STATISTIKA 2

Statistika a statistické zpracování dat

Blok 1-3

Jiří Fišer

8. listopadu 2024

Pravděpodobnost

Pravděpodobnost náhodného jevu A je číslo mezi 0 a 1, které vyjadřuje míru pravděpodobnosti jeho výskytu.

Různé definice pravděpodobnosti:

- **Klasická pravděpodobnost:** Předpokládá rovnoměrně rozložené výsledky.
- **Geometrická pravděpodobnost:** Pravděpodobnost na základě poměru délek, ploch, objemů.
- **Statistická pravděpodobnost:** Odvozená z relativní četnosti výskytu jevu při opakovaných pokusech.

Klasická pravděpodobnost

Definice: Klasická pravděpodobnost pro jev A je:

$$P(A) = \frac{\text{Počet příznivých výsledků}}{\text{Celkový počet možných výsledků}}.$$

Předpoklady:

1. **Konečný počet možných výsledků:** Počet všech možných výsledků (elementárních jevů) je konečný a jasně definovaný.
2. **Stejná pravděpodobnost všech výsledků:** Každý možný výsledek je stejně pravděpodobný.
3. **Určitelnost jevů:** Všechny možné výsledky jsou dopředu známy.
4. **Nezávislost pokusů:** Jednotlivé pokusy jsou nezávislé.

Příklad: Výběr kuličky

V urně je 5 červených a 3 modré kuličky. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném výběru vytáhnete červenou kuličku?

Řešení:

$$P(\text{červená kulička}) = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Sjednocení a průnik jevů

- **Sjednocení jevů (A nebo B)**
  - Pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden z jevů A nebo B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Průnik jevů (A a B)

- Pravděpodobnost, že nastanou oba jevy současně.
- Označuje se $P(A \cap B)$.

Příklad: Sjednocení a průnik jevů

- Událost A: padne liché číslo při hodu kostkou.
- Událost B: padne číslo větší než 4.

Řešení:

- Dílčí pravděpodobnosti:
  - $P(A) = P(1,3,5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
  - $P(B) = P(5,6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,
  - $P(A \cap B) = P(5) = \frac{1}{6}$.
- Pravděpodobnost sjednocení:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Příklad: Pravděpodobnost součtu na dvou kostkách

S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet:

- a) šest,
- b) menší než 7?

a) Součet 6 padne v následujících případech:

$$(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)$$

Počet příznivých možností: 5, celkový počet možností: 36.

$$P(\text{součet } 6) = \frac{5}{36}.$$

Řešení: Pravděpodobnost součtu menšího než 7

b) Možnosti pro součet menší než 7:

Součet	Možnosti
6	$(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$
5	$(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)$
4	$(1,3),(3,1),(2,2)$
3	$(1,2),(2,1)$
2	$(1,1)$

Počet příznivých možností: 15, celkový počet možností: 36.

$$P(\text{součet menší než 7}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Narozeninový problém (R. von Mises, 1939)

Otázka: Kolik minimálně osob musí být ve skupině, aby, ignorujeme-li 29. únor, alespoň dva z nich měli narozeniny ve stejný den roku s pravděpodobností alespoň 50 %?

Řešení:

- Nejprve uvažujeme opačný jev: že žádní dva lidé nemají narozeniny ve stejný den.
- Předpokládáme, že každý den v roce je pro narozeniny stejně pravděpodobný a že rok má 365 dní.

Pravděpodobnost různých narozenin pro n osob:

$$P(\text{různé narozeniny}) = 1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365 - n + 1}{365}.$$

Doplňková pravděpodobnost (pr. opačného jevu):

$$P(\text{alespoň dva mají stejné narozeniny}) = 1 - P(\text{různé narozeniny}).$$

Výpočet pro $n = 23$

Zkusmo jsme výpočtem zjistili, že hledané n je 23, neboť:

Pro $n = 22$:

$$P(\text{různé narozeniny}) \approx 1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{344}{365} \approx 0{,}5243.$$

Doplňková pravděpodobnost:

$$P(\text{alespoň dva z 22 mají stejné narozeniny}) = 1 - 0{,}5243 = 0{,}4757 < 0{,}5.$$

Pro $n = 23$:

$$P(\text{různé narozeniny}) \approx 1 \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{343}{365} \approx 0{,}4927.$$

Doplňková pravděpodobnost:

$$P(\text{alespoň dva z 23 mají stejné narozeniny}) = 1 - 0{,}4927 = 0{,}5073 > 0{,}5.$$

Odpověď: Minimální počet osob ve skupině, aby pravděpodobnost stejného dne narozenin byla alespoň 50 %, je $n = 23$.

