

STATISTIKA 2

Statistika a statistické zpracování dat

Blok 3-1

Jiří Fišer

29. listopadu 2024

Význam testování statistických hypotéz

- Testování hypotéz je základním nástrojem statistické analýzy.
- Umožňuje ověřit tvrzení o parametrech populace na základě výběrových dat.
- Nejčastější testované parametry:
 - ▶ **Střední hodnota** (μ),
 - ▶ **Rozptyl** (σ^2),
 - ▶ **Další parametry** (např. proporce, rozdíly mezi skupinami).
- Praktické uplatnění: věda, průmysl, medicína, ekonomie a další oblasti.

Statistická hypotéza

Definice: Statistická hypotéza je tvrzení o parametru základního souboru ověřitelné výběrovými daty.

Typy hypotéz

- **Nulová hypotéza** (H_0): Výchozí tvrzení, které testem ověřujeme.
 - ▶ Příklad: $\mu = 0$ (průměrná hodnota je nulová).
 - ▶ Příklad: $\mu_1 = \mu_2$ (mezi dvěma skupinami neexistuje rozdíl).
- **Alternativní hypotéza** (H_1): Tvrzení opačné k H_0 .
 - ▶ Příklad: $\mu \neq 0$ (průměrná hodnota se liší od nuly).
 - ▶ Příklad: $\mu_1 \neq \mu_2$ (existuje rozdíl mezi dvěma skupinami).

Příklad: Analogie se soudním procesem

Analogie: Rozhodujeme, zda obžalovaný spáchal zločin.

Formulace hypotéz

- **Nulová hypotéza** (H_0): Obžalovaný je nevinný.
- **Alternativní hypotéza** (H_1): Obžalovaný je vinný.

Princip: Obžalovaný je považován za nevinného (H_0), dokud se nepodaří prokázat jeho vinu (H_1).

Výsledek rozhodnutí

- Zamítneme H_0 : Obžalovaný je prokázán jako vinný.
- Nezamítneme H_0 : Vina nebyla prokázána, obžalovaný je považován za nevinného.

Formulace výsledku testu

Možné výsledky testu

- **Zamítáme nulovou hypotézu (H_0)** ve prospěch alternativní hypotézy (H_1): Bylo prokázáno, že je vinen.
- **Nulovou hypotézu nemůžeme zamítnout:** Vina nebyla prokázána (možnost nevinu stále existuje).

Interpretace v soudním procesu

- H_0 : Obžalovaný je nevinen.
- H_1 : Obžalovaný je vinen.

Chyby rozhodnutí v testování hypotéz

Tab. 3: Vztah mezi pravdou a rozhodnutím soudu

Skutečnost	Závěr soudu	
	Obžalovaný je nevinný	Obžalovaný je vinný
Obžalovaný je nevinný	správný	chyba I. druhu
Obžalovaný je vinný	chyba II. druhu	správný

Význam chyb

- **Chyba I. druhu (α):** Nevinný je prohlášen za vinného – velmi závažné.
- **Chyba II. druhu (β):** Vinný není potrestán – méně závažné v tomto kontextu.

Jednostranné a oboustranné testy

Typy hypotéz podle formulace H_1

- **Jednostranná hypotéza:** Parametr základního souboru je větší nebo menší než určitá hodnota (ne obojí).
 - ▶ Příklad: $H_0 : \mu \leq 100$, $H_1 : \mu > 100$.
- **Oboustranná hypotéza:** Parametr základního souboru se může lišit na obě strany.
 - ▶ Příklad: $H_0 : \mu = 100$, $H_1 : \mu \neq 100$.

Poznámka k volbě testu

Volba mezi jednostranným a oboustranným testem závisí na výzkumné otázce:

- Jednostranný test: Zaměřený na rozdíl v konkrétním směru.
- Oboustranný test: Zvažuje jakýkoliv rozdíl, bez ohledu na směr.

Testovací statistika

Definice

Testovací statistika je číselná hodnota vypočítaná z dat výběru, která vyjadřuje, jak daleko se výsledek výběru odchyluje od hodnoty předpokládané nulovou hypotézou.

Využití testovací statistiky

- Slouží k rozhodnutí, zda zamítnout nebo nezamítnout nulovou hypotézu (H_0).
- Porovnává se s tzv. kritickou hodnotou.

