MVŠO

ALGEBRA

STUDIJNÍ OPORA PRO KOMBINOVANÉ STUDIUM

ALGEBRA

RNDr. Vladimíra Mádrová, CSc.

RNDr. Vratislava Mošová, CSc.

Mgr. Veronika Říhová, Ph.D.

Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., 2018

Autoři: RNDr. Vladimíra MÁDROVÁ, CSc.,
RNDr. Vratislava MOŠOVÁ, CSc.,
Mgr. Veronika ŘÍHOVÁ, Ph.D.

Olomouc 2018

Obsah

Úvod

Cílem předmětu je seznámit studenty se základy výrokové logiky, teorie množin, abstraktní algebry, lineární algebry, číselnými posloupnostmi a řadami.

Student po ukončení semestru umí definovat základní pojmy matematické logiky a množinové operace, rozumí logické výstavbě matematiky, umí vyhodnotit pravdivost složených výroků. Má povědomí o algebraických strukturách a relacích. Umí definovat základní pojmy lineární algebry a rozumí jim, dokáže vysvětlit operace s maticemi a determinanty, aplikuje základní metody řešení soustav rovnic. Definuje číselnou posloupnost, dokáže určovat její členy a nakreslit její graf. Rozumí pojmu limita posloupnosti a dokáže jej vysvětlit a vizualizovat, zvládá výpočet limit posloupností a získá počtářskou zručnost při jejich výpočtu. Popíše konstrukci číselné řady a jejího součtu a na základě kritérií dokáže rozhodnout o konvergenci či divergenci číselné řady.

Kapitola 1

Výroková logika

Po prostudování kapitoly budete umět:

- Charakterizovat pojmy výrok a výroková forma,
- definovat výrokové operace,
- užívat tabulku pravdivostních hodnot,
- definovat základní pojmy axiomatické výstavby matematické teorie,
- rozlišovat a negovat obecný a existenční kvantifikátor.

Klíčová slova:

Výrok, výroková forma, pravdivostní hodnota, negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence, logická spojka, kvantifikátor, axiom, definice, věta, důkaz.

Logika

Matematická logika se zabývá přesným formálním studiem jazyka matematiky a matematických pracovních postupů. Při studiu matematiky se setkáváme s pojmy výrok, axiom, definice, věta, důkaz atd. Tyto pojmy považujeme za základní prvky logické výstavby matematiky. Vyskytují se v celém dalším výkladu, proto je nezbytné se s nimi obeznámit a pochopit přesně jejich význam. Základní význam v matematické logice mají výroky.

Výrok je jakékoliv sdělení (tvrzení), o němž má smysl rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé, přičemž z těchto dvou možností nastane právě jedna. Pravdivému výroku přiřazujeme pravdivostní hodnotu 1 a nepravdivému 0. Stručně budeme psát ph 1 a ph 0.

Příklady výroků:

- Praděd je nejvyšší hora České republiky. (ph 0)
- $2 + 3 = 5$ (ph 1)
- Řešením kvadratické rovnice $x^2 - 5x = 0$ jsou čísla 0 a 5. (ph 1)
- Každý pravoúhlý trojúhelník je rovnostranný. (ph 0)

Naproti tomu výroky nejsou:

- Kéž by Olomouc byla hlavním městem České republiky!
- Sestrojte trojúhelník!
- Je x reálné číslo?

Z uvedených příkladů je zřejmé, že výrok může mít jedině tvar věty oznamovací. Věty tázací, rozkazovací a přací výroky nejsou. Avšak ani oznamovací věta nemusí být výrokem.

Například:

- Číslo x je dělitelné pěti. (není výrok)
- Přímka p je kolmá na přímku q. (není výrok)

O pravdivosti či nepravdivosti těchto sdělení nemá smysl uvažovat, dokud za x nedosadíme určité číslo a dokud nebudeme konkrétně znát přímky p a q. Zatím tedy výše uvedená sdělení nejsou výroky, ale jsou to tzv. výrokové formy.

Výroková forma je sdělení, které obsahuje jednu nebo více proměnných, a které se po dosazení proměnné z určité neprázdné množiny (definičního oboru výrokové formy) stane výrokem.

Podmnožina definičního oboru, pro jejíž prvky se výroková forma stane pravdivým výrokem, se nazývá **obor pravdivosti** výrokové formy.

Výrokovou formu jedné proměnné x budeme značit V(x).

Výrokovou formu např. tří proměnných x, y a z budeme značit V (x, y, z).

Příklad výrokové formy.

a) Městem M protéká řeka Morava.
   Pokud za město M dosadíme město Olomouc, resp. Praha, výrok bude pravdivý, resp. nepravdivý.
b) $x^2 - 4 = 0$ je výroková forma
   Definiční obor: $x \in \mathbb{R}$
   Obor pravdivosti je $\{-2; 2\}$.

Z výrokové formy lze získat výrok dvojím způsobem:

1) Dosazením konstant za všechny proměnné z definičního oboru výrokové formy.
2) Vázáním všech proměnných kvantifikátorem.

Příklad Uvažujme výrokovou formu a utvořme z ní výrok.
Výroková forma. Reálné číslo x je kladné. Definiční obor: $x \in \mathbb{R}$

1) Dosadíme-li za x číslo 5, obdržíme výrok:
   Reálné číslo 5 je kladné. Stručně $5 > 0$. (ph 1)
   Dosadíme-li za x číslo -7, pak obdržíme výrok:
   Reálné číslo -7 je kladné. Stručně $-7 > 0$. (ph 0)
2) Každé reálné číslo je kladné. (ph 0)
   Existuje reálné číslo, které je kladné. (ph 1)

Příklad výrokové formy, která obsahuje 3 proměnné. Pro reálná čísla platí $x + y = z$.
Řešení

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla.

Dosadíme-li $x = -1, y = 8$ a $z = 15$, pak obdržíme pravdivý výrok

$$-1 + 8 < 15.$$

Dosadíme-li $x = 5, y = 3$ a $z = 2$, pak obdržíme nepravdivý výrok

$$5 + 3 < 2.$$

Výroky i výrokové formy lze spojovat neboli provádět s nimi operace a vytvářet tak výroky a výrokové formy složené.

Složené výroky tvoříme z jednoduchých výroků pomocí logických spojek, které se někdy nazývají výrokotvorné operátory či funktory.

Výrokové operace

Nechť A a B jsou jednoduché výroky.

Operace	Název	Označení	Zápis	Čteme
unární	negace	$\neg$	$\neg A$	A neplatí; non A; není pravda, že platí A
binární	konjunkce disjunkce implikace ekvivalence	$\wedge$ $\vee$ $\Longrightarrow$ $\Leftrightarrow$	$A \wedge B$ $A \vee B$ $A \Rightarrow B$ $A \Leftrightarrow B$	A a zároveň (současně) B A nebo B (v nevylučovacím smyslu) z A plyne B; jestliže A, pak B A právě když B; A tehdy a jen tehdy když B

Definice výrokových operací pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Negace pravdivého výroku A je nepravdivý výrok a negace nepravdivého výroku je výrok pravdivý.
Konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá, jsou-li oba výroky A a B pravdivé, v ostatních případech je nepravdivá.

