PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

XM1

RNDr. Vladimíra Mádrová, CSc.

Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s.
Olomouc 2016

Obsah

1 Vektory

Příklad 1.1 *Zjistěte, pro které reálná čísla a, b, c platí rovnost mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a proveďte zkoušku.*

a) $\vec{u} = (2; 3 - b; -5)$ a $\vec{v} = \left(2a - 3; 6; c^3 - 13\right)$ $\left[a = \frac{5}{2}, b = -3, c = 2\right]$

b) $\vec{u} = \left(\frac{3}{4}a + b; 2b; 1\right)$ a $\vec{v} = (10; b + c; c)$ $[a = 12, b = 1, c = 1]$

Příklad 1.2 *Určete vektor $\vec{w}$, jsou-li dány vektory $\vec{a} = (1; -3; 0)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$, $\vec{c}(-2; 0; 4)$.*

a) $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ $[\vec{w} = (2; -1; 5)]$

b) $\vec{w} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ $[\vec{w} = (-2, -8, 1)]$

Příklad 1.3 *Určete vektor $\vec{x}$, pro který platí:*

a) $\vec{u} + \vec{x} = \vec{v}$, když $\vec{u} = (1; -1)$ a $\vec{v} = (-4; 2)$. $[\vec{x} = (-5; 3)]$

b) $2(\vec{x} - 2\vec{u} + \vec{v}) - 3(\vec{x} + \vec{v}) = \vec{x}$, když $\vec{u} = (1; 0; -2)$ a $\vec{v} = (3; -1; 2)$ $\left[\vec{x} = \left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}; 3\right)\right]$

Příklad 1.4 *Vypočtěte skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$*

a) $\vec{a} = (1; -3; 2; 6)$ a $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; 0; -2; \frac{1}{3}\right)$ $\left[\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}\right]$

b) $\vec{a} = \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{3}; \frac{1}{7}; -\frac{3}{4}\right)$ a $\vec{b} = \left(\frac{5}{2}; 3; -\frac{7}{3}; \frac{5}{2}\right)$ $\left[\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{5}{24}\right]$

Příklad 1.5 *Určete vektor $\vec{x}$ vyhovující rovnici $\vec{a_1} + 2\vec{a_2} + 3\vec{a_3} + 4\vec{x} = \vec{o}$,
kde $\vec{a_1} = (5; -8; -1; 2)$, $\vec{a_2} = (2; -1; 4; -3)$, $\vec{a_3} = (-3, 2, -5, 4)$.* $[\vec{x} = (0; 1; 2; -2)]$

Příklad 1.6 *Určete lineární kombinaci $c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + c_3\vec{a_3}$ vektorů $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$.*

a) $\vec{a_1} = (1; -1; 2)$, $\vec{a_2} = (-3; 2; 0)$, $\vec{a_3} = (2; -4; 2)$ a $c_1 = 2$, $c_2 = -2$, $c_3 = \frac{1}{2}$ $[(9; -8; 5)]$

b) $\vec{a_1} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; 2\right)$, $\vec{a_2} = (2; 5; -1)$, $\vec{a_3} = \left(3; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ a $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 0$, $c_3 = -\frac{3}{2}$ $\left[\left(-\frac{17}{4}; -\frac{7}{8}; \frac{3}{2}\right)\right]$

Příklad 1.7 *Rozhodněte, zda vektory $\vec{m} = (3, 2, 5)$ a $\vec{n} = (5, 6, 7)$ jsou lineární kombinací vektorů $\vec{a_1} = (1, 3, 2)$ a $\vec{a_2} = (2, -1, 3)$.*

$$\left[\begin{array}{l} \vec{m} \text{ je lineární kombinací } \vec{a_1} \text{ a } \vec{a_2} \\ \vec{n} \text{ není lineární kombinací } \vec{a_1} \text{ a } \vec{a_2} \end{array}\right]$$

Příklad 1.8 *Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lineárně závislé, či lineárně nezávislé.*

a) $\vec{a} = (4, 1, -2, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1, 0, 1)$, $\vec{c} = (-13, 3, 4, 5)$ [vektory jsou lineárně závislé]

b) $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, -1, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, 1)$ [vektory jsou lineárně nezávislé]

2 Matice

Příklad 2.1 *Pro která reálná čísla a a b platí rovnost matic* A *a* B.