Hladina významnosti, kritický obor a kritické hodnoty

Hladina významnosti (α)

- Pravděpodobnost zamítnutí nulové hypotézy (H_0), i když je pravdivá.
- Reprezentuje chybu prvního druhu.
- Typické hodnoty: $\alpha = 0,05$ nebo $\alpha = 0,01$.

Kritický a akceptační obor

- **Kritický obor:** Interval, kde zamítáme H_0 .
- **Akceptační obor:** Interval, kde H_0 nezamítáme.

Kritická hodnota

- Hodnota, která odděluje kritický obor od akceptačního.
- Závisí na hladině významnosti (α) a použitém testu.

Levostranný jednostranný test

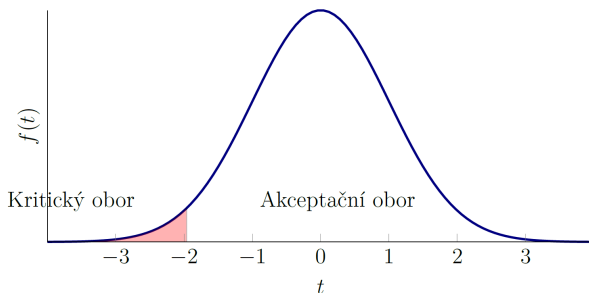
- **Hypotézy:**

- ▶ $H_0: \mu \geq \mu_0$

- ▶ $H_1: \mu < \mu_0$

- **Kritický obor:** Na levé straně rozdělení testovací statistiky.

- **Podmínka:** Pokud hodnota testovací statistiky < **kritická hodnota** (pro α), zamítáme H_0 .



Obr. 16: Jednostranný test s kritickým oborem (vlevo): $(-\infty, -2)$ a akceptačním oborem: $(-2; \infty)$

Pravostranný jednostranný test

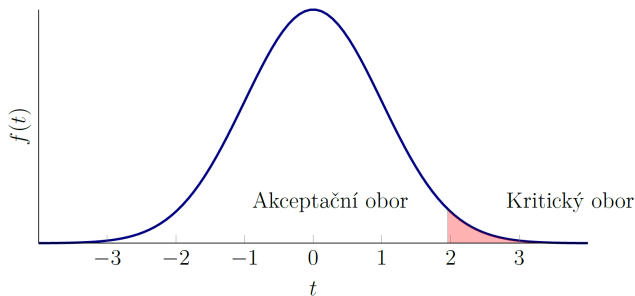
- **Hypotézy:**

- ▶ $H_0: \mu \leq \mu_0$

- ▶ $H_1: \mu > \mu_0$

- **Kritický obor:** Na pravé straně rozdělení testovací statistiky.

- **Podmínka:** Pokud hodnota testovací statistiky > **kritická hodnota** (pro $1 - \alpha$), zamítáme H_0 .



Obr. 17: Jednostranný test s kritickým oborem (vpravo): $(2; \infty)$ a akceptačním oborem: $(-\infty; 2)$

Kritické a akceptační obory: Oboustranný test

- **Hypotézy:**

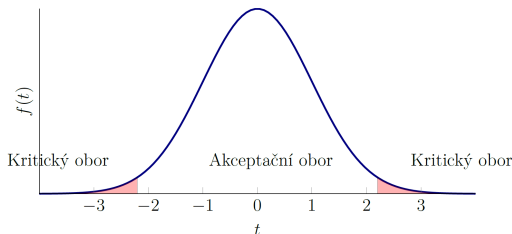
- ▶ $H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

- **Kritický obor:**

- ▶ Levá strana: Hodnoty menší než kritická hodnota $(\alpha/2)$.
 - ▶ Pravá strana: Hodnoty větší než kritická hodnota $(1 - \alpha/2)$.

- **Podmínka:** Pokud hodnota testovací statistiky:

- ▶ **< levá kritická hodnota** nebo **> pravá kritická hodnota**, zamítáme H_0 .



Obr. 18: Oboustranný test s kritickým oborem (vlevo a vpravo): $(-\infty; -2,2) \cup (2,2; \infty)$ a akceptačním oborem: $(-2,2; 2,2)$

Kroky při testování statistické hypotézy

Testování hypotéz se provádí v následujících krocích:

1 Formulace hypotéz:

- ▶ Nulová hypotéza (H_0): Výchozí předpoklad.
- ▶ Alternativní hypotéza (H_1): Opačný stav.

2 Výběr statistického testu:

- ▶ Např. t -test, z -test pro průměry, F -test pro porovnání rozptylů.