Disjunkce $A \vee B$ je pravdivá, je-li aspoň jeden z výroků A a B pravdivý. Jsou-li oba výroky A a B nepravdivé, pak jejich disjunkce je nepravdivá.

Implikace $A \Longrightarrow B$ je pravdivá, jsou-li oba výroky A a B pravdivé nebo je-li výrok A nepravdivý a B jakýkoliv. Nepravdivá je pouze v případě, je-li A pravdivý a B nepravdivý výrok.

Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ je pravdivá, jsou-li oba výroky A a B pravdivé nebo oba nepravdivé. Mají-li výroky A a B opačnou pravdivostní hodnotu je ekvivalence nepravdivá.

Složený výrok, který při všech možných pravdivostních hodnotách vstupujících výroků nabývá pravdivostních hodnot 1, resp. 0, se nazývá **tautologie**, resp. **kontradikce**.

Zákony výrokové logiky

1) $A \vee \neg A$ (zákon o vyloučení třetího)
2) $\neg(A \wedge \neg A)$ (zákon sporu)
3) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ (zákon dvojí negace)
4) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge$ A komutativní zákon pro konjunkci a disjunkci
5) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
6) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ asociativní zákon
7) $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
8) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ distributivní zákon
9) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
10) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ De Morganovy zákony
11) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
12) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
13) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ princip důkazu sporem
14) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ princip nepřímého důkazu
15) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ zákon tranzitivity implikace
16) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ zákon hypotetického sylogismu

Určování pravdivostních hodnot složených výroků a výrokových forem provádíme zpravidla tabulkovou metodou - užitím tabulek pravdivostních hodnot.

Příklad Přesvědčíme se, že složený výrok $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B)$ je tautologie.

Řešení

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A \vee \neg B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1

Z posledního sloupce, v němž jsou samé jedničky, je zřejmé, že daný výrok je tautologie.

Příklad Zjistěme, zda je složený výrok $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$ kontradikce.

Řešení

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge B)$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

Daný výrok je kontradikce, poněvadž v posledním sloupci jsou samé nuly.

Příklad Určete, pro které trojice výroků A, B, C je pravdivý výrok $[(A \vee B) \wedge C] \Rightarrow (\neg A)$.

Řešení

A	B	C	$\neg A$	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$[(A \vee B) \wedge C] \Rightarrow (\neg A)$.
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1

Výrok je pravdivý ve všech případech kromě dvou trojic vstupujících výroků: (1, 1, 1) a (1, 0, 1).

Logická výstavba matematiky

Každá matematická teorie je budována prostřednictvím souboru axiomů, definic a matematických vět. Soustava axiomů musí být bezesporná, nezávislá a úplná.

Základní matematické pojmy jako jsou bod, přímka, rovina, přirozené číslo, nelze definovat pomocí pojmů jednodušších. Zavádíme je axiomy, v nichž se tyto pojmy vyskytují spolu se vztahy mezi nimi.

Příklad Dvěma různými body je určena jediná přímka.

Axiom je matematický výrok, který se považuje za pravdivý a nedokazuje se; je ověřen praxí.

Matematická definice zavádí nový pojem, stanoví jeho název a udává charakteristické vlastnosti pojmu, který jej odlišuje od ostatních.

Smyslem definice je zavést nový pojem takovým způsobem, že o každém objektu lze rozhodnout, zda do množiny objektů vymezených definicí patří, či nepatří.

Příklad Dvě přímky se nazývají různoběžné, mají-li jediný společný bod.

Matematická věta vypovídá o vlastnostech matematických objektů a o vztazích mezi nimi. Je to vždy tautologie, kterou je možné logicky odvodit z axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Matematické poznatky jsou v ní vyjádřené slovy nebo symbolickým zápisem.

Příklad Trojúhelník ABC je pravoúhlý, právě když v něm platí $c^2 = a^2 + b^2$, kde a, b jsou délky odvěsen a c je délka přepony tohoto trojúhelníku.

Stavba matematické věty

1) **Tvar implikace**: $\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$

   Výrok p je předpoklad a výrok q je tvrzení věty. Výrok p je postačující podmínkou pro výrok q a výrok q je nutnou podmínkou pro výrok p.

   Příklad Je-li číslo dělitelné devíti, pak je dělitelné třemi.

   Věty přidružené k matematické větě $\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}$.

   a) **Věta obměněná** má tvar: $\neg\mathrm{q} \Rightarrow \neg\mathrm{p}$ a vždy platí, protože $(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \Leftrightarrow (\neg\mathrm{q} \Rightarrow \neg\mathrm{p})$ je tautologie.

      Příklad Není-li číslo dělitelné třemi, pak není dělitelné devíti. (věta platí)

   b) **Věta obrácená** má tvar: $\mathrm{q} \Rightarrow \mathrm{p}$ a ta může, ale i nemusí platit.

      Příklad Je-li číslo dělitelné třemi, pak je dělitelné devíti. (věta neplatí)

      Pokud platí věta i věta k ní obrácená, vyslovujeme matematickou větu ve tvaru ekvivalence.

2) **Tvar ekvivalence**: $\mathrm{p} \Leftrightarrow \mathrm{q}$

   Výrok p je nutnou a zároveň postačující podmínkou pro výrok q a výrok q je nutnou a zároveň postačující podmínkou pro výrok p. Platí tedy: $(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q} \wedge \mathrm{q} \Rightarrow \mathrm{p}) \Leftrightarrow (\mathrm{p} \Leftrightarrow \mathrm{q})$

Příklad Číslo je dělitelné šesti, právě když je dělitelné dvěma i třemi.

Matematické věty slouží k budování matematické teorie i k využití matematických poznatků v praxi. Logický proces, kterým se ověřuje platnost matematické věty pomocí axiomů, definic a dříve dokázaných vět se nazývá **důkaz** matematické věty.

Každou matematickou větu je nutné dokázat. Podle použitých postupů rozlišujeme důkazy:

- **Přímé**: realizujeme jako řetězec pravdivých implikací $\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{p}_1 \Rightarrow \mathrm{p}_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathrm{q}$.
- **Nepřímé**: realizujeme na základě implikace $\neg\mathrm{q} \Rightarrow \neg\mathrm{p}$, neboť $(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \Leftrightarrow (\neg\mathrm{q} \Rightarrow \neg\mathrm{p})$; dokážeme větu obměněnou.
- **Sporem**: realizujeme na základě zákona $(\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{q}) \Leftrightarrow \neg(\mathrm{p} \wedge \neg\mathrm{q})$; negujeme původní výrok a pomocí řetězce implikací dospějeme ke sporu
- **Matematickou indukcí**: dokážeme, že výrok platí pro nejmenší prvek a z platnosti výroku pro n dokážeme, že platí pro $n + 1$
- **Rozborem možností**
- **Uvedením protipříkladu**

Kvantifikátory

Již jsme se zmiňovali, že z výrokové formy můžeme obdržet výrok užitím kvantifikátoru. V matematických větách se kvantifikátory často vyskytují.

