

Matematická rozcvička pro KMA/MAT1 a KMA/MT1

Pro rozhýbání použijeme část podpůrných materiálů ke knize *Sally Jordan, Shelagh Ross, and Pat Murphy: Maths for Science. Oxford University Press, 2012.*

Začneme (velmi) opatrně

Počítání se zápornými čísly

Úloha Q.1.1: Bez použití kalkulačky vypočtěte:

(a) $2 + (-5)$

(d) $(-2) \cdot (-5)$

(g) $8 : (-4)$

(b) $2 - (-5)$

(e) $(-2) - (-5)$

(h) $(-8) + 4$

(c) $2 \cdot (-5)$

(f) $(-8) - 4$

(i) $(-10) : 5$

Úloha Q.1.2: S použitím kalkulačky vypočtěte:

(a) $(-1736) + 2678$

(c) $(-1073) + (-578)$

(e) $27 \cdot (-367)$

(b) $356 - (-273)$

(d) $(-274) - (-5670)$

(f) $(-20748) : (-76)$

Sčítání a odčítání zlomků

Úloha Q.1.3: Vypočtěte a výsledek převed'te na co nejjednodušší zlomek:

(a) $\frac{1}{3} + \frac{3}{5}$

(c) $\frac{2}{7} + \frac{2}{5}$

(e) $\frac{3}{4} - \frac{1}{8}$

(b) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$

(d) $\frac{2}{7} - \frac{1}{2}$

(f) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{10}$

Násobení zlomků

Úloha Q.1.4: Vypočtěte a výsledek převed'te na co nejjednodušší zlomek:

(a) $\frac{7}{16} \cdot \frac{3}{2}$

(b) $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3}$

(c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$

Dělení zlomků

Úloha Q.1.5: Vypočtěte a výsledek převed'te na co nejjednodušší zlomek:

(a) $\frac{1}{14} : \frac{2}{7}$

(c) $3 : \frac{2}{5}$

(e) $\frac{2/15}{6/5}$

(b) $\frac{3}{8} : 5$

(d) $\frac{2}{3} : \frac{2}{9}$

Počítání s procenty

Úloha Q.1.6: Následující procenta převed'te na co nejjednodušší zlomky:

(a) 5%

(c) 64%

(b) 60%

(d) 69%

Úloha Q.1.7: Následující zlomky převed'te na procenta:

(a) $\frac{7}{10}$

(c) $\frac{3}{2}$

(b) $\frac{13}{25}$

(d) $\frac{13}{16}$

Úloha Q.1.8: Vyčíslete následující podíly:

(a) $\frac{5}{8}$ z 64

(b) $\frac{5}{3}$ z 90

(c) 3% z 1500

(d) 95% z 50

Mocniny

Úloha Q.1.14: Bez použití kalkulačky vypočtete:

(a) 6^0

(f) $\frac{1}{2^{-1}}$

(k) $\frac{1}{5^0}$

(b) 10^{-3}

(g) 2^3

(c) $\frac{1}{6^{-2}}$

(h) 3^2

(d) 2^4

(i) 5^{-1}

Zkontrolujte, zda stejné výsledky obdržíte i na kalkulačce.

(e) 2^{-1}

(j) 5^{-2}

Násobení a dělení s mocninami

Úloha Q.1.15: Následující výrazy zjednodušte na co nejjednodušší mocniny:

(a) $6^{27} : 6^3$

(c) $\frac{10^8}{10^4}$

(e) $10^{-4} : 10^{-27}$

(b) $3^6 \cdot 3^3$

(d) $10^{-8} \cdot 10^{-19}$

(f) $\frac{10 \cdot 10^{11}}{10^{-3}}$

Úloha Q.1.16: S použitím kalkulačky vypočtete:

(a) $3^5 \cdot 2^3$

(c) $4^3 + 4^4$

(b) $\frac{3^4}{2^{-3}}$

(d) $4^3 \cdot 4^4$

Úloha Q.1.17: Následující výrazy zjednodušte na co nejjednodušší mocniny:

(a) $\left(\frac{8}{2}\right)^9$

(b) $\frac{9^{10}}{3^{10}}$

(c) $\frac{4^3}{2^2}$

Mocniny mocnin

Úloha Q.1.18: Následující výrazy zjednodušte na co nejjednodušší mocniny:

(a) $(5^2)^4$

(e) $(5^{19})^1$

(i) $(5^4)^{-1}$

(b) $(6^{-1})^{-6}$

(f) $(10^{-2})^3$

(j) $\left(\frac{1}{10^3}\right)^{-10}$

(c) $(5^3)^2$

(g) $(10^{-3})^{-3}$

(d) $(5^2)^3$

(h) $(2^{-1})^2$

Úloha Q.1.19: Následující výrazy zjednodušte na co nejjednodušší mocniny:

$$(a) (10^3 \cdot 10^5)^2 \quad (b) \left(\frac{7^6}{7^2}\right)^5 \quad (c) \left(\frac{2^2}{3^3}\right)^4$$