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & a-1 \\ b+3 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ $[a=6, b=4]$

b) $A=\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ 2a-b & b-2a \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ $[a=1, b=-2]$

Příklad 2.2 *Pro matice* A *a* B *vypočítejte:*

a) 2A-3B, je-li $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} -4 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

b) $\frac{1}{2}$A+4B, je-li $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 4 & -4 & 10 & 4 \\ 2 & \frac{21}{10} & \frac{1}{6} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}\right]$

c) A^2, je-li $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}\right]$

Příklad 2.3 *Určete součin matic $A \cdot B$ a $B \cdot A$, pokud existuje, je-li:*

a) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ a $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\left[A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 & 17 \\ -2 & -1 & -4 & -5 \\ 5 & 1 & 8 & 13 \\ 13 & 2 & 20 & 34 \end{pmatrix}; B \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 27 & 34 \end{pmatrix}\right]$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}$ a $B=\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left[A \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{35}{12} \end{pmatrix}; B \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 6 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}\right]$

Příklad 2.4 *Určete reálná čísla a, b, c tak, aby platila rovnost*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ $[a=1, b=-2, c=1]$

Příklad 2.5 *Určete hodnost matice.*

a) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $[h=2]$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $[h=2]$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $[h=2]$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ $[h = 3]$

Příklad 2.6 *Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně závislé či lineárně nezávislé.*

a) $\vec{a} = (1; 4; -3)$
$\vec{b} = (1; -3; -1)$ [lineárně nezávislé]
$\vec{c} = (2; 1; 4)$

b) $\vec{a} = (1; 2; 3)$
$\vec{b} = (4; 7; 5)$ [lineárně nezávislé]
$\vec{c} = (1; 6; 10)$

c) $\vec{a} = (1; -3; -26; 22)$
$\vec{b} = (1; 0; -8; 7)$ [lineárně závislé]
$\vec{c} = (1; 1; -2; 2)$
$\vec{d} = (4; 5; -2; 3)$

Příklad 2.7 *Určete inverzní matici* A^{-1} *k matici* A *a proveďte zkoušku.*
Použijte postup s jednotkovou maticí.

A= $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\right]$

3 Determinanty

Příklad 3.1 *Vypočtěte determinanty.*

a) $\begin{vmatrix} 18 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ [33]

b) $\begin{vmatrix} 24 & \frac{3}{4} \\ \frac{9}{2} & -\frac{1}{6} \end{vmatrix}$ $\left[-\frac{59}{8}\right]$

c) $\begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{t^2-1} & \frac{1+t^2}{t^2-1} \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} t \neq \pm 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \sin\alpha - \sin\beta & \cos\beta - \cos\alpha \\ \cos\beta + \cos\alpha & \sin\alpha + \sin\beta \end{vmatrix}$ [0]

e) $\begin{vmatrix} x-1 & -\frac{1}{x^3} \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \neq 0 \\ x^3 \end{bmatrix}$

Příklad 3.2 *Vypočtěte determinant Sarrusovým pravidlem.*

a) $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ [−22]

b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ $\left[-\frac{119}{72}\right]$

c) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ $\left[-2\left(x^3+y^3\right)\right]$

Příklad 3.3 *Řešte rovnici.*

a) $\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 1 & x+2 & -1 \\ 1 & 3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{bmatrix}$

Příklad 3.4 *Vypočítejte determinant Laplaceovým rozvojem*

a) podle prvků druhého řádku,

b) podle prvků třetího sloupce,

c) nejprve determinant upravte tak, aby v posledním sloupci měl co nejvíce nul a pak jej podle prvků tohoto sloupce rozviňte.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ [10]

Příklad 3.5 *Vypočítejte determinant tak, že jej nejprve upravíte na trojúhelníkový tvar.*

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad [49]$$

Příklad 3.6 *Užitím determinantů rozhodněte, zda vektory jsou lineárně závislé či lineárně nezávislé.*

a) $\vec{a} = (2; 1; 0), \vec{b} = (0; -1; 1), \vec{c} = (1; 1; 1)$ [lineárně nezávislé]

b) $\vec{a} = (1; -1; 0), \vec{b} = (0; -2; 1), \vec{c} = (2; 4; -3)$ [lineárně závislé]