Rozlišujeme:

$\forall$ **obecný kvantifikátor** (velký)

symbol vznikl převrácením prvního písmene anglického slova ,,ALL´´)

$\exists$ **existenční kvantifikátor** (malý)

symbol vznikl otočením prvního písmene anglického slova ,,EXIST´´)

zápis	čteme
$\forall x$	pro každé x, pro všechny x, pro libovolné x
$\exists x$	existuje (aspoň jedno) x, pro některé x, pro vhodné x

Příklady kvantifikovaných výroků.

$\forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ x^2 \geq 0$

Kvadrát každého reálného čísla je nezáporný. (ph 1)

$\exists\, x \in \mathbb{R}\colon\ |x| = 0$

Existuje (aspoň jedno) reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna nule. (ph 1)

$\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}\colon\ |\mathrm{x}| > 0$

Absolutní hodnota všech reálných čísel je kladné číslo. (ph 0)

Negování kvantifikovaných výroků

U negovaného kvantifikovaného výroku zaměníme obecný kvantifikátor existenčním a existenční kvantifikátor zaměníme obecným a výrokovou formu nahradíme její negací.

výrok	negace výroku
Pro každé x platí $\mathrm{V}(x)$ Zápis: $\forall\, x\colon \mathrm{V}(x)$	Není pravda, že pro každé x platí $\mathrm{V}(x)$. Existuje (aspoň jedno) x, pro které neplatí $\mathrm{V}(x)$. Zápis: $\exists x\colon \neg\mathrm{V}(x)$
Příklad Pro každé reálné číslo x platí $x^2-4\geq 0$. Zápis: $\forall x\colon \mathrm{x}^2-4\ \geq 0$ (ph 0) $\begin{pmatrix}\text{Pro } x=2; 3{,}5 \text{ je ph } 1\\ \text{Pro } x=1; \frac{1}{2}, 0 \text{ je ph } 0\end{pmatrix}$	Existuje reálné číslo x pro něž platí $\mathrm{x}^2-4<0$. (ph 1) (je to např. $x=1; 1{,}5;\ 0$)
Existuje x takové, pro něž platí $\mathrm{V}(x)$. Zápis: $\exists x\colon \mathrm{V}(x)$	Není pravda, že existuje x , pro něž platí $\mathrm{V}(x)$ Pro žádné x neplatí $\mathrm{V}(x)$. Zápis: $\forall x\colon \neg\mathrm{V}(x)$
Příklad Existuje aspoň jeden trojúhelník, který není pravoúhlý. (ph 1)	Všechny trojúhelníky jsou pravoúhlé. (ph 0)

Jistě jste si všimli, že negací pravdivého výroku jsme obdrželi výrok nepravdivý a naopak.

Negování výroků s udáním počtu

aspoň n je …	negace	nejvýše $(n-1)$ je …
nejvýše n je …	negace	aspoň $(n+1)$ je …

Příklad Ve třídě je aspoň 17 studentů. (Znamená to, že je jich 17 nebo více.)
Negace: Ve třídě je nejvýše 16 studentů. (Znamená to, že je jich 16 nebo méně.)

Příklad V sadě je nejvýše 8 hrušní.
Negace: V sadě je aspoň 9 hrušní.

Pořadí kvantifikátorů

Kvantifikátory můžeme řadit též za sebou. Na pořadí kvantifikátorů ∃ a ∀záleží! Pořadí kvantifikátorů téhož typu lze zaměňovat, ale pořadí kvantifikátorů opačného typu zaměňovat nelze.

Platí:

$$\forall\, x\, \forall\, y\colon \mathrm{V}(x,y) \Leftrightarrow \forall\, y\, \forall\, x\colon \mathrm{V}(x,y)$$
$$\exists\, x\, \exists\, y\colon \mathrm{V}(x,y) \Leftrightarrow \exists\, y\, \exists\, x\colon \mathrm{V}(x,y)$$

Naproti tomu:

$$\forall\, x\ \ \exists\, y\colon \mathrm{V}(x,y) \not\Leftrightarrow \exists\, y\, \forall\, x\colon \mathrm{V}(x,y)$$
$$\exists\, x\, \forall\, y\colon \mathrm{V}(x,y) \not\Leftrightarrow \forall\, y\, \exists\, x\colon \mathrm{V}(x,y)$$

Σ

Pravdivostní hodnotu výrokové formy je možné vyhodnotit pomocí tabulky pravdivostních hodnot. Matematické věty a definice jsou formulovány jako implikace nebo jako ekvivalence.

?

1. Jaký je rozdíl mezi výrokem a výrokovou formou?
2. Co je obor pravdivosti výrokové formy?
3. Vyjmenujte výrokové operace!
4. Uveďte, kdy je pravdivá konjunkce (disjunkce, implikace, ekvivalence)?
5. Co je to tautologie (kontradikce)?
6. Jak se negují kvantifikované výroky?
7. Jak čteme: $\forall x$ a $\exists x$?
8. Jaký je vztah mezi větou přímou a obrácenou (obměněnou)?
9. Rozhodněte, které sdělení je výrok. Pokud ano, tak uveďte jeho pravdivostní hodnotu.
   a) Číslo 13 je prvočíslo. [výrok; ph 1]
   b) Číslo 15 vydělte třemi. [není výrok]
   c) Absolutní hodnota reálného čísla je vždy číslo nezáporné. [výrok; ph 1]
   d) Chlapec je plnoletý. [není výrok]
   e) $6 + 3 < 2$ [výrok; ph 0]
   f) Cena kabátu je vyšší než cena bot. [není výrok]
   g) Čtyřúhelník ABCD je čtverec. [není výrok]
   h) Každý čtyřúhelník je čtverec. [výrok, ph 0]
   i) Je x celé číslo? [není výrok]

10. Z výrokové formy utvořte výrok pravdivý i nepravdivý.

- $x < 5, x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} \text{Dosazením:} \\ 6 < 5; (\text{ph } 0) \quad 3 < 5; (\text{ph } 1) \\ \text{Užitím kvanfitikátorů:} \\ \text{Pro každé } x \in \mathbb{R} \text{ je } x < 5. (\text{ph } 0) \\ \text{Existuje } x \in \mathbb{R} \text{ takové, že } x < 5. (\text{ph}1) \end{bmatrix}$$

- Trojúhelník ABC je rovnostranný.

$$\begin{bmatrix} \text{Každý trojúhelník ABC je rovnostranný.} (\text{ph } 0) \\ \text{Existuje trojúhelník ABC, který je rovnostranný } (\text{ph } 1) \end{bmatrix}$$

- $x > y + 3 \quad x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{bmatrix} \text{Dosazením:} \\ x = 10, y = 4 \ (\text{ph } 1) \\ x = -2, y = 0 \ (\text{ph } 0) \end{bmatrix}$$

11. Stanovte definiční obor a obor pravdivosti výrokové formy $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$.

$$\begin{bmatrix} \text{Definiční obor: } \mathbb{R} \setminus \{3\} \\ \text{Obor pravdivosti: } x \in \langle -2; 3) \end{bmatrix}$$

12. Z výroků:

A: daný trojúhelník je pravoúhlý

B: daný trojúhelník je rovnoramenný

sestavte složené výroky $(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}; \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}; \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B};\ \mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B})$ a slovně je interpretujte.