3 Stanovení hladiny významnosti (α):

- ▶ Nejčastěji $\alpha = 0,05$ nebo $\alpha = 0,01$.
- ▶ Reprezentuje pravděpodobnost chyby I. druhu.

4 Výpočet testovací statistiky:

- ▶ Na základě dat vypočítáme hodnotu t , z , F apod.

5 Určení kritické hodnoty a rozhodnutí:

- ▶ Porovnáme testovací statistiku s kritickou hodnotou.
- ▶ Rozhodneme, zda H_0 zamítneme nebo nezamítneme.

t-test se používá, když:

- **Velikost vzorku je malá** (obvykle $n < 30$) a **neznáme rozptyl populace**.
- Testujeme hypotézu o **střední hodnotě** nebo o **rozdílu středních hodnot** dvou souborů (jednovýběrový, dvouvýběrový nebo párový t-test).
- Data pochází z **normálního rozdělení**, nebo lze předpokládat jejich normální rozdělení.

Používá rozdělení: Studentovo t-rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti.

Typické použití:

Když chceme ověřit, zda je průměrná hodnota výběru statisticky významně odlišná od hypotetické hodnoty (např. průměrná výkonnost strojů).

z-test se používá když:

- **Velikost vzorku je velká** (obvykle $n \geq 30$) nebo **známe rozptyl populace**.
- Testujeme hypotézu o **střední hodnotě** nebo o **proporci** (např. procento zákazníků, kteří jsou spokojeni).
- Data mohou pocházet z jakéhokoli rozdělení, protože při velkých vzorcích využíváme přiblížení **normálnímu rozdělení** (centrální limitní věta).

Používá rozdělení: Normované normální rozdělení.

Typické použití:

Když máme velký vzorek a chceme ověřit průměrnou dobu trvání nějakého procesu (např. dobu čekání zákazníků v bance).

F-test

F-test se používá když:

- Testujeme hypotézu o **shodě rozptylů** dvou populací.
- Oba výběry pocházejí z **normálního rozdělení**.

Používá rozdělení: F-rozdělení o $(n-1)$ stupních volnosti.

Typické použití:

Když chceme ověřit, zda se liší rozptyl výkonnosti dvou strojů nebo dvou skupin.

Řešený příklad: Testování průměrné doby čekání v bance

Zadání: Banka předpokládá, že průměrná doba čekání na obsloužení je $\mu_0 = 10$ minut. Výběr z 35 zákazníků přinesl následující údaje:

- Výběrový průměr: $\bar{x} = 9,5$ minut,
- Výběrová směrodatná odchylka: $s = 2$ minuty,
- Velikost výběru: $n = 35$.

Cíl: Zjistit, zda se průměrná doba čekání všech zákazníků liší od předpokladu.

Řešený příklad: Testování průměrné doby čekání v bance

Úvod:

- Pro odhad průměrné doby čekání bychom mohli použít intervalový odhad.
- Vedení banky ale požaduje, aby průměr nebyl ani statisticky významně vyšší, ani nižší než 10 minut.
- **Použijeme oboustranný test.**

Řešený příklad: Formulace hypotéz

- **Nulová hypotéza (H_0):**

$H_0 : \mu = 10$ (průměrná doba odpovídá požadavkům vedení).

- **Alternativní hypotéza (H_1):**

$H_1 : \mu \neq 10$ (průměrná doba neodpovídá požadavkům vedení).

Řešený příklad: Volba testu a hladina významnosti

- **Volba testu:**

- ▶ Použijeme **z-test**, protože vzorek je dostatečně velký ($n = 35 \geq 30$).
- ▶ Výběrová směrodatná odchylka ($s = 2$) slouží jako odhad neznámé populační odchylky.

- **Hladina významnosti:**

- ▶ Zvolíme $\alpha = 0,05$, což odpovídá 5% pravděpodobnosti chyby I. druhu.

