutní hodnotě) nade všechny meze.

Limita neexistuje

Motivační příklady: Kam to směřuje?

5) Posloupnost $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \dots, 1, \frac{1}{2^{2n}}, \dots$:



Hodnoty "skáčou", ale neustálí se na jedné hodnotě. **Limita neexistuje**

Klíčové pojmy: Konvergence vs. Divergence

Definice

Řekneme, že posloupnost (a_n) je **konvergentní**, jestliže má **vlastní limitu** (tj. konkrétní reálné číslo, např. 0 nebo 1). Řekneme, že

posloupnost (a_n) je **divergentní**, jestliže má nevlastní limitu (uteče do $+\infty$ nebo $-\infty$) nebo limitu nemá (skáče, osciluje).

- $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ je **konvergentní**, má limitu 1,
- stacionární posloupnost (c) je **konvergentní**, má limitu c ,
- $\left(\frac{1}{n}\right)$ je **konvergentní**, má limitu 0,
- $\left(\frac{n}{100}\right)$ je **divergentní**, má nevlastní limitu $+\infty$,
- (q^n) je pro $q \leq -1$ **divergentní**, nemá limitu (osciluje).

Klíčové pojmy: Konvergence vs. Divergence

Definice

Řekneme, že posloupnost (a_n) je **konvergentní**, jestliže má **vlastní limitu** (tj. konkrétní reálné číslo, např. 0 nebo 1). Řekneme, že

posloupnost (a_n) je **divergentní**, jestliže má nevlastní limitu (uteče do $+\infty$ nebo $-\infty$) nebo limitu nemá (skáče, osciluje).

- $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ je **konvergentní**, má limitu 1,
- stacionární posloupnost (c) je **konvergentní**, má limitu c ,
- $\left(\frac{1}{n}\right)$ je **konvergentní**, má limitu 0,
- $\left(\frac{n}{100}\right)$ je **divergentní**, má nevlastní limitu $+\infty$,
- (q^n) je pro $q \leq -1$ **divergentní**, nemá limitu (osciluje).

Rozšířená reálná osa (pro připomenutí)

Definice

Rozšířenou reálnou osou nazýváme množinu

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

kde $-\infty$ a $+\infty$ jsou nevlastní čísla, přičemž pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$-\infty < x < +\infty.$$

Nekonečno je koncept, ne číslo. Berte ho jako "něco, co je větší / menší než cokoli, co si dokážete představit."

Početní operace s nevlastními čísly:

- **Sčítání a odčítání:** $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\infty \pm x = \infty, \quad -\infty \pm x = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty,$$

$$-(-\infty) = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty.$$

— *Nedefinujeme (NEURČITÝ VÝRAZ)* —

$$\infty - \infty \quad (\text{Nevíme, kdo "vyhraje"})$$

- **Násobení:** $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Podobně pro $x < 0$: $x \cdot (+\infty) = -\infty, \quad x \cdot (-\infty) = \infty.$

— *Nedefinujeme (NEURČITÝ VÝRAZ)* —

$$0 \cdot (+\infty), \quad 0 \cdot (-\infty) \quad (\text{Přetahovaná: nula vs. nekonečno})$$

Početní operace s nevlastními čísly (pokr.)

- **Dělení:** $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0 \quad (\text{Klíčové pravidlo! "Koláč pro nekonečno lidí"})$$

Pro $x > 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

pro $x < 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

— *Nedefinujeme (NEURČITÉ VÝRAZY)* —

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{x}{0} \quad \text{pro žádné } x \in \mathbb{R}^*, \text{ tj. ani } \frac{0}{0}$$

- **Mocniny:** $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

— *Nedefinujeme (NEURČITÉ VÝRAZY)* —

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

Procvičení počítání s nekonečny:

Úloha

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

$$a = \underbrace{(+\infty \cdot 5)}_{+\infty} - \underbrace{\frac{(-\infty)}{3}}_{-\infty} + \underbrace{(-\infty)^3}_{-\infty} \cdot \underbrace{(100 - \infty)}_{-\infty} - \underbrace{\frac{1200!}{+\infty}}_0$$

$$a = +\infty - (-\infty) + (-\infty) \cdot (-\infty) - 0 = +\infty + \infty + \infty - 0 = \infty.$$