Odmocniny a mocniny s racionálními exponenty (podíl celého a přirozeného čísla)

Úloha Q.1.20: Bez použití kalkulačky vypočtete (při výpočtech je dobré si uvědomit, že $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$):

$$(a) 100^{\frac{1}{2}} \quad (e) 32^{\frac{1}{5}} \quad (j) 0,25^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Nápověda: } 0,25 \text{ si můžete vyjádřit jako zlomek.})$$

$$(b) 125^{\frac{1}{3}} \quad (f) 9^{\frac{1}{2}} \quad (g) 81^{\frac{1}{2}}$$

$$(c) \frac{1}{6^{-2}} \quad (h) 8^{\frac{1}{3}} \quad (\text{Zkontrolujte, zda stejné výsledky obdržíte i na kalkulačce.})$$

$$(d) 16^{\frac{1}{4}} \quad (i) 27^{\frac{1}{3}}$$

Úloha Q.1.21: Následující výrazy zjednodušte na co nejjednodušší mocniny:

$$(a) (10^{\frac{1}{2}})^{20} \quad (d) (3^3)^{\frac{1}{3}} \quad (g) \sqrt{3^8}$$

$$(b) (10^{\frac{1}{2}})^2 \quad (e) (6^9)^{\frac{1}{3}} \quad (h) \frac{(10^8)^{\frac{1}{2}}}{(10^{\frac{1}{3}})^9}$$

$$(c) (10^{10})^{\frac{1}{5}} \quad (f) (\sqrt{\pi})^4 \quad (i) (10^{\frac{1}{2}})^7 \cdot (10^9)^{\frac{1}{2}}$$

Úloha Q.1.22: Bez použití kalkulačky vyčíslete následující výrazy (při výpočtech je dobré si uvědomit, že $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$):

$$(a) 9^{\frac{3}{2}} \quad (f) 32^{\frac{2}{5}} \quad (k) 0,25^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Nápověda: } 0,25 \text{ si můžete vyjádřit jako zlomek.})$$

$$(b) 16^{\frac{5}{4}} \quad (g) 32^{-\frac{2}{5}} \quad (l) 0,25^{\frac{3}{2}}$$

$$(c) 100^{-\frac{1}{2}} \quad (h) 9^{-\frac{1}{2}} \quad (m) 0,25^{\frac{3}{2}}$$

$$(d) 100^{-\frac{3}{2}} \quad (i) 4^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{Zkontrolujte, zda stejné výsledky obdržíte i na kalkulačce.})$$

$$(e) 4^{\frac{5}{2}} \quad (j) 125^{-\frac{2}{3}}$$

Správné pořadí operací

Úloha Q.1.23: Bez použití kalkulačky vypočtěte (dejte pozor na správné pořadí operací):

(a) $2 \cdot 4 + 3 \cdot 7$

(d) $(2 + 5)^2$

(g) $2(25 - 5^2)$

(b) $(2 + 4)(3 - 1)$

(e) $(6 - 2^2) \cdot 2$

(h) $3 \cdot 2 \cdot (1 + 3)$

(c) $3 - 2^2$

(f) $2 \cdot 6 - 2^2$

(i) $\frac{4 + 2}{3} - 4$

Úpravy algebraických výrazů

Úpravy rovnic

Úloha Q.5.1:

(a) Z rovnice $h = 3g$ vyjádřete g .

(f) Z rovnice $h = \frac{f}{g}$ vyjádřete f .

(b) Z rovnice $c = ba$ vyjádřete a .

(c) Z rovnice $g = f + h$ vyjádřete f .

(g) Z rovnice $h = \frac{f}{g}$ vyjádřete g .

(d) Z rovnice $a = b - 4$ vyjádřete b .

(h) Z rovnice $a^2 = 3b$ vyjádřete b .

(e) Z rovnice $C = 2\pi r$ vyjádřete r .

(i) Z rovnice $a^2 = 3b$ vyjádřete a .

Úloha Q.5.2:

(a) Z rovnice $c = \sqrt{2d}$ vyjádřete d .

(e) Z rovnice $d = \frac{bcf}{g}$ vyjádřete c .

(b) Z rovnice $q = mc\Delta T$ vyjádřete c .

(c) Z rovnice $\Delta E g = mg\Delta h$ vyjádřete Δh .

(f) Z rovnice $d = \frac{bcf}{g}$ vyjádřete g .

(d) Z rovnice $a = b + c + d + e$ vyjádřete d .

(g) Z rovnice $a = \frac{bc}{de}$ vyjádřete d .

Úloha Q.5.3:

- (a) Z rovnice $h = gk - f$ vyjádřete f .
(b) Z rovnice $h = gk - f$ vyjádřete g .
(c) Z rovnice $h = fg^2$ vyjádřete f .
(d) Z rovnice $A = \pi r^2$ vyjádřete r .
(e) Z rovnice $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ vyjádřete r .
(f) Z rovnice $h = \sqrt{\frac{d}{fg}}$ vyjádřete d .
(g) Z rovnice $a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{cd}}$ vyjádřete d .