13. Pomocí tabulky pravdivostních hodnot zjistěte, zda je výroková forma tautologie nebo kontradikce.

- $\neg \mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B})$ [tautologie]
- $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$ [kontradikce]
- $[\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{A}) \wedge (\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{B})] \Leftrightarrow [\mathrm{C} \Rightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B})]$ [tautologie]
- $(\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{C}) \Rightarrow [(\mathrm{B} \wedge \neg \mathrm{A}) \Leftrightarrow (\mathrm{C} \Rightarrow \neg \mathrm{A})]$

$$\begin{bmatrix} \text{není tautologie} \\ \text{ani kontradikce; pravdivá je} \\ \text{ve všech případech} \\ \text{kromě } (1, 1, 0) \text{ a } (1, 0, 0) \end{bmatrix}$$

14. K matematické větě vyslovte věty přidružené a rozhodněte, zda lze větu vyslovit ve tvaru ekvivalence.

- Věta: Jestliže jsou dvě přímky na sebe kolmé, pak svírají pravý úhel.

[větu lze vyslovit ve tvaru ekvivalence]

- Věta: Jsou-li rovinné obrazce shodné, pak mají týž obsah.

[větu nelze vyslovit ve tvaru ekvivalence]

15. Utvořte negaci kvantifikovaných výroků.
    - Petr vždy říká pravdu.
    - Žádný učený z nebe nespadl.
    - Alespoň jedno prvočíslo je sudé.
    - $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 16 \leq 0$
16. Stanovte pravdivostní hodnotu výroku, negujte ji a zapište jeho negaci slovně i symbolicky.
    - Výrok: Pro všechna reálná čísla x platí $2^x > 0$.
      Symbolicky: $\forall x \in \mathbb{R}: 2^x > 0$
    - Výrok: Existuje reálné číslo x které je řešením rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$
      Symbolicky: $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 = 0$

Literatura k tématu:

[1] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I.* SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87

[2] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1).* Ekopress Praha, 1997. 405 stran. ISBN 80-86119-00-9.

Kapitola 2

Množiny

Po prostudování kapitoly budete umět:

- objasnit pojem množiny a způsob jejího zadání,
- definovat množinové operace a načrtnout Vennovy diagramy,
- definovat množinu $\mathbb{R}^*$,
- početní operace s nevlastními čísly,
- definovat a graficky znázornit okolí bodu na přímce.

Klíčová slova:

Množina, prvek množiny, sjednocení, průnik, rozdíl a doplněk množin, podmnožina, číselná množina, nevlastní čísla, interval, okolí bodu.

Množina a její prvek

Množinou rozumíme souhrn (soubor) jakýchkoliv objektů. Množina je určena, můžeme-li o jakémkoliv objektu rozhodnout, zda do ní patří či nepatří.
Objekty, které patří do dané množiny, nazýváme **prvky** této množiny.

Příklad Uvažujme množinu všech měst České republiky. Město Olomouc patří do této množiny, naproti tomu město Bratislava nepatří do této množiny.

Příklad Uvažujme množinu všech druhých mocnin přirozených čísel. Číslo 25 patří do této množiny, číslo 7 do ní nepatří.

Množiny označujeme zpravidla velkými písmeny abecedy, např.: $A, B, C, \dots$
Prvky množiny označujeme zpravidla malými písmeny abecedy, např.: $a, b, c, \dots$, v případě potřeby užíváme indexy.

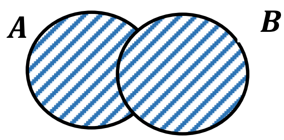
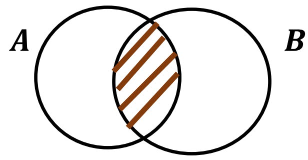
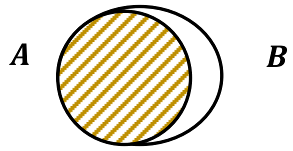
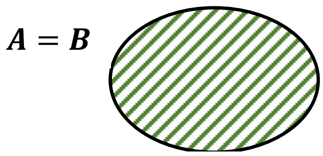
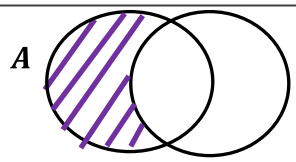
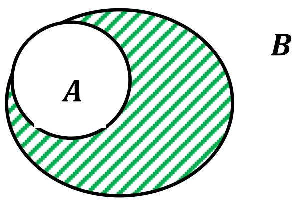
Zápis $a \in A$, znamená, že a je prvkem (elementem) množiny A, také můžeme říci, že a patří do množiny A, a je z množiny A.
Zápis $a \notin A$, znamená, že a není prvkem množiny A.

Množinu můžeme zadat (určit):

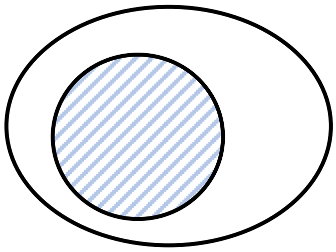
a) výčtem prvků, které do ní patří
b) udáním charakteristické vlastnosti jejích prvků

Příklad Množinu M, která je zadána výčtem prvků zadejte pomocí charakteristické vlastnosti. $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
Řešení Prvky množiny M jsou celá čísla. Množinu celých čísel označujeme zpravidla $\mathbb{Z}$. Potom můžeme množinu M zadat takto: $M = \{x \in Z; -3 \leq x \leq 3\}$ nebo $M = \{x \in Z; x^2 \leq 9\}$.

Operace s množinami

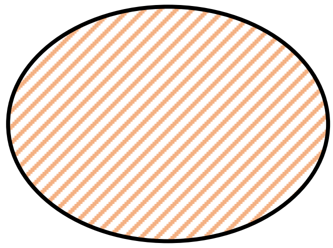
Název a označení	Vennův diagram	Definice
Sjednocení množin A a B $A \cup B$	 $x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$	Sjednocením množin A a B nazýváme množinu všech prvků, které patří buď do A nebo do B (tedy aspoň do jedné z nich, mohou patřit současně do obou).
Průnik množin A a B $A \cap B$	 $x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$	Průnikem množin A a B nazýváme množinu všech prvků, které patří do A a zároveň patří do B (jsou společné množinám A a B).
Inkluze množin a B (množina A je podmnožinou množiny B) $A \subset \mathrm{B}$	 $x \in A \Longrightarrow x \in B$	Množina A je podmnožinou množiny B, jestliže každý prvek množiny A je prvkem množiny B
Rovnost množin A a B $A = B$	 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$	Množiny A a B se rovnají, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B a zároveň každý prvek množiny B je prvkem množiny A.
Rozdíl množin A a B $A \backslash B$	 $(x \in A \backslash B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin \mathrm{B})$	Rozdíl množin A a B je množina všech prvků množiny A, které nepatří do množiny B.
Doplněk množiny A v množině B A'_B O doplňku mluvíme tehdy, je-li $A \subset B$. Jinak užíváme pojem rozdíl množin.	 $x \in B \wedge x \notin \mathrm{A}$	Doplněk množin A v množině B je množina všech prvků množiny B, které nepatří do množiny A.