Procvičení počítání s nekonečny:

Úloha

Vypočtete

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

$$a = \underbrace{(+\infty \cdot 5)}_{+\infty} - \underbrace{\frac{(-\infty)}{3}}_{-\infty} + \underbrace{(-\infty)^3}_{-\infty} \cdot \underbrace{(100 - \infty)}_{-\infty} - \underbrace{\frac{1200!}{+\infty}}_0$$

$$a = +\infty - (-\infty) + (-\infty) \cdot (-\infty) - 0 = +\infty + \infty + \infty - 0 = \infty.$$

Věta o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu:

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\mathbb{R}^*$ smysl (tj. **nejsou neurčité!**):

- 1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
- 2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- 3) pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ je $\lim(a_n/b_n) = a/b$,
- 4) $\lim |a_n| = |a|$.

Ukázka: $\lim n^2 = \infty$, $\lim \frac{1}{n} = 0$:

- $\lim n^2 + \frac{1}{n} = [\infty + 0] = \infty$. (Toto jde spočítat rovnou)
- $\lim n^2 \cdot \frac{1}{n} = [\infty \cdot 0]$ **není definováno**, větu nelze použít. Musíme výraz nejdřív upravit: $\lim n^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim n = \infty$;

Pointa: Pokud dosazením dostaneme neurčitý výraz, musíme výraz algebraicky upravit ("použít trik").

Věta o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu:

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\mathbb{R}^*$ smysl (tj. **nejsou neurčité!**):

- 1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
- 2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- 3) pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ je $\lim(a_n/b_n) = a/b$,
- 4) $\lim |a_n| = |a|$.

Ukázka: $\lim n^2 = \infty$, $\lim \frac{1}{n} = 0$:

- $\lim n^2 + \frac{1}{n} = [\infty + 0] = \infty$. (Toto jde spočítat rovnou)
- $\lim n^2 \cdot \frac{1}{n} = [\infty \cdot 0]$ **není definováno**, větu nelze použít. Musíme výraz nejdřív upravit: $\lim n^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim n = \infty$;

Pointa: Pokud dosazením dostaneme neurčitý výraz, musíme výraz algebraicky upravit ("použít trik").

Konkrétní výpočty limit: „tabulkové“ limity:

Základní ”stavební kameny”, které si pamatujeme:

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & , \quad \alpha > 0; \quad (\text{např. } \lim n^2 = \infty) \\ 1 & , \quad \alpha = 0; \\ 0 & , \quad \alpha < 0. \quad (\text{např. } \lim n^{-1} = \lim \frac{1}{n} = 0) \end{cases}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & , \quad q \in (-1, 1); \quad (\text{např. } \lim (0.8)^n = 0) \\ 1 & , \quad q = 1; \\ +\infty & , \quad q > 1; \quad (\text{např. } \lim (1.05)^n = \infty) \\ \text{neexistuje} & , \quad q \leq -1. \quad (\text{např. } \lim (-1)^n) \end{cases}$$

$$3) \text{ Pro } q > 0 \text{ platí } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{q} = 1.$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Kuchařka: Trik č. 1 (pro $\infty - \infty$)

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 5n) = \left[+\infty + (+\infty) \right] = +\infty.$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 5n) = \left[+\infty - (+\infty)_{\text{ND}} \right] \quad (\text{Musíme upravit!})$$

Trik: Vytkneme „nejsilnějšího hráče“

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n(n - 5)$$

$$= \left[+\infty \cdot (+\infty) \right] = +\infty.$$

Kuchařka: Trik č. 2 (pro $\frac{\infty}{\infty}$)



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 4n + 5}{4n^2 + n - 3} = \left[\frac{+\infty}{+\infty \text{ ND}} \right] \text{ (Musíme upravit!)}$$