Podmíněná pravděpodobnost

Definice: Podmíněná pravděpodobnost je pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B. Označuje se $P(A|B)$ a je definována jako:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{pokud } P(B) > 0.$$

Tento koncept je užitečný v mnoha praktických situacích, například při odhadu pravděpodobnosti úspěchu produktu na trhu, pokud víme, že byl úspěšný v podobném segmentu.

Příklad: Problémy s motorem a převodovkou

V automobilovém servisu bylo zjištěno, že 70 % automobilů potřebuje opravu motoru (jev M), 50 % automobilů má problém s převodovkou (jev P), a 30 % automobilů má problém s obojím (jev $M \cap P$). Jaká je pravděpodobnost, že automobil, který má problém s převodovkou, má také problém s motorem?

Řešení:

- Zadáno:

$$P(M) = 0{,}7, \quad P(P) = 0{,}5, \quad P(M \cap P) = 0{,}3.$$

- Podmíněná pravděpodobnost, že automobil má problém s motorem za předpokladu, že má problém s převodovkou:

$$P(M|P) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6.$$

- **Závěr:** Existuje 60% pravděpodobnost, že automobil s problémem převodovky má také problém s motorem.

Úplná pravděpodobnost

Definice: Zákon úplné pravděpodobnosti umožňuje vypočítat pravděpodobnost jevu na základě rozkladu prostoru jevů na několik disjunktních (vzájemně neslučitelných) událostí.

Vzorec:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n),$$

kde $B_1, B_2, \ldots, B_n$ jsou vzájemně neslučitelné události, které tvoří úplný prostor.

Úprava s podmíněnými pravděpodobnostmi:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + \cdots + P(B_n) \cdot P(A \mid B_n).$$

Příklad: Použití úplné pravděpodobnosti

- V obchodě jsou 3 pokladny, kde dochází k chybám v účtování
  - s pravděpodobnostmi 0,1; 0,05 a 0,2.
- Pravděpodobnosti odbavení pokladnami jsou
  - 0,3; 0,25 a 0,45.
- Jaká je pravděpodobnost, že osoba vycházející z obchodu má chybný účet?

Řešení: Označme:

- A: jev, že došlo k chybě v účtování,
- B_1: zákazník byl obsloužen u první pokladny,
- B_2: zákazník byl obsloužen u druhé pokladny,
- B_3: zákazník byl obsloužen u třetí pokladny.

Výpočet úplné pravděpodobnosti

Hledáme pravděpodobnost $P(A)$, že osoba má chybný účet:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + P(B_3) \cdot P(A \mid B_3).$$

Dosadíme hodnoty:

$$P(A) = 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}25 \times 0{,}05 + 0{,}45 \times 0{,}2.$$

Spočítáme jednotlivé členy:

$$P(A) = 0{,}03 + 0{,}0125 + 0{,}09 = 0{,}1325.$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že osoba vycházející z obchodu má chybný účet, je $P(A) = 0{,}1325$.

Bayesova věta

Definice: Bayesova věta umožňuje přepočítat podmíněnou pravděpodobnost na základě nové informace. Používá se k úpravě pravděpodobnosti příčiny při znalosti důsledku.

Vzorec:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)},$$

kde:

- $P(B_i \mid A)$ je pravděpodobnost jevu B_i, pokud nastal jev A,
- $P(A \mid B_i)$ je podmíněná pravděpodobnost jevu A, pokud nastal jev B_i,
- $P(B_i)$ je pravděpodobnost jevu B_i.

Použití: Často se používá při zpětném vyhodnocování pravděpodobnosti příčiny na základě výsledků nebo nových pozorování.