Úloha Q.5.4:

- (a) Z rovnice $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ vyjádřete F .
(b) Z rovnice $v^2 = u^2 + 2as$ vyjádřete a .
(c) Z rovnice $v^2 = u^2 + 2as$ vyjádřete u .
(d) Z rovnice $F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1q_2}{r^2}$ vyjádřete q_1 .
(e) Z rovnice $F_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1q_2}{r^2}$ vyjádřete r .
(f) Z rovnice $v_p = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}$ vyjádřete ρ .
(g) Z rovnice $v_p = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}$ vyjádřete μ .

Zjednodušování rovnic

Úloha Q.5.9: Zjednodušte následující výrazy:

- (a) $h \cdot \frac{\nu}{\lambda}$
(b) $\frac{ab}{c} : b$
(c) $\frac{ab}{c} : \frac{1}{b}$
(d) $\frac{ab}{c} \cdot \frac{b}{a}$
(e) $\frac{b}{a} + \frac{c}{2a}$
(f) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{4\pi}$
(g) $\frac{(g+1)}{h^2} \cdot \frac{g^2}{(h+1)}$
(h) $\frac{2b+c}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{(2c+d)}{a^2}$
(i) $\frac{2\pi\sqrt{h}}{(h+1)} \cdot \frac{2\pi\sqrt{h}}{(h+2)}$
(j) $\frac{2\pi\sqrt{h}}{(h+1)} : \frac{2\pi\sqrt{h}}{(h+2)}$

Úloha Q.5.10: Přepište následující výrazy tak, že se „zbavíte“ závorek (většinou násobením) a výsledky co nejvíce zjednodušíte:

- | | | |
|-----------------------|--------------------------|----------------------------------|
| (a) $2a(3a + 5)$ | (e) $(2a + 3)^2$ | (i) $(b^2 - 1) - (b + 1)(b - 1)$ |
| (b) $-(4b - 5)$ | (f) $(2a + b)(a + 3c)$ | |
| (c) $(a - 2)(a + 3)$ | (g) $(s^2 - 1)(s^2 + 1)$ | |
| (d) $(a - 2)(3a - 7)$ | (h) $c(c + 1) + c + 1$ | (j) $(g - 1)(g^2 + g + 1)$ |

Úloha Q.5.11: Následující výrazy převed'te na součin:

- | | | |
|----------------|-----------------|--------------------------------------|
| (a) $a^2 - 2a$ | (b) $2b^2 + 6b$ | (c) $\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$ |
|----------------|-----------------|--------------------------------------|

Úloha Q.5.12:

Z rovnice $V = \frac{\pi}{3}r^2 h_1 + \pi r^2 h_2$ vyjádřete r a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Úloha Q.5.13: S využitím výsledků z Q.5.10 nalezněte řešení následujících kvadratických rovnic:

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| (a) $6a^2 + 10a = 0$ | (c) $3a^2 - 13a + 14 = 0$ |
| (b) $a^2 + a - 6 = 0$ | (d) $4a^2 + 12a + 9 = 0$ |

Úloha Q.5.14: S využitím vzorce vyřešte následující kvadratické rovnice:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| (a) $x^2 + 6x + 9 = 0$ | (c) $x^2 - 5x - 6 = 0$ |
| (b) $x^2 - 6x + 5 = 0$ | (d) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ |

Kombinování rovnic

Úloha Q.5.15:

- Zkombinujte rovnice $a = \omega^2 r$ a $\nu = \omega r$ tak, abyste dostali rovnici pro r , která neobsahuje ω .
- Zkombinujte rovnice $F_x = ma_x$ a $\nu_x = u_x + a_x t$ tak, abyste dostali rovnici pro F_x , která neobsahuje a_x .
- Zkombinujte rovnice $E = mc\Delta T$ a $E = mg\Delta h$ tak, abyste dostali rovnici pro c , která neobsahuje E .

Úloha Q.5.16:

- (a) Zkombinujte rovnice $m = \frac{n}{p}$ a $p = \frac{s}{r}$ tak, abyste dostali rovnici pro r , která neobsahuje p .
- (b) Zkombinujte rovnice $a = bcd$ a $e = ct$ tak, abyste dostali rovnici pro d , která neobsahuje c .
- (c) Zkombinujte rovnice $m = \sqrt{\frac{n}{p}}$ a $p = \frac{9a^2}{n}$ tak, abyste dostali rovnici pro n , která neobsahuje p .

Úloha Q.5.17:

- (a) Zkombinujte rovnice $b = \frac{a}{c}$ a $d = ce^2$ tak, abyste dostali rovnici pro a , která neobsahuje c .
- (b) Pokud v předchozích dvou rovnicích je a měřeno v newtonech, b v kilogramech a d v metrech, v jakých jednotkách, vyjádřených jen pomocí základních jednotek SI (metr, kilogram, sekunda, ampér, kelvin, mol, kandela) je potom veličina e ? (Nápověda: nejprve si pomocí základních jednotek SI vyjádřete odvozenou jednotku newton.)