Příklad 3.7 *Vypočtěte determinanty.*

a) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad [-53]$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad [-4]$$

c) $$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \qquad [-1]$$

d) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad [-10]$$

Příklad 3.8 *Zjistěte, zda je matice singulární či regulární.*

(Užitím hodnosti matice i výpočtem determinantu.)

a) $$\mathrm{A}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad [\text{regulární}]$$

b) $$\mathrm{A}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \qquad [\text{singulární}]$$

Příklad 3.9 *Určete inverzní matici* A^{-1} *k matici* A.
Použijte adjungovanou matici a výpočet determinantu.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\right]$$

Srovnejte postupy řešení příkladů 2.7 a 3.9

4 Soustavy rovnic

Příklad 4.1 *Určete všechna řešení soustavy rovnic.*

a)
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ x - 2y - z &= 2 \\ 3x - y + 5z &= 3 \\ -2x + 2y + 3z &= -4 \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l}\text{jediné řešení} \\ \vec{u} = \left(\frac{10}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{2}{7}\right)\end{array}\right]$

b)
$$\begin{aligned} x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l}\text{jediné řešení} \\ \vec{x} = \left(1, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1\right)\end{array}\right]$

c)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= -6 \\ 5x_2 - 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l}\text{nekonečně mnoho řešení} \\ \text{závislých na jednom parametru} \\ \text{obecné řešení:} \\ \vec{x} = \left(\frac{u-2}{8}, u, \frac{6+5u}{8}\right), u \in R\end{array}\right]$

d)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l}\text{jediné řešení, a to} \\ \text{triviální: } \vec{o} = (0, 0, 0, 0)\end{array}\right]$

e)
$$\begin{aligned} -3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 3x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l}\text{nekonečně mnoho řešení} \\ \text{závislých na dvou parametrech} \\ \text{obecné řešení:} \\ \vec{x} = \left(t - s,\ \frac{2}{3}s, s, t\right), s, t \in R\end{array}\right]$

Příklad 4.2 *Užitím Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic.*

a)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 3z &= -1 \\ 4x - 4y - z &= 3 \\ 8x - 9z &= 0 \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l}\text{právě jedno řešení} \\ \vec{u} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)\end{array}\right]$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 2 \\ x - y - z + u &= 4 \\ x - y + z - u &= 0 \\ x + y - z + u &= 10 \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l}\text{jediné řešení} \\ \vec{u} = (5, 3, -4, -2)\end{array}\right]$

5 Limity posloupností

Příklad 5.1 *Vypočítejte limity posloupností.*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3-7n^5-10^{15}\right)$ $[-\infty]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3n+7}{\sqrt{15}-n}$ $[-\infty]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+4n)^2\,n^3}{(1-n)^3\,4n^2}$ $[-4]$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}+2n}{n^2+3}$ $[0]$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+1}\right)\right]$ $[0]$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n-7}-2n\right)$ $\left[\dfrac{5}{4}\right]$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\,(n+2)!-n!}{8\,(n+2)!}$ $\left[\dfrac{3}{8}\right]$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}\cdot 3^n-2\cdot 5^{n+1}}{8\cdot 5^n+2\cdot 3^{n-2}}$ $\left[-\dfrac{5}{4}\right]$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n+4}{n^2-5n}+\dfrac{3-n^3}{2n^2-8n+15}\right]$ $[-\infty]$

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{5}{4}-\dfrac{1+2n^4}{7n^3+8n^4+2}\right]$ $[1]$

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{300n^2+4n-5}{4+2n+\frac{1}{100}n^2}-3n\right)$ $[-\infty]$

l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+2)^2}{7+2n-n^3}+\dfrac{3}{n}\right)$ $[0]$