Příklad: Bayesova věta

V obchodě jsou tři pokladny s následujícími pravděpodobnostmi chyb v účtování: na první pokladně 0,1, na druhé 0,05, na třetí 0,2. Pravděpodobnosti odbavení zákazníků jednotlivými pokladnami jsou 0,3, 0,25, a 0,45. Jaká je pravděpodobnost, že k chybě v účtování došlo na třetí pokladně?

Řešení: Použijeme Bayesovu větu:

$$P(B_3 \mid A) = \frac{P(A \mid B_3) \cdot P(B_3)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + P(A \mid B_3) \cdot P(B_3)}.$$

Kde:

- A — došlo k chybě,
- B_3 — zákazník byl obsloužen na třetí pokladně.

Výpočet pomocí Bayesovy věty

Dosadíme známé hodnoty:

$$P(B_3 \mid A) = \frac{0{,}2 \times 0{,}45}{0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}05 \times 0{,}25 + 0{,}2 \times 0{,}45}.$$

Vypočítáme jmenovatel a čitatel:

$$P(B_3 \mid A) = \frac{0{,}09}{0{,}03 + 0{,}0125 + 0{,}09} = \frac{0{,}09}{0{,}1325} \approx 0{,}6792.$$

Výsledek: Pravděpodobnost, že k chybě došlo na třetí pokladně, pokud víme, že chyba nastala, je přibližně 67,92%.

Poznámka k příkladu - Bayesova věta

Tento příklad ukazuje, jak Bayesova věta umožňuje upravit pravděpodobnost příčiny (pokladna, kde došlo k chybě) na základě nové informace (chyba v účtování).

Bayesova věta je užitečná při práci s podmíněnými pravděpodobnostmi a nachází uplatnění v mnoha praktických oblastech, jako je diagnostika, rizikové analýzy a rozhodování.

Příklad: Pozitivní lékařský test

Zadání: Prevalence výskytu AIDS v populaci je 0,6 %. Použitý test má:

- **Senzitivitu** 99,9 % - je pozitivní, je-li osoba nakažená,
- **Specificitu** 99 % - je negativní, je-li osoba zdravá.

Jaká je pravděpodobnost, že osoba s pozitivním testem skutečně má AIDS?

Řešení pomocí Bayesovy věty

Označíme:

- $P(A) = 0{,}006$ - pravděpodobnost, že osoba má AIDS (prevalence),
- $P(\overline{A}) = 0{,}994$ - pravděpodobnost, že osoba je zdravá,
- $P(T^+|A) = 0{,}999$ - pravděpodobnost pozitivního testu, má-li osoba AIDS (senzitivita),
- $P(T^+|\overline{A}) = 0{,}01$ - pravděpodobnost falešně pozitivního testu (1 - specificita).

Hledáme pravděpodobnost $P(A|T^+)$, že osoba má AIDS, pokud byl test pozitivní:

$$P(A|T^+) = \frac{P(T^+|A) \cdot P(A)}{P(T^+|A) \cdot P(A) + P(T^+|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}.$$

Výpočet

Dosadíme hodnoty:

$$P(A|T^{+}) = \frac{0{,}999 \times 0{,}006}{0{,}999 \times 0{,}006 + 0{,}01 \times 0{,}994} \approx 0{,}376.$$

Odpověď: Pravděpodobnost, že osoba s pozitivním testem má skutečně AIDS, je přibližně 37,6 %.

Geometrická pravděpodobnost

Definice: Geometrická pravděpodobnost se používá v případech, kdy jev nemá konečný počet výsledků, ale lze jej popsat pomocí délky, obsahu nebo objemu. Pravděpodobnost určitého jevu je pak poměr odpovídající geometrické míry jevu k míře celkového prostoru.