Trik: Vytkneme „nejméně silnějšího hráče“ z čitatele i jmenovatele:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(3 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2})}{n^2(4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{3 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}^{\begin{smallmatrix} \rightarrow 0 \\ 4 \\ \rightarrow 0 \end{smallmatrix}}}{\underbrace{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}_{\begin{smallmatrix} \rightarrow 0 \\ n \\ \rightarrow 0 \end{smallmatrix}}} = \left[\frac{3 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} \right] = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Limity podílu dvou polynomů ("Pravidlo nejsilnějšího hráče")

- Při výpočtu limit podílu dvou polynomů pro $n \rightarrow \infty$ porovnáваме stupně nejvyšších mocnin v čitateli a jmenovateli.
- **Intuitivně:** Pro $n = 1$ miliarda je n^2 (miliarda miliard) tak obrovské, že $5n$ (5 miliard) jsou proti tomu "drobné". Díváme se tedy jen na "velké šéfy" (vedoucí členy).

Limity podílu dvou polynomů

("Pravidlo nejsilnějšího hráče")

- Pokud je stupeň čitatele $r < s$ (stupeň jmenovatele), potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0. \quad (\text{Jmenovatel vyhraje})$$

- Pokud je $r = s$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{\text{vedoucí koeficient čitatele}}{\text{vedoucí koeficient jmenovatele}}. \quad (\text{Remíza})$$

- Pokud je $r > s$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} \text{ diverguje k } +\infty \text{ nebo } -\infty \quad (\text{Čitatel vyhraje})$$

podle znamének vedoucích koeficientů.

Příklad 1 (Pravidlo nejsilnějšího hráče)

Příklad 1

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2n^2 - n + 5}{2n^3 - n^2 + 3n - 1}$$

Řešení:

- Stupeň čitatele $r = 3$, stupeň jmenovatele $s = 3$.
- Stupně jsou stejné $\implies$ "Remíza".
- Vedoucí koeficient čitatele je 4, vedoucí koeficient jmenovatele je 2.
- Podle pravidla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + \dots}{2n^3 + \dots} = \frac{4}{2} = 2$$

- **Závěr:** Limita je 2.

Příklad 2 (Pravidlo nejsilnějšího hráče)

Příklad 2

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 7}{2n^4 + n - 1}$$

Řešení:

- Stupeň čitatele $r = 2$, stupeň jmenovatele $s = 4$.
- $r < s \implies$ Jmenovatel je silnější a vyhraje (stáhne limitu k 0).
- Podle pravidla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + \dots}{2n^4 + \dots} = 0$$

- **Závěr:** Limita je 0.

Příklad 3 (Pravidlo nejsilnějšího hráče)

Příklad 3

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 - n^3 + 2}{n^2 + 4n}$$

Řešení:

- Stupeň čitatele $r = 5$, stupeň jmenovatele $s = 2$.
- $r > s \implies$ Čítatel je silnější a vyhraje (přetáhne limitu k ∞).
- Vedoucí koeficient čitatele je 3 (kladný), vedoucí koeficient jmenovatele je 1 (kladný).
- Znaménka vedoucích koeficientů jsou $+/+$, takže limita jde k $+\infty$.
- **Závěr:** Limita je $+\infty$.

Příklad 4 (Pravidlo nejsilnějšího hráče)

Příklad 4

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^4 + 5n^2 - 1}{n^4 - n + 3}$$

Řešení:

- Stupeň čitatele $r = 4$, stupeň jmenovatele $s = 4$.
- Stupně jsou stejné $\implies$ "Remíza".
- Vedoucí koeficient čitatele je -2 , vedoucí koeficient jmenovatele je 1 .
- Podle pravidla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^4 + \dots}{1n^4 + \dots} = \frac{-2}{1} = -2$$

- **Závěr:** Limita je -2 .

Příklad 5 (Pravidlo nejsilnějšího hráče)

Příklad 5

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 4n^2 + n}{-2n^3 + n^2 - 5}$$

Řešení:

- Stupeň čitatele $r = 3$, stupeň jmenovatele $s = 3$.
- Stupně jsou stejné $\implies$ "Remíza".
- Vedoucí koeficient čitatele je 1, vedoucí koeficient jmenovatele je -2 .
- Podle pravidla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1n^3 + \dots}{-2n^3 + \dots} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

- **Závěr:** Limita je $-\frac{1}{2}$.