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3-4n^2+3}{5n-2n^2}+\dfrac{n^3-4n}{2-n^5}\right)$ $[-\infty]$

n) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n^6+1}{4n+3n^6}+\dfrac{1-3n^2}{n^2-2}\right)$ $[-1]$

o) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{3+4n}{5n-2}\right)$ $[1]$

p) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

q) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2}{n^3-1}\cdot\sin e^n\right)$ [užijte větu „0 · omezená posloupnost“ 0]

r) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-2)^n\cdot n\right]$ [užijte větu o limitě vybrané posloupnosti neexistuje]

6 Číselné řady

Příklad 6.1 *Napište prvních 5 členů řady a stanovte členy* a_{n-2} *a* a_{n+1}.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n}$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{10} + \cdots \quad a_{n-2} = \tfrac{3}{2n-4};\ a_{n+1} = \tfrac{3}{2n+2} \right]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} = 1 + \frac{4}{3} + 2 + \frac{16}{5} + \frac{16}{3} + \cdots \quad a_{n-2} = \tfrac{2^{n-2}}{n-1};\ a_{n+1} = \tfrac{2^{n+1}}{n+2} \right]$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{n\,(n+1)}$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{n\,(n+1)} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{12} + \frac{3}{10} + \frac{7}{30} + \cdots \quad a_{n-2} = \tfrac{n}{(n-2)(n-1)};\ a_{n+1} = \tfrac{n+3}{(n+1)(n+2)} \right]$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+3}$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + 1 + \frac{24}{7} + 15 + \cdots \quad a_{n-2} = \tfrac{(n-2)!}{n+1};\ a_{n+1} = \tfrac{(n+1)!}{n+4} \right]$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{2n!}$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{2n!} = -\frac{e}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{e^3}{12} + \frac{e^4}{48} - \frac{e^5}{240} + \cdots \quad a_{n-2} = (-1)^{n-2} \tfrac{e^{n-2}}{2(n-2)!};\ a_{n+1} = (-1)^{n+1} \tfrac{e^{n+1}}{2(n+1)!} \right]$

Příklad 6.2 *Znáte-li prvních 5 členů řady, zapište řadu stručně symbolicky.*

a) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} \right]$

b) $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \cdots$ [$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ je to geometrická řada]

c) $\displaystyle\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{16} + \frac{4}{25} + \frac{5}{36} + \cdots$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} \right]$

d) $\displaystyle\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 7} + \frac{5}{7\cdot 9} + \frac{6}{9\cdot 11} + \cdots$ $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(2n-1)\,(2n+1)} \right]$

e) $\displaystyle 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$ [$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ je to geometrická řada]

Příklad 6.3 *Rozhodněte. zda je daná řada geometrická. Pokud ano, stanovte její součet s.*

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ [není geometrická]

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n 4^{n-1}}$ [je geometrická $s = \frac{20}{11}$]

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ [není geometrická]

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ $\left[\begin{array}{l}\text{je geometrická} \\ s=\frac{2}{2+\sqrt{2}}\end{array}\right]$

Příklad 6.4 *Užitím nutné podmínky konvergence řady rozhodněte, zda daná řada diverguje.*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2}{n^2+2}$ [řada diverguje]

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-10n^2+5n^3}{6-7n^2}$ [řada diverguje]

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n5^n}$ [nelze rozhodnout]

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{50}{(n+1)!}$ [nelze rozhodnout]

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{e^n}$ [nelze rozhodnout]

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{arctg} n}$ [řada diverguje]

Příklad 6.5 *Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady a určete její zadaný člen.*

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{5^{n+1}}; a_5=?$ $\left[\text{řada diverguje}; a_5=\frac{8!}{5^6}\right]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n\cdot 7^{n+2}}; a_3=?$ $\left[\text{řada konverguje}; a_3=\frac{4^3}{3\cdot 7^5}\right]$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n-3}\right)^n; a_4=?$ $\left[\text{řada konverguje}; a_4=\left(\frac{8}{13}\right)^4\right]$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-4}{2n+1}\right)^n; a_4=?$ $\left[\text{řada diverguje}; a_4=\left(\frac{8}{9}\right)^4\right]$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{(n+3)!}; a_2=?$ $\left[\text{řada konverguje}; a_2=\frac{13}{5!}\right]$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}; a_3=?$ $\left[\text{řada konverguje}; a_3=\frac{16}{625}\right]$