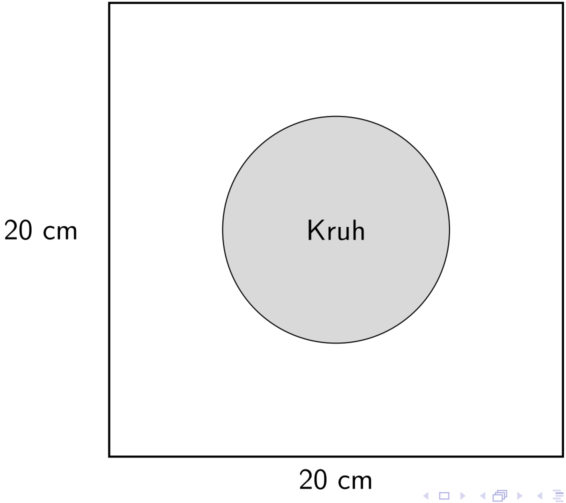
$$P(A) = \frac{\text{Míra příznivého geometrického jevu}}{\text{Celková míra možného geometrického prostoru}}.$$

Předpoklady geometrické pravděpodobnosti

1. **Nepřetržitý prostor výsledků:** Výsledek může spadat do nekonečného nebo kontinuálního prostoru.
2. **Stejná pravděpodobnost na jednotku plochy (objemu):** Pravděpodobnost je úměrná míře prostoru.
3. **Geometrická definice prostoru:** Prostor, ve kterém počítáme pravděpodobnost, musí být geometricky definován.

Příklad: Geometrická pravděpodobnost

Zadání: Máme čtverec o straně 20 cm, uvnitř kterého je umístěn kruh o poloměru 5 cm. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný bod uvnitř čtverce spadne do kruhu?



Řešení příkladu

Nejprve vypočítáme plochu čtverce a kruhu:

$$S_{\text{čtverec}} = 20 \times 20 = 400 \text{ cm}^2,$$

$$S_{\text{kruh}} = \pi \times 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2 \approx 78{,}54 \text{ cm}^2.$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný bod spadne do kruhu:

$$P(\text{kruh}) = \frac{S_{\text{kruh}}}{S_{\text{čtverec}}} = \frac{25\pi}{400} \approx \frac{78{,}54}{400} \approx 0{,}196.$$

Statistická pravděpodobnost

Definice: Statistická pravděpodobnost je relativní četnost, s jakou určitý jev nastává v dlouhodobém opakování experimentu. Vzorec je:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{Počet výskytů jevu } A}{\text{Celkový počet pokusů}}.$$

Předpoklady statistické pravděpodobnosti

1. **Opakovatelnost experimentu:** Experiment lze opakovat za stejných podmínek.
2. **Stabilní výsledky při velkém počtu pokusů:** Relativní četnost se stabilizuje a blíží se určité hodnotě.
3. **Nezávislost pokusů:** Výsledky jednotlivých pokusů jsou nezávislé.
4. **Dostatečně velký počet pokusů:** Význam statistické pravděpodobnosti roste s velkým počtem opakování.

Aplikace statistické pravděpodobnosti

Statistická pravděpodobnost je vhodná pro odhad pravděpodobnosti na základě relativních četností u:

- **Diskrétní konečné situace:** Např. hod kostkou.
- **Diskrétní nekonečné situace:** Např. počet zákazníků přicházejících do obchodu za den.
- **Spojité situace:** Např. měření délky času zdržení zákazníků.

Příklad: Statistická pravděpodobnost

Sledujeme dobu, po kterou se zákazníci zdržují v obchodě. Data o četnostech pro intervaly jsou shrnuta v tabulce:

Interval (min)	**Četnost**
0-5	77
5-10	83
10-15	25
15-20	15
Celkem	200

Řešení příkladu

Pravděpodobnosti pro jednotlivé intervaly:

- $P(0\text{–}5 \text{ minut}) = \frac{77}{200} = 0{,}385$
- $P(5\text{–}10 \text{ minut}) = \frac{83}{200} = 0{,}415$
- $P(10\text{–}15 \text{ minut}) = \frac{25}{200} = 0{,}125$
- $P(15\text{–}20 \text{ minut}) = \frac{15}{200} = 0{,}075$

- Pravděpodobnost, že se zákazník zdrží v obchodě
  - mezi 0 a 5 minutami, je 0,385,
  - mezi 5 a 10 minutami je 0,415,
  - a podobně pro další intervaly.

