1 Limita posloupnosti

= hodnota, ke které se členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ blíží, když se index n „blíží k nekonečnu“.

Zápis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nebo zkráceně $\lim a_n$

Podle toho, k čemu se členy posloupnosti blíží, rozlišujeme **4 případy**:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, kde a je reálné číslo.

   Posloupnost **konverguje**.

   Posloupnost **má vlastní limitu** a.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

   Posloupnost **diverguje** k ∞.

   Posloupnost **má nevlastní limitu** ∞.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

   Posloupnost **diverguje** k $-\infty$.

   Posloupnost **má nevlastní limitu** $-\infty$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje. V tomto případě nenajdeme 1 hodnotu, ke které by se blížily všechny členy posloupnosti.

   Posloupnost **osciluje**.

   Posloupnost **nemá limitu**.

Příklad 1 Najděte limitu posloupnosti a nakreslete část grafu posloupnosti.

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

2. $\{2n+3\}_{n=1}^{\infty}$

   $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3)$

3. $\{1-n\}_{n=1}^{\infty}$

   $\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)$

4. $\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$

   $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^n$

Vzhledem k tomu, že je limita posloupnosti definována jako jedna hodnota, ke které se blíží (při rostoucím n) všechny členy posloupnosti, platí následující věta.

Věta 1 *Každá posloupnost má maximálně jednu limitu, tj. jednu nebo žádnou.*

1.1 Výpočet limit posloupností

Limity posloupností z Příkladu 1 šly vypočítat přímým dosazením. Ne vždy je zadání tak snadné, a proto se budeme nyní zabývat tím, jak lze komplikovanější limity vypočítat.

1. **Limita polynomů**

   Buď jde vypočítat přímým dosazením ∞ za n nebo přímo odhadnutím výsledku ze zadání.

   Výsledek $=\infty$ **nebo** $-\infty$ podle **znaménka u členu s nejvyšší mocninou**

   Příklad 2 Najděte limitu posloupnosti.

   (a) $\lim_{n\to\infty}(2n^3-5n+1)$

   (b) $\lim_{n\to\infty}(5n^2-3n^4)$

   (c) $\lim_{n\to\infty}(n^4+5n+10)$

2. **Limita podílu polynomů**

   Buď jde vypočítat vytýkáním a krácením (poněkud zdlouhavé) nebo přímo odhadnutím výsledku ze zadání na základě následující úvahy:

   - Pokud je **nejvyšší mocnina v čitateli i ve jmenovateli stejná**, pak čitatel i jmenovatel **"rostou stejně rychle"**.
     Limita je rovna ***podílu konstant u nejvyšších mocnin***.
   - Pokud je **nejvyšší mocnina v čitateli menší než ve jmenovateli**, pak **"jmenovatel roste rychleji než čitatel"**.
     Limita je rovna 0.

- Pokud je **nejvyšší mocnina v čitateli větší než ve jmenovateli**, pak **"čitatel roste rychleji než jmenovatel"**.
  Limita je rovna ∞ nebo $-\infty$, podle toho, jestli mají konstanty u nejvyšších mocnin stejné nebo opačné znaménko.

Příklad 3 Vypočítejte limity posloupností.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 3n + 5}{2n^2 + n + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - n^2}{n^3 + 3n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - n^2 + 1}{2n^3 - n - 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2n^3}{2 + n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - n^4}{2 - 5n}$$

3. **Limita podílu obsahující a^n, kde $a \in \mathbb{R}$.**
   Buď jde vypočítat vytýkáním a krácením (opět poněkud zdlouhavé) nebo přímo odhadnutím výsledku ze zadání na základě obdobné úvahy jako dříve (roste-li rychleji čitatel nebo jmenovatel).

Příklad 4 Vypočítejte limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 3^n + 3\cdot 2^n}{2^n + 5\cdot 3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 2^n}{2\cdot 8^n - 5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 10^n}{2\cdot 9^n - 5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n + 5\cdot 8^n}{-2\cdot 6^n - 5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n - 4\cdot 8^n}{-2\cdot 6^n - 5^n}$$

4. **Limita posloupnosti, která je po dosazení ∞ za n ve tvaru** 1^∞

Vypočítá se pomocí vzorců

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \text{obecněji } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k \text{, kde } k \in \mathbb{R}$$

Definice 1 Číslo e definované výše uvedenou limitou $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se nazývá Eulerovo číslo. Je to iracionální číslo rovné přibližně $2,718\ldots$

Eulerovo číslo je základem přirozené exponenciální funkce a přirozené logaritmické funkce (viz další semestr) a patří mezi nejdůležitější konstanty používané v přírodních a technických vědách. Je pojmenováno podle matematika Leonharda Eulera.