Poznámka Rozlišujeme **vlastní** a **nevlastní podmnožinu** množiny.



Množina A je vlastní podmnožinou množiny B.

$$A \subset B \wedge A \neq B$$



$\boldsymbol{A = B}$

Množina A je nevlastní podmnožinou množiny B a naopak množina B je nevlastní podmnožina množiny A.

$(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$

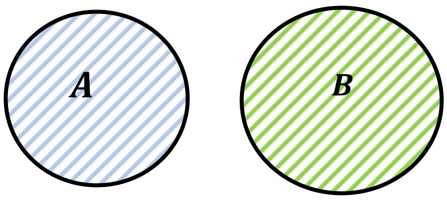
Každá množina je nevlastní podmnožinou sebe samé!

Množina, do které patří n prvků, $n \in N$, se nazývá **konečná**, ostatní množiny jsou nekonečné.

Množina, která neobsahuje žádný prvek, se nazývá **prázdná**; značíme ji $\emptyset$; ostatní množiny jsou neprázdné.

Množiny A a B se nazývají **disjunktní**, je-li jejich průnik množina prázdná.

Disjunktní množiny



$$A \cap B = \emptyset$$

Prázdná množina je podmnožinou libovolné množiny.

Zřejmě platí: $A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

Je-li $A \subset B$, pak $A \cup B = B \quad A \cap B = A$

Pro libovolné množiny A, B, C platí:

$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	komutativní zákon
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	asociativní zákon
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributivní zákon

Příklad Mějme množiny $A = \{-3; -2; -1; 2; 5; 6\}$ a $B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
Určete $A \cup B$ a $A \cap B$.
Řešení

$$A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1\ 2; 3; 4; 5; 6\}$$
$$A \cap B = \{-2; -1; 2; 5\}$$

Příklad Uvažujme množiny $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ a $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. Určete $A \cup B, A \cap B$, pokud je $A \subset B$ nebo $B \subset A$, pak určete $B \backslash A$ nebo $A \backslash B$.
Řešení

$$A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$
$$A \cap B = \{-2; -1;\ 0; 1; 2\}$$

A je podmnožinou množiny B, můžeme určit $B \backslash A = \{-3; 3\}$

Příklad Uvažujme množinu A všech trojúhelníků, množinu B všech rovnoramenných trojúhelníků a množinu C všech rovnostranných trojúhelníků v rovině. Je mezi množinami A, B, C vztah inkluze? Pokud ano, tak jaký?

Řešení: $C \subset B \subset \mathrm{A}$, zřejmě je $C \subset \mathrm{A}$

Množina rovnostranných trojúhelníků je podmnožinou rovnoramenných trojúhelníků a ta je podmnožinou trojúhelníků v rovině.

Číselné množiny

Pro nás budou mít především význam **číselné množiny**, tj. množiny, jejichž prvky jsou čísla. Významné číselné množiny jsou označeny takto:

$\mathbb{N}$ – množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$ – množina všech celých čísel
$\mathbb{Q}$ – množina všech racionálních čísel
$\mathbb{R}$ – množina všech reálných čísel
$\mathbb{C}$ – množina všech komplexních čísel

Zřejmě platí inkluze $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Užitečná jsou i označení některých podmnožin množiny $\mathbb{R}$:

$\mathbb{Z}^{-}$ – množina všech záporných celých čísel
$\mathbb{Q}^{+}$ – množina všech kladných racionálních čísel
$\mathbb{Q}^{-}$ – množina všech záporných racionálních čísel

$\mathbb{R}^{+}$ – množina všech kladných reálných čísel
$\mathbb{R}^{-}$ – množina všech záporných reálných čísel

Připojíme-li k označení množin $\mathbb{N}, \mathbb{Z}^{-}, \mathbb{Q}^{+}, \mathbb{Q}^{-}, \mathbb{R}^{+}$ a $\mathbb{R}^{-}$ index 0, znamená to, že do uvedených množin patří navíc číslo 0.

V množině $\mathbb{R}$ lze sčítat, odčítat, násobit i dělit (ne však dělit nulou) a přitom uvedené početní operace mají známé vlastnosti. Lze v ní též definovat binární relaci $<$ lineárního uspořádání. Množina $\mathbb{R}$ tedy tvoří z algebraického pohledu uspořádané těleso.

Množinu $\mathbb{R}$ a její prvky lze geometricky znázornit. Každému reálnému číslu lze přiřadit právě jeden bod reálné přímky $\mathbb{R}^1$, již nazýváme též *reálnou osou* nebo *jednorozměrným reálným prostorem*, a naopak každému bodu reálné přímky lze přiřadit právě jedno reálné číslo. Vzhledem k tomuto vzájemně jednoznačnému přiřazení lze ztotožnit reálná čísla s jim odpovídajícími body reálné přímky a množinu $\mathbb{R}$ s množinou $\mathbb{R}^1$. Podle okolností se mluví někdy o reálném čísle (stručně čísle), jindy o reálném bodě (stručně bodě). Reálnou přímku nazýváme v dalším textu stručně *přímkou* nebo *osou*.

Vzdálenost, přesněji euklidovská vzdálenost, $d(A, B)$ bodů $A = [x_1]$ a $B = [x_2]$ přímky je dána vzorcem

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

proto se někdy místo o reálné přímce hovoří o euklidovské přímce.

Množina $\mathbb{R}^*$

Množina $\mathbb{R}$ nemá ani nejmenší, ani největší prvek. Vzhledem k tomu, že v dalším textu budeme pracovat s *nevlastními limitami* a s *limitami v nevlastních bodech*, je účelné rozšířit množinu $\mathbb{R}$ o dva nové prvky, jež nazýváme **nevlastními čísly plus nekonečno** a **minus nekonečno**, nebo **nevlastními body plus nekonečno a minus nekonečno** a značíme $+\infty$ a $-\infty$.

Poznámka Pokud nehrozí nedorozumění, značíme nevlastní číslo plus nekonečno symbolem ∞.

Definice 2.1 Množinu $\mathbb{R}$, doplněnou o nevlastní čísla $+\infty$ a $-\infty$, nazýváme **rozšířenou množinou všech reálných čísel** a značíme $\mathbb{R}^*$. Tedy $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ a $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$.

Je-li to účelné, čísla množiny $\mathbb{R}^*$, která nejsou nevlastními čísly $+\infty$ nebo $-\infty$, nazýváme vlastními čísly nebo vlastními body.

