

1. Určete průnik a sjednocení množin A a B .

$$A = \{x \in \mathbb{R}; |x + 2| < 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{R}; |x| \geq 5\}$$

2. Určete determinant matice

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3. Řešte soustavu lin. rovnic

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$x_2 - x_3 = -1$$

$$x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 - x_4 = 1$$

4. Vypočítejte limitu

$$\lim \frac{n-2n^3}{3n^5+4n} + \frac{2}{3} + \frac{n-2n^3}{3n^3+4n}$$

5. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady a určete její druhý člen

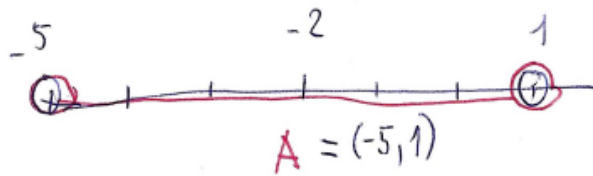
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}$$

6. Řešte soustavu Cramerovým pravidlem

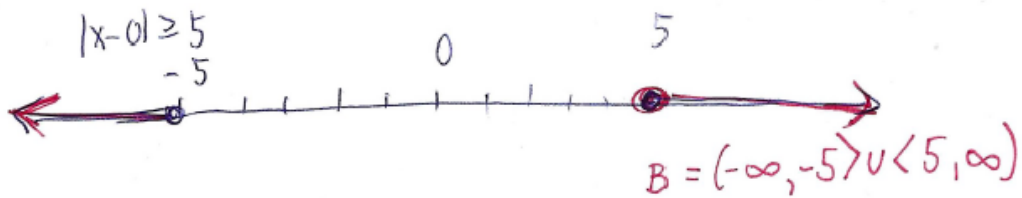
$$3x-3y = 5$$

$$2x-3y = 2$$

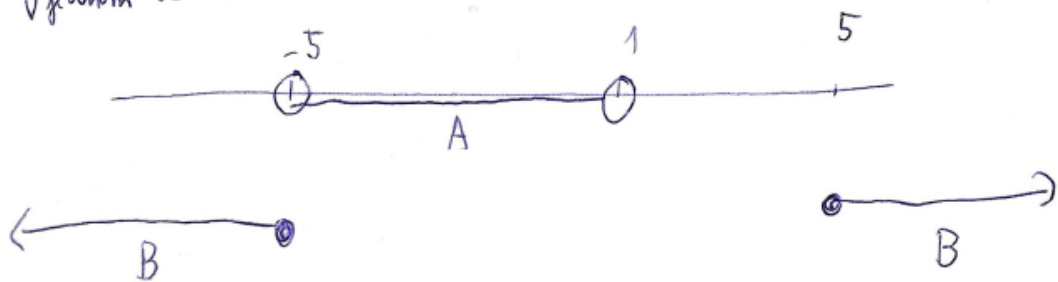
1) A: $|x+2| < 3$... množina bodů, jejichž vzdálenost od -2 je menší než 3
 \parallel
 $|x - (-2)| < 3$



B: $|x| \geq 5$... množina bodů, jejichž vzdálenost od 0 je větší rovna 5
 \parallel
 $|x-0| \geq 5$



Význam obrázku:



$$A \cup B = (-\infty, 1) \cup [5, \infty)$$

$$A \cap B = \emptyset$$

a) Laplace v rozvoji podle 1. sloupce

$$2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + (-2) \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-4 + 1 + 2 - (-2 + 2 + 2)) + (-2) \cdot (-1) \cdot (-2 - 12 + 3 - (6 + 2 + 6))$$

$$= -3 + 2 \cdot (-25) = -53$$

3) $x_1 - x_2 = 1$
 $x_2 - x_3 = -1$
 $x_3 - x_4 = 2$
 $x_1 - x_3 = 0$
 $x_2 - x_4 = 1$

$$A_R = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \textcircled{1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \cdot (-1) \left. \begin{array}{l} \downarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \cdot (-1) \left. \begin{array}{l} \downarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right\} +$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 2 \end{array} \right) \cdot (-1) \left. \begin{array}{l} \downarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right\} +$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$h(A) = 3 = h(A_R) < 4 = \text{počet nezn.}$
 $\Rightarrow \infty$ mnoho řešení závislých
na $4 - 3 = 1$ parametru

$$x_3 - x_4 = 2$$

$$x_1 = t$$

$$x_3 - t = 2$$

$$x_3 = 2 + t$$

$$x_2 - x_3 = -1$$

$$x_2 - (2 + t) = -1$$

$$x_2 = -1 + 2 + t$$

$$x_2 = 1 + t$$

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 - (1 + t) = 1$$

$$x_1 = 1 + 1 + t$$

$$x_1 = 2 + t$$

$$\text{Řešení: } \vec{x} = (2+t, 1+t, 2+t, t), t \in \mathbb{R}$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 2n^3}{3n^5 + 4n} + \frac{2}{3} + \frac{n - 2n^3}{3n^3 + 4n} = 0 + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$$

rychleji roste \downarrow
 $\Rightarrow 0$

\downarrow
 $\frac{2}{3}$

\downarrow
Již roste
stejně rychle

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (n+1)}{3^n}$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot (2+1)}{3^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

limitní podílové kritérium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{3^{n+1}}}{\frac{n \cdot (n+1)}{3^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n \cdot (n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 3^n}{3^n \cdot 3 \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n}$$

$$= \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{řada KONVERGUJE}$$