Shrnutí: Kuchařka č. 1 (Polynomy)

- Při výpočtu limit podílu $\frac{P(n)}{Q(n)}$ je klíčové porovnání stupňů r a s .
- $r = s$: Limita je $\frac{\text{koeficient u } n^r}{\text{koeficient u } n^s}$ (podíl "šéfů").
- $r < s$: Limita je 0 (jmenovatel je silnější).
- $r > s$: Limita je $+\infty$ nebo $-\infty$ (čitatel je silnější).

Limity podílu výrazů s a^n

- **Pravidlo:** Exponenciální růst (např. 2^n) je **vždy** rychlejší než polynomiální růst (např. n^{1000}).
- Při výpočtu limit s a^n (např. $2^n, 5^n$) je klíčové porovnat **základy** a .
- "Nejsilnější hráč" je ten s **největším základem** (v absolutní hodnotě).
 - ▶ Pokud $a > 1$, $a^n \rightarrow \infty$ (roste).
 - ▶ Pokud $0 < a < 1$, $a^n \rightarrow 0$ (klesá k nule).
- Při limitách pro $n \rightarrow \infty$ je klíčové identifikovat nejrychleji rostoucí člen ("šéfa").

Příklady limit s a^n

Příklad

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n + 3 \cdot 5^n}{4 \cdot 3^n + 6 \cdot 5^n}$$

Řešení:

- Základy jsou 2, 5, 3, 5. "Nejsilnější hráč" (největší základ) je 5^n .
- Všichni ostatní ($2^n, 3^n$) jsou proti 5^n zanedbatelní.
- Díváme se tedy jen na "šéfy":

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\dots + 3 \cdot 5^n}{\dots + 6 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 5^n}{6 \cdot 5^n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- **Závěr:** Limita je $\frac{1}{2}$.

Obečná pravidla pro limity s a^n

- **Pokud** $a > b > 1$, pak pro $n \rightarrow \infty$ platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b} \right)^n = \infty \quad (\text{např. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1.5)^n = \infty)$$

- **Pokud** $0 < a < b < 1$, pak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b} \right)^n = 0 \quad (\text{např. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(0.1)^n}{(0.5)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (0.2)^n = 0)$$

- **Pokud** $a > 1$ a $0 < b < 1$, pak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n \cdot b^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot b)^n$$

- ▶ Pokud $a \cdot b > 1$, limita je ∞ .
- ▶ Pokud $a \cdot b = 1$, limita je konstantní.
- ▶ Pokud $a \cdot b < 1$, limita je 0.

Příklady limit s a^n

Příklad

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

Řešení:

- Porovnáme základy: $5 > 3 > 2$.
- "Šéf"v čitateli je 3^n . "Šéf"ve jmenovateli je 5^n .
- Celkový "šéf"je 5^n . Jmenovatel je silnější.
- **Formálně (Trik: Vytkneme nejsilnějšího hráče čitatele i jmenovatele):**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right)}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{3}{5} \right)^n}_{\rightarrow 0} \cdot \left(\underbrace{\left(\frac{2}{3} \right)^n}_{\rightarrow 0} + 1 \right)$$

● Výsledek: $0 \cdot (0 + 1) = 0$

Limity typu $[„omezená“ \times 0]$ a $\left[\frac{„omezená“}{\infty}\right]$

- Posloupnosti jako $\sin n$, $\cos n$, nebo $(-1)^n$ **nemají limitu**.
- Ale jsou **omezené** – jejich hodnoty nikdy „neutečou“ do ∞ . (Skočí si mezi -1 a 1).
- **Pravidlo:** Pokud omezenou posloupnost násobíme něčím, co jde k nule, výsledek je nula.
- **Pravidlo:** Pokud omezenou posloupnost dělíme něčím, co jde k nekonečnu, výsledek je nula.

Příklad: $\left[\frac{\text{„omezená“}}{\infty} \right]$

Příklad

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^2)}{n}$$

Řešení:

- $\cos(n^2)$ je **omezená** (skáče mezi -1 a 1).
- n jde do **nekonečna**.
- Máme tedy typ $\frac{\text{„omezená“}}{\infty}$, což se blíží k nule.
- **Závěr:** Limita je 0.