Uspořádání a početní operace v množině $\mathbb{R}$ jsou známé. Abychom je měli definovány i v množině $\mathbb{R}^*$, rozšíříme je na dvojice čísel, z nichž aspoň jedno je nevlastní.

Uspořádání a početní operace v množině $\mathbb{R}^*$

Pro každé $c \in \mathbb{R}$ (tedy c je vlastní číslo) definujeme:

1. Uspořádání

$$-\infty < +\infty$$
$$-\infty < c < +\infty$$

2. Absolutní hodnota

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty$$

3. Sčítání a odčítání

$$c + \infty = +\infty$$
$$c - \infty = -\infty$$
$$+\infty + \infty = +\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$
$$\boxed{+\infty - \infty, \quad -\infty + \infty} \quad \text{není definováno}$$

4. Násobení a dělení

$$+\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$$
$$-\infty \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$
$$c \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ pro } c > 0$$
$$c \cdot (\mp\infty) = \pm\infty \text{ pro } c < 0$$
$$\frac{c}{\pm\infty} = 0$$
$$\frac{\pm\infty}{c} = \pm\infty \text{ pro } c > 0$$
$$\frac{\pm\infty}{c} = \mp\infty \text{ pro } c < 0$$
$$\boxed{0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{+\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{-\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{c}{0}} \quad \text{není definováno}$$

5. Mocnina s celým mocnitelem

Pro každé $m \in \mathbb{N}$ $\quad (+\infty)^m = +\infty, (+\infty)^{-m} = 0$

$$(-\infty)^m = (-1)^m \cdot (+\infty)^m = \begin{cases} -\infty \text{ pro } m \text{ liché} \\ +\infty \text{ pro } m \text{ sudé} \end{cases}$$

$\boxed{(+\infty)^0 \quad (-\infty)^0}$ není definováno

6. Odmocnina s přirozeným odmocnitelem

   Pro každé $m \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[m]{+\infty} = +\infty$

   $\sqrt[m]{-\infty} = -\infty$ pro m liché

   $\boxed{\sqrt[m]{-\infty}}$ není definována pro m sudé

Intervaly

V matematické analýze velmi často pracujeme se speciálními podmnožinami množiny $\mathbb{R}$, které nazýváme intervaly.

Definice 2.2 Nechť $a \in R$ a $b \in R, a \leq b$. **Intervalem s krajními body a a b** rozumíme kteroukoli z těchto množin:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ – otevřený interval
$\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ – polootevřený nebo polouzavřený interval
$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ – polootevřený nebo polouzavřený interval
$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ – uzavřený interval

} omezené intervaly

Délka $d(a, b)$ intervalu s krajními body a a b je dána vzorcem $d(a, b) = b - a$.

Intervalem s krajním bodem a a nevlastním krajním bodem $+\infty$ nebo $-\infty$ rozumíme kteroukoli z těchto množin:

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ – otevřený interval
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; x < a\}$ – otevřený interval
$\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ – polootevřený nebo polouzavřený interval
$(-\infty, a\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$ – polootevřený nebo polouzavřený interval

Intervalem s nevlastními krajními body $-\infty$ nebo $+\infty$ rozumíme množinu:
$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < +\infty\}$ – otevřený interval

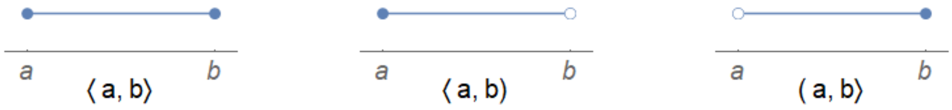
} neomezené intervaly

První, resp. druhé, vlastní nebo nevlastní číslo zleva v označení intervalu je **levý**, resp. **pravý, krajní bod** intervalu.

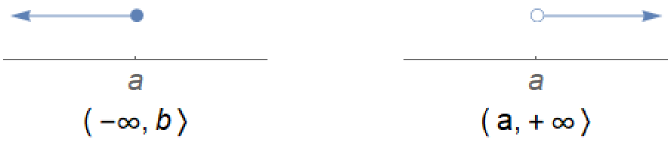
Každý bod intervalu, který není jeho krajním bodem, nazýváme **vnitřním bodem** intervalu. Množinu všech vnitřních bodů intervalu nazýváme **vnitřkem intervalu**.

Vnitřek intervalu je vždy otevřený interval, včetně prázdné množiny. Např. vnitřek každého z intervalů $\langle a, b\rangle, \langle a, b), (a, b\rangle$ a (a, b) je interval (a, b).

Graficky znázorňujeme interval, který není prázdnou množinou, jako úsečku, polopřímku nebo přímku. Plným nebo prázdným kroužkem vyznačujeme, zda jeho krajní bod k němu patří či nikoli.



Obrázek 2.1 Grafické znázornění intervalu s vlastním krajním bodem



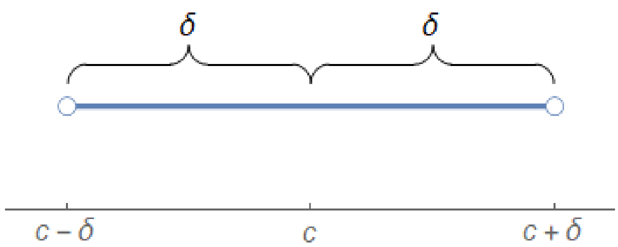
Obrázek 2.2 Grafické znázornění intervalu s nevlastním krajním bodem

Okolí bodu

Povšimneme si teď jednoho speciálního typu otevřeného intervalu – okolí bodu. Okolí bodu nám poslouží při vyslovení některých definic a vět a v mnoha úvahách přispěje k přehlednému vyjadřování.

Definice 2.3 Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. **δ-okolím bodu** c nazýváme otevřený interval $(c - \delta, c + \delta)$. Číslo δ nazýváme **poloměrem**, nebo **velikostí** δ-okolí bodu c. δ-okolí bodu c značíme $U(c, \delta)$ nebo $U_\delta(c)$.

Zápis $U_\delta(c)$ čteme: deltové okolí bodu c.



Obrázek 2.3 Grafické znázornění δ-okolí bodu c

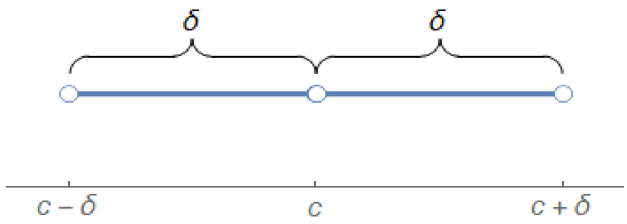
δ-okolí bodu c můžeme vyjádřit následujícími způsoby:

1. $U(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; x \in (c - \delta, c + \delta)\}$
2. $U(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R};\ c - \delta < c < c + \delta\}$
3. $U(c, \delta) = \{x \in \mathbb{R}; |x - c| < \delta\}$

Někdy potřebujeme pracovat s δ-okolím bodu c, z něhož je bod c vyjmut.