Řešený příklad: Výpočet testovací statistiky; Kritické hodnoty a rozhodnutí

- Výpočet testovací statistiky:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{9,5 - 10}{\frac{2}{\sqrt{35}}} = \frac{-0,5}{0,338} \approx -1,48.$$

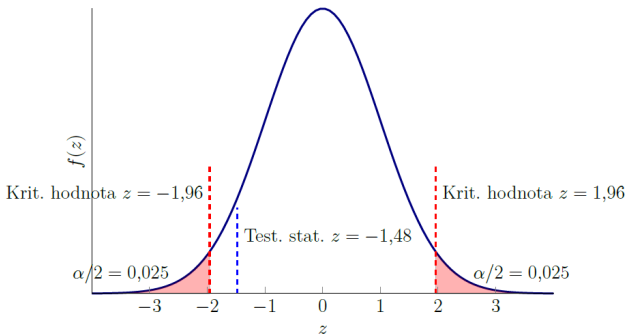
- **Kritické hodnoty:**

- ▶ Kritické hodnoty pro $\alpha = 0,05$ získáme pomocí funkce `NORM.S.INV`:

$$z_{0,025} = -1,96, \quad z_{0,975} = 1,96.$$

- ▶ Kritický obor: $(-\infty, -1,96)$ a $(1,96, \infty)$.
- ▶ Akceptační obor: $(-1,96; 1,96)$.

Řešený příklad: Graf a rozhodnutí



Obr. 19: Hustota normálního rozdělení, kritická hodnota a kritická oblast ($\alpha = 0,05$) pro oboustranný test a hodnota testové statistiky (příklad 7.8)

● Rozhodnutí:

- ▶ Hodnota $z = -1,48$ spadá do akceptační oblasti $(-1,96; 1,96)$.
- ▶ Nezamítáme H_0 .

Řešený příklad: Závěr

- Na hladině významnosti 5% nemáme důkaz, že by se průměrná doba čekání v bance významně lišila od 10 minut.
- Vedení banky může být spokojeno s aktuálním stavem průměrné doby čekání.

Řešený příklad: Testování průměrné životnosti součástky

Úvod:

- Firma zavedla nový výrobní proces a chce zjistit, zda zvýšil průměrnou životnost součástek.
- Dříve byla průměrná životnost součástek $\mu_0 = 1000$ hodin.
- Ze vzorku $n = 30$ součástek:
 - ▶ Výběrový průměr: $\bar{x} = 1020$ hodin,
 - ▶ Výběrová směrodatná odchylka: $s = 50$ hodin.

Řešený příklad: Formulace hypotéz

- **Nulová hypotéza (H_0):**

$H_0: \mu \leq 1000$ (průměrná životnost se nezměnila nebo zhoršila).

- **Alternativní hypotéza (H_1):**

$H_1: \mu > 1000$ (průměrná životnost se zvýšila).

Řešený příklad: Volba testu a hladina významnosti

- **Volba testu:**

- ▶ Použijeme **t-test**, protože neznáme rozptyl populace a vzorek je malý ($n < 30$).

- **Hladina významnosti:**

- ▶ Zvolíme hladinu významnosti $\alpha = 0,05$, což odpovídá 5% pravděpodobnosti chyby I. druhu.

Řešený příklad: Výpočet testovací statistiky; Kritická hodnota

- Vypočítáme testovací statistiku:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{1020 - 1000}{\frac{50}{\sqrt{30}}} \approx \frac{20}{9,13} \approx 2,19.$$

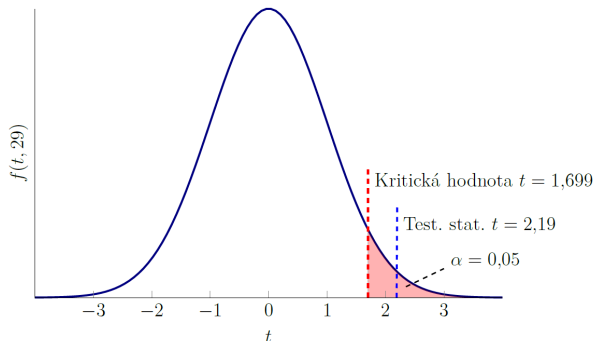
- Výsledek: Hodnota $t = 2,19$.

- **Kritická hodnota:**

- ▶ Získáme pomocí Excel funkce `T.INV`:

$$\text{T.INV}(0,95, 29) = 1,699.$$

Řešený příklad: Graf a rozhodnutí



Obr. 20: Hustota t-rozdělení, kritická hodnota a kritická oblast ($\alpha = 0,05$) pro jednostranný test a hodnota testové statistiky ležící v kritické oblasti (příklad 7.9)

● Rozhodnutí:

- ▶ Hodnota $t = 2,19$ je větší než kritická hodnota 1,699.
- ▶ Zamítáme H_0 ve prospěch alternativní hypotézy (H_1).