Příklad 5 Vypočítejte limity posloupností

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n}\right)^n$$

Příklady k procvičení:

Vypočítejte limity posloupností:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{9n+2}{18n-40}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^8-n^3+150}{15-4n^4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n^4+3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3\cdot4^n}{8\cdot4^n+3^n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n+2\cdot3^n}{6^n-2^n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (5n^2-n+3)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3-5n+1}{2n^3+n-2}$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n+2}{-2n^3+2}$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+5}{n}\right)^n$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} (3-10n^3+n)$

2 Číselná řada

= součet všech členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zápis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{nebo} \quad a_1 + a_2 + a_3 \dots$$

Podle toho, jaký má číselná řada součet, rozlišujeme **4 případy**:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, kde s je reálné číslo.

   Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**.

   Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **má součet** s.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

   Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** k ∞.

   Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **má součet** ∞.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$.

   Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** k $-\infty$.

   Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **má součet** $-\infty$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **nemá součet**.

   Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **osciluje**.

Na následujícím příkladu si ukážeme, jak odlišné jsou pojmy posloupnost a číselná řada.

Příklad 6 Uvažujme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}$. Jednoduše lze vypočítat limita této posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tedy **konverguje** a má **vlastní limitu rovnu** 0.

Z této posloupnosti lze vytvořit číselná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} ...$$

Pokud bychom chtěli určit, jaký má tato řada součet, můžeme postupovat např. následujícím způsobem (kterým byl součet nalezen už ve středověku)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ...$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + ...\right.$$

$$\geq 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + ...\right.$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + ... = \infty$$

Z toho vyplývá, že **řada** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **diverguje** a **má součet** ∞.

Dokázat divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nebylo příliš obtížné. Vzhledem k tomu, že u komplikovanějších řad jsou důkazy konvergence/divergence podstatně těžší, byla odvozena jednoduchá pravidla pro konvergenci několika typů řad:

1. **Geometrická řada**

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

s kvocientem q splňujícím $-1 < q < 1$ **konverguje** a **má součet**

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Příklad 7 *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

2. **Geometrická řada**

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

s kvocientem pro $q \geq 1$ diverguje a má součet ∞ nebo $-\infty$ (v závislosti na znaménku prvního členu a).

Příklad 8 *Vyšetřete konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

3. Řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \text{ kde } k \in \mathbb{R}$$
konverguje pro $k > 1$ a **diverguje k** ∞ **pro** $k \leq 1$.

Poznamenejme, že divergence této řady pro $k = 1$ už byla ukázána v Příkladu 6.

Příklad 9 *Vyšetřete konvergenci řady*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

4. Konvergenci/divergenci řady neovlivní, zaměníme-li n za lineární člen $an + b$, kde a, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Příklad 10 *Vyšetřete konvergenci řady*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5}$$

5. Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **nekonverguje**, tj. diverguje nebo osciluje.

Příklad 11 Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{4n^2+1}$$

2.1 Číselná řada s kladnými členy

Pro číselné řady, které mají všechny členy kladné, byla odvozena speciální kritéria, pomocí kterých lze o konvergenci nebo divergenci takových řad rozhodnout. My si pro ilustraci uvedeme jen dvě z nich - podílové a odmocninové kritérium.

Věta 2 ***(Limitní podílové kriterium)***
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a existuje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Platí

(a) je-li $L < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(b) je-li $L > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 12 Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}.$$

Věta 3 ***(Limitní odmocninové kriterium)***

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Platí

(a) je-li $L < 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje,*

(b) je-li $L > 1$*, pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Příklad 13 Rozhodněte o konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^n.$$

Příklady k procvičení:

1. Vyšetřete konvergenci řady. Pokud se jedná o konvergentní geometrickou řadu, stanovte její součet.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6)^2}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+6}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^3}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+6}}$