Definice 2.4 Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. **Redukovaným δ-okolím bodu c** nazýváme množinu $U(c,\delta)\setminus\{c\}$, již značíme $U^*(c,\delta)$.

Číslo δ nazýváme poloměrem redukovaného δ-okolí bodu c.



Obrázek 2.4 Grafické znázornění redukovaného δ-okolí bodu c

Redukované δ-okolí bodu c můžeme vyjádřit následujícími způsoby:

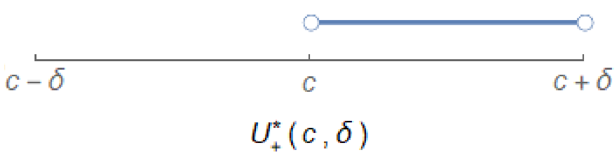
1. $U^*(c,\delta) = \{x \in \mathbb{R}; x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)\}$
2. $U^*(c,\delta) = \{x \in \mathbb{R}; c-\delta < x < c \vee c < x < c+\delta\}$
3. $U^*(c,\delta) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x-c| < \delta\}$

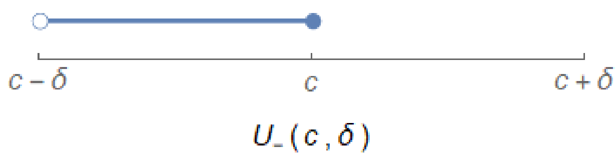
Zavedeme ještě pojmy jednostranného δ-okolí bodu a jednostranného redukovaného δ-okolí bodu.

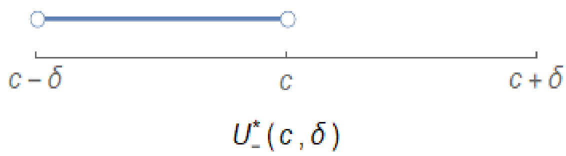
Definice 2.5 Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $\delta \in \mathbb{R}^+$. **Pravým δ-okolím bodu c** nazýváme polootevřený interval $\langle c, c+\delta)$. **Levým δ-okolím bodu c** nazýváme polootevřený interval $(c-\delta, c\rangle$. Právě definovaná jednostranná δ-okolí bodu c značíme $U_+(c,\delta)$ resp. $U_-(c,\delta)$.

Obdobně definujeme jednostranná redukovaná δ-okolí bodu c, a to pravé, resp. levé, redukované δ-okolí bodu c:

$U_+^*(c,\delta) = (c, c+\delta)$,resp. $U_-^*(c,\delta) = (c-\delta, c)$





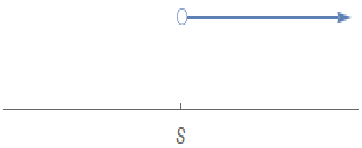


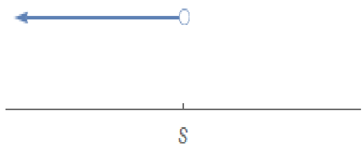
Poznámka V názvu i označení všech typů δ-okolí bodu c můžeme číslo δ vypouštět, není-li jeho velikost podstatná.

Definice 2.6 Nechť $s \in \mathbb{R}$. s-okolím nevlastního bodu $+\infty$ nazýváme otevřený interval $(s, +\infty)$.

Toto okolí značíme $U(+\infty, s)$. Tedy $U(+\infty, s) = (s, +\infty)$.

Obdobně definujeme s-okolí nevlastního bodu $-\infty$: $U(-\infty, s) = (-\infty, s)$.



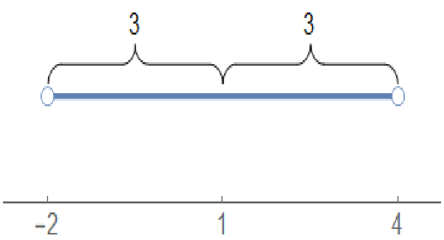


Poznámka V názvu i označení s-okolí nevlastních bodu $+\infty$ a $-\infty$ můžeme číslo s vypouštět, není-li jeho velikost podstatná.

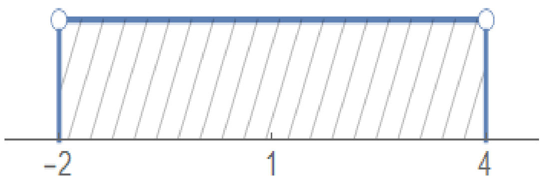
Geometrická interpretace $U_\delta(c)$ a $U(c)$

δ-okolím bodu c na přímce je otevřený interval délky 2δ se středem v bodě c. Okolím bodu c na přímce je otevřený interval se středem v bodě c.

Příklad Na číselné ose znázorněte δ-okolí bodu $c = 1$, je-li $\delta = 3$. Zapište toto okolí pomocí intervalu i nerovnosti s absolutní hodnotou a uveďte jeho označení.
Řešení



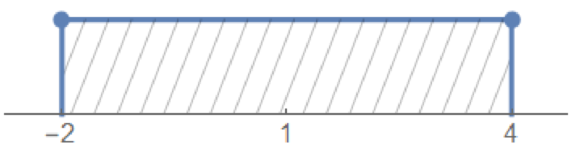
nebo



Vyjádření pomocí intervalu: $x \in (-2; 4)$
Vyjádření pomocí nerovnosti: $|x - 1| < 3$
Označení: $U_3(1)$
Promyslete si další souvislosti! Jaké množiny vyjadřují následující nerovnosti?

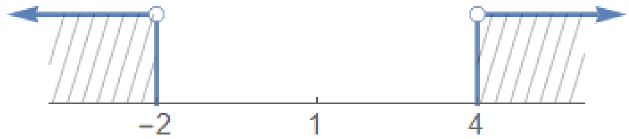
a) $|x - 1| \leq 3$

$x \in \langle -2; 4 \rangle$



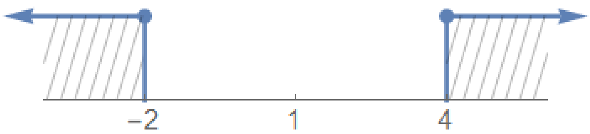
b) $|x - 1| > 3$

$x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$

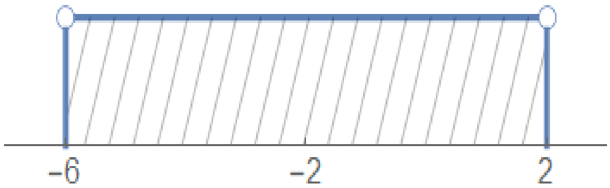


c) $|x-1| \geq 3$

$x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 4; +\infty)$



Užitím znalosti pojmu okolí můžeme řešit jednoduché nerovnice.
Např. nerovnici $|x+2| < 4$ upravíme na tvar $|x-(-2)| < 4$, což je zápis okolí $U_4(-2) \Rightarrow x \in (-6; 2)$.
Grafické znázornění.