Řešený příklad: Závěr

Závěr:

- Na hladině významnosti 5% máme statisticky významný důkaz, že nový výrobní proces zvýšil průměrnou životnost součástek.
- Firma může být spokojena s účinkem změny výrobního procesu.

P-hodnota při statistickém testování

Úvod:

- P-hodnota je alternativní přístup k rozhodování o zamítnutí nebo nezamítnutí nulové hypotézy.
- Doplnuje koncepty kritických hodnot a kritického oboru.

Definice:

P-hodnota

Pravděpodobnost, že při platnosti nulové hypotézy (H_0) získáme tak extrémní nebo ještě extrémnější výsledek, než je ten, který jsme pozorovali.

Interpretace p-hodnoty

- **Nízká p-hodnota** ($< \alpha$):

- ▶ Pozorovaná data jsou nepravděpodobná za předpokladu platnosti H_0 .
- ▶ Zamítáme nulovou hypotézu.

- **Vysoká p-hodnota** ($> \alpha$):

- ▶ Pozorovaná data jsou v souladu s H_0 .
- ▶ Nezamítáme nulovou hypotézu.

Pravidlo rozhodování:

- Pokud $p \leq \alpha$, zamítáme H_0 .
- Pokud $p > \alpha$, H_0 nezamítáme.

Jak p-hodnotu vypočítat?

P-hodnota závisí na:

- Typu testu (např. jednostranný nebo oboustranný),
- Konkrétní testovací statistice (např. t -statistika, z -statistika, F -statistika),
- Pozici pozorované hodnoty na odpovídajícím rozdělení pravděpodobnosti.

Jednostranný test (pravostranný):

$p\text{-hodnota} = P(\text{testová statistika} \geq \text{pozorovaná hodnota testové statistiky})$

Oboustranný test:

- P-hodnota je dvojnásobek pravděpodobnosti na jedné extrémní straně rozdělení:

Použití p-hodnoty při rozhodování

Porovnání s hladinou významnosti α :

- **Pokud $p < \alpha$:** Zamítáme H_0 ve prospěch H_1 .
- **Pokud $p \geq \alpha$:** Nulovou hypotézu H_0 nezamítáme.

Interpretace p-hodnoty:

- P-hodnota poskytuje míru důkazu proti H_0 .
- Menší p-hodnota znamená větší důkaz proti H_0 .
- Na rozdíl od kritických hodnot zohledňuje přesnou míru extrémnosti pozorovaných dat.

Shrnutí: Význam p-hodnoty

- P-hodnota ukazuje pravděpodobnost pozorování tak extrémního výsledku, jaký jsme naměřili, za předpokladu platnosti H_0 .
- Je nástrojem pro rozhodování v kontextu statistických testů.
- Čím je p-hodnota menší:
 - ▶ Tím více se pozorovaná data dostávají do rozporu s H_0 .
 - ▶ Tím větší je důkaz proti H_0 .

Výhody použití p-hodnoty

- **Přesná míra důkazu:** P-hodnota poskytuje přesnou míru síly důkazů proti nulové hypotéze, na rozdíl od kritických hodnot, které pouze rozhodují mezi zamítnutím a nezamítnutím.
- **Flexibilita:** Umožňuje porovnat výsledky více testů s různými hladinami významnosti.
- **Snadnost použití:** Většina statistických softwarů, včetně Excelu, poskytuje p-hodnoty automaticky, což usnadňuje rozhodování.

Výpočet p-hodnoty v Excelu

Funkce T.TEST:

- Syntaxe:

`T.TEST(matice1, matice2, chvosty, typ)`

- Popis parametrů:

- ▶ `matice1, matice2`: Datové rozsahy.
- ▶ `chvosty`: Počet chvostů testu (1 = jednostranný, 2 = oboustranný).
- ▶ `typ`: Typ testu:
 - ★ 1 = Párový t-test,
 - ★ 2 = Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů,
 - ★ 3 = Dvouvýběrový t-test s nerovností rozptylů.

Alternativní metody výpočtu v Excelu

Doplněk Analýza dat:

- Obsahuje stejné tři typy t-testů:
 - ▶ Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů,
 - ▶ Dvouvýběrový t-test s nerovností rozptylů,
 - ▶ Párový t-test.
- P-hodnota je standardní součástí výstupu všech tří variant.
- **Výhoda:** Intuitivní uživatelské rozhraní pro analýzu dat.