Nezávislé jevy

Definice: Dva jevy A a B jsou nezávislé, pokud výskyt jednoho neovlivňuje výskyt druhého, což znamená, že:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Nezávislost je důležitá v mnoha reálných situacích, např. při opakovaných náhodných pokusech.

Příklad: Nezávislé jevy

Příklad: Házíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že na první padne číslo 3 a na druhé číslo 5?

- Jev A: Na první kostce padne číslo 3, tedy $P(A) = \frac{1}{6}$.
- Jev B: Na druhé kostce padne číslo 5, tedy $P(B) = \frac{1}{6}$.

Protože jsou jevy nezávislé:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Skupinově nezávislé jevy

Tři jevy A, B, a C jsou **skupinově nezávislé**, pokud platí:

- **Nezávislost po dvou:** Pro každou dvojici platí nezávislost, např. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- **Nezávislost po třech:** Současný výskyt všech tří jevů splňuje $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Příklad: Skupinově nezávislé jevy

Příklad: Dvakrát hodíme férovou mincí. Uvažujme jevy:

- A: V 1. hodu padne líc,
- B: Ve 2. hodu padne líc,
- C: V obou hodech padne totéž.

Kontrola po dvou a po třech ukazuje, že $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$, tedy A, B, C nejsou skupinově nezávislé.

Příklad: Střelba na terč

Petr, Tomáš a Cyril střílí na terč:

- Pravděpodobnosti zásahu: $P(P) = 0{,}2$, $P(T) = 0{,}4$, $P(C) = 0{,}5$.
- Pravděpodobnosti neúspěchu: $P(\overline{P}) = 0{,}8$, $P(\overline{T}) = 0{,}6$, $P(\overline{C}) = 0{,}5$.

Řešení - Střelba na terč

a) Pravděpodobnost, že všichni zasáhnou terč:

$$P(P \cap T \cap C) = P(P) \cdot P(T) \cdot P(C) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}04.$$

b) Pravděpodobnost, že nejvýše jeden zasáhne terč:

$$P(\text{nejvýše jeden}) = P(\overline{P} \cap \overline{T} \cap \overline{C}) + P(P \cap \overline{T} \cap \overline{C}) + P(\overline{P} \cap T \cap \overline{C}) + P(\overline{P} \cap \overline{T} \cap C)$$

$$= 0{,}24 + 0{,}06 + 0{,}16 + 0{,}24 = 0{,}7.$$

Opakované pokusy

Opakované pokusy

- představují situace, kdy se experiment provádí vícekrát za stejných podmínek.
- Zajímají nás zde pravděpodobnosti jevů v závislosti na počtu pokusů.

Nezávislé a závislé opakované pokusy

Nezávislé opakované pokusy:

- Výsledek jednoho pokusu nemá vliv na výsledky dalších.
- Pravděpodobnost daného jevu zůstává ve všech pokusech stejná.

Závislé opakované pokusy:

- Výsledek jednoho pokusu ovlivňuje pravděpodobnost výsledků následujících pokusů.
- Například výběr bez vracení (kuličky v urně)
  - pravděpodobnost se mění s každým pokusem.

Příklad: Chevalier de Méré

Je výhodné vsadit, že:

1. Při čtyřech hodech kostkou padne alespoň jedna šestka?
2. Při dvaceti čtyřech hodech dvěma kostkami padnou alespoň jednou dvě šestky?

Řešení - Chevalier de Méré (1)

1. Pravděpodobnost alespoň jedné šestky při čtyřech hodech jednou kostkou:

- Pravděpodobnost, že při jednom hodu kostkou nepadne šestka: $\frac{5}{6}$.
- Pravděpodobnost, že při čtyřech hodech nepadne šestka ani jednou:

$$P(\text{žádná šestka}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \approx 0{,}482.$$

- Pravděpodobnost alespoň jedné šestky:

$$P(\text{alespoň jedna šestka}) = 1 - P(\text{žádná šestka}) = 0{,}518.$$

Odpověď: Ano, je výhodné vsadit (pravděpodobnost je vyšší než 50 %).