Příklad: $\left[\frac{\text{„omezená“}}{\infty} \right]$

Příklad

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Řešení:

- $(-1)^n$ je **omezená** (skáče mezi 1 a -1).
- $\sqrt{n}$ jde do **nekonečna**.
- Máme tedy typ $\frac{\text{„omezená“}}{\infty}$.
- Limita se blíží k nule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

- **Závěr:** Limita je 0.

Neexistence limity posloupnosti

- Ne všechny posloupnosti mají limitu pro $n \rightarrow \infty$.
- Když posloupnost nemá limitu, říkáme, že **diverguje**.
- **Metoda důkazu:** Najdeme dvě **podposloupnosti**, které mají **různé** limity.
- Pokud se posloupnost "roztrhne" a její části míří jinam, pak limita celé posloupnosti neexistuje.

Příklad: Neexistence limity

Příklad

Ukažte, že limita posloupnosti $\{a_n\}$, kde

$$a_n = (-1)^n \cdot n,$$

neexistuje.

Průběh posloupnosti: $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$

Řešení (Metoda podposloupností)

Krok 1: Najdeme dvě podposloupnosti.

- **Podposloupnost 1 (sudá n):**

$$n = 2k \quad (\text{tj. } n = 2, 4, 6, \dots)$$

$$a_n = (-1)^{2k} \cdot 2k = (1) \cdot 2k = 2k.$$

- Tato podposloupnost $\{2k\}$ (tedy $2, 4, 6, \dots$) jde k $+\infty$.

- **Podposloupnost 2 (lichá n):**

$$n = 2k + 1 \quad (\text{tj. } n = 1, 3, 5, \dots)$$

$$a_n = (-1)^{2k+1} \cdot (2k + 1) = (-1) \cdot (2k + 1).$$

- Tato podposloupnost $\{-(2k + 1)\}$ (tedy $-1, -3, -5, \dots$) jde k $-\infty$.

Krok 2: Porovnání limit.

- Limita sudé podposloupnosti je $+\infty$.
- Limita liché podposloupnosti je $-\infty$.
- Protože $+\infty \neq -\infty$, limita celé posloupnosti $\{a_n\}$ **neexistuje**.

Limity typu $[1^\infty]$

- Toto je speciální neurčitý výraz.
- Typicky se objevuje u posloupností ve tvaru:

$$a_n = \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n$$

- **Motivace z financí:** Spojité úročení. Když úročíte 100% úrok ($k = 1$) stále častěji ($n \rightarrow \infty$), váš vklad $(1 + 1/n)^n$ nedoroste do ∞ , ale doroste přesně k číslu $e \approx 2.718$.
- Pro výpočet těchto limit využijeme známé vzorce.

Klíčové vzorce (Zapamatovat!)

- **Základní limita:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

- **Obecnější tvar (pro cvičení):**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

kde k je reálné číslo.

Příklad 1 (Typ 1^∞)

Příklad 1

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

Řešení:

- Použijeme vzorec:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

- V našem případě je $k = 2$, tedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

- **Závěr:** Limita je e^2 .

Příklad 2 (Typ 1^∞)

Příklad 2

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n+2}$$

Řešení:

- **Trik: Rozdělíme exponent.**

$$\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n+2} = \underbrace{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^n}_{\rightarrow e^5} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{5}{n}\right)^2}_{\rightarrow (1+0)^2=1}$$

- Víme, že:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = e^5$$

- A také (dosadíme ∞):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{5}{\infty}\right)^2 = (1+0)^2 = 1$$

Příklad 3 (Typ 1^∞)

Příklad 3

Vypočítejte limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+6}{n} \right)^n$$

Řešení:

- **Trik: Upravíme základ** na tvar $(1 + \dots)$.

$$\frac{n+6}{n} = \frac{n}{n} + \frac{6}{n} = 1 + \frac{6}{n}$$

- Nyní máme výraz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{n} \right)^n$$

- Podle vzorce ($k = 6$) je limita e^6 .
- **Závěr:** Limita je e^6 .