Řešení - Chevalier de Méré (2)

2. Pravděpodobnost alespoň jedné dvojité šestky při 24 hodech dvěma kostkami:

- Pravděpodobnost, že při jednom hodu dvěma kostkami nepadnou dvě šestky: $\frac{35}{36}$.
- Pravděpodobnost, že při 24 hodech nepadnou dvě šestky ani jednou:

$$P(\text{žádné dvě šestky}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}5086.$$

- Pravděpodobnost alespoň jedné dvojité šestky:

$$P(\text{alespoň jedna dvojitá šestka}) = 1 - P(\text{žádné dvě šestky}) = 0{,}4914.$$

Odpověď: Ne, není výhodné vsadit (pravděpodobnost je menší než 50 %).

Bernoulliho schéma

Bernoulliho schéma: Při n nezávislých pokusech, kdy každý pokus má pravděpodobnost úspěchu p, pravděpodobnost k úspěchů je:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Nejpravděpodobnější počet úspěchů (k **splňuje) :**

$$p \cdot (n+1) - 1 \leq k \leq p \cdot (n+1).$$

Příklad: Bernoulliho schéma

Příklad: Student hádá odpovědi na test s 10 otázkami, v každé vybírá z 4 možností.

1. Pravděpodobnost, že uhodne vše správně:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{10} \approx 0{,}00000095.$$

2. Pravděpodobnost, že neuhodne ani jednu odpověď správně:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0{,}0563.$$

3. Pravděpodobnost, že uhodne 6 odpovědí správně:

$$\binom{10}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{4} \approx 0{,}0162.$$

4. $p \cdot (n+1) - 1 \leq k \leq p \cdot (n+1)$, $\frac{1}{4} \cdot (10+1) - 1 \leq k \leq \frac{1}{4} \cdot (10+1)$, $\frac{11}{4} - \frac{4}{4} \leq k \leq \frac{11}{4}$, $\frac{7}{4} \leq k \leq \frac{11}{4}$, $1{,}75 \leq k \leq 2{,}75$, $k = 2$.

Dichotomické pokusy a výběr bez vracení

Dichotomické pokusy:

- Pokusy, které mohou vést pouze ke dvěma výsledkům (např. úspěch/neúspěch).

Výběr bez vracení:

- Mějme soubor N prvků,
- z toho M má určitou vlastnost.
- Pokud vybíráme bez vracení n prvků,
- pravděpodobnost výběru k prvků s touto vlastností je:

$$P(A_k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Příklad: Výběr bez vracení

Příklad: V osudí jsou 2 bílé a 3 černé kuličky. Jaká je pravděpodobnost, že bez vracení vytáhneme 3 kuličky:

1. z nichž 2 budou černé a 1 bílá?
2. které budou postupně barvy černé, bílé a černé?

Řešení:

1. Pravděpodobnost, že 2 budou černé a 1 bílá:

$$P(2 \text{ černé a } 1 \text{ bílá}) = \frac{\binom{3}{2} \times \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = 0{,}6.$$

2. Pravděpodobnost, že budou postupně černá, bílá a černá:

$$P(\text{černá, bílá, černá}) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = 0{,}2.$$

Příklad: Pravděpodobnost uhádnutí alespoň 4 čísel v loterii

Úloha: V loterii je třeba vybrat 6 čísel z celkem 15 čísel. Jaká je pravděpodobnost, že při jednom losování uhádneme alespoň 4 čísla správně?

Řešení:

- Celkový počet možných kombinací 6 čísel z 15 je: $\binom{15}{6} = 5005.$
- Dílčí pravděpodobnosti:
  - $P(4 \text{ správně}) = \frac{\binom{6}{4}\binom{9}{2}}{\binom{15}{6}} = \frac{540}{5005} \approx 0{,}1079.$
  - $P(5 \text{ správně}) = \frac{\binom{6}{5}\binom{9}{1}}{\binom{15}{6}} = \frac{54}{5005} \approx 0{,}0108.$
  - $P(6 \text{ správně}) = \frac{\binom{6}{6}\binom{9}{0}}{\binom{15}{6}} = \frac{1}{5005} \approx 0{,}0002.$
- **Celková pravděpodobnost:**

$$P(\text{alespoň 4 správně}) = 0{,}1079 + 0{,}0108 + 0{,}0002 = 0{,}1189.$$