Množinou rozumíme soubor jakýchkoliv objektů. K definování množinových operací využíváme Vennovy diagramy a vyjádření pomocí logických spojek. Množinu reálných čísel lze rozšířit o nevlastní čísla $+\infty$ a $-\infty$. Číselné množiny jsou množiny, jejichž prvky jsou čísla.
Důležitý vztah: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$
Okolím bodu na přímce je otevřený interval.

.

1. Které prvky množiny A a B patří do jejich sjednocení (průniku)?
2. Která množina se nazývá konečná (prázdná)?
3. Jaké typy podmnožin rozlišujeme?
4. Jaký je rozdíl mezi uzavřeným a otevřeným intervalem?
5. Co je okolím bodu na přímce? Načrtněte!
6. Určete množinu M, jejíž prvky jsou reálné kořeny rovnice.
   - $x^3 + 8 = 0$ $[M = \{-2\}]$
   - $x^2 + 4 = 0$ $[M = \emptyset]$
   - $(x^2-1)(x^2-x-6) = 0$ $[M = \{-2; -1; 1; 3\}]$

7. Zadejte množinu M udáním charakteristické vlastnosti jejích prvků, je-li $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

[$M = \{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 5\}$ nebo $M = \{x \in \mathbb{N};\ |x| < 6\}$]

8. Které z následujících množin se sobě rovnají.

$A = \{0; 5\}$
$B = \emptyset$
$C = \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq 3\}$
$D = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 - 5x = 0\}$
$E = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 0\}$
$F = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 5 = 0\}$
$G = \{x \in \mathbb{R}; -3 \leq x \leq 3\}$

[$A = D, B = E = F, C = G$]

9. Zapište všechny podmnožiny množiny $\{-2; 0; 1\}$

[$\emptyset, \{-2\}, \{0\}, \{1\}, \{-2; 0\}, \{-2; 1\}, \{0; 1\}, \{-2; 0; 1\}$]

10. Určete průnik a sjednocení množin A a B, jestliže

- $A = \{-1; 2; 3; 7; 8\}$ a $B = \{8; 9; 10\}$

[$A \cap B = \{8\}; A \cup B = \{-1; 2; 3; 7; 8; 9; 10\}$]

- $A = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 5\}$ a $B = \{x \in \mathbb{N}; x > 3\}$

[$A \cap B = \{4; 5\}; A \cup B = \mathbb{N}$]

- $A = \{x \in \mathbb{Z}; x > -2\}$ a $B = \{x \in \mathbb{Z}; x < -2\}$

[$A \cap B = \emptyset; A \cup B = \mathbb{Z} \setminus \{-2\}$]

- $A = \mathbb{Z}$ a $B = \mathbb{R}$

[$A \cap B = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}; A \cup B = \mathbb{Z} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$]

11. Jsou dány množiny:

$M_1 = \langle -4; -2), M_2 = \langle -5; 5\rangle, M_3 = \langle 5; 8\rangle, M_4 = \langle -2; 0), M_5 = (-1; 6)$

- Určete které z množin M_1, M_3, M_4 a M_5 jsou podmnožinami množiny M_2.
- Určete množiny a zapište je intervaly.

$M_1 \cup M_2$ [$M_2 : \langle -5; 5\rangle$]
$M_1 \cap M_2$ [$M_1 : \langle -4; -2)$]
$M_1 \cup M_4$ [$\langle -4; 0)$]
$M_1 \cap M_4$ [$\emptyset$]
$M_2 \cap M_5$ [$\langle -1; 5\rangle$]
$(M_1 \cap M_3) \cup (M_3 \cap M_2)$ [$\{5\}$]
$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4 \cup M_5$ [$\langle -5; 8\rangle$]
$(M_2 \cup M_5) \cap (M_3 \cup M_4)$ [$\langle -2; 0) \cup \langle 5; 6)$]

12. Rozhodněte, který z následujících zápisů představuje okolí bodu, a všechny množiny zapište pomocí intervalů.
- $|x-1|<3$ [je okolí; $U_3(1); x \in (-2;4)$]
- $|x| \geq 5$ [není okolí; $x \in (-\infty;-5\rangle \cup \langle 5;\infty)$]
- $|x+3|<2$ [je okolí; $U_2(-3); x \in (-5;-1)$]
- $|x-1| \leq -3$ [není okolí; $\emptyset$]
- $|x+3| \geq 4$ [není okolí; $x \in (-\infty;-7) \cup \langle 1;\infty)$]
- $|x-2| \leq 3$ [není okolí; $x \in \langle -1;5\rangle$]
- $|x|<3$ [je okolí $U_3(0); x \in (-3;3)$]

13. Určete průnik a sjednocení množin A a B.
- $A = \{x \in \mathbb{R}; |x-3| \leq 3\}, B = \{x \in \mathbb{R}; |x| > 5\}$

$$\begin{bmatrix} A \cap B = \{x \in R; x \in (5;6\rangle\}; \\ A \cup B = \{x \in R; x \in (-\infty;\ -5) \cup \langle 0;\ \infty)\} \end{bmatrix}$$

- $A = \{x \in \mathbb{R}; |x+4| \geq 2\}, B = \{x \in R;\ |x-2| < -1\}$

$$\begin{bmatrix} A \cup B = A; x \in \langle -6;\ -2\rangle \\ A \cap B = \emptyset; B = \emptyset \end{bmatrix}$$

- $A = \{x \in \mathbb{R}; |x-3| \leq 1\}, B = \{x \in \mathbb{R}; x \in (-\infty;4\rangle$

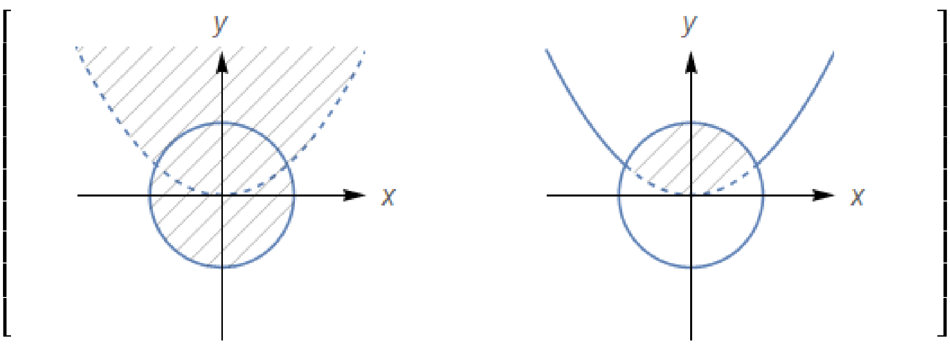
$$\begin{bmatrix} A \cup B: x \in (-\infty;4\rangle \\ A \cap B = \{4\} \end{bmatrix}$$

- $A = \{x \in \mathbb{R}; |x+2| < 3, B = \{x \in \mathbb{R};\ |x| \geq 5\}$

$$\begin{bmatrix} A \cup B: x \in (-\infty;1) \cup \langle 5;\ \infty) \\ A \cap B = \emptyset \end{bmatrix}$$

14. V rovině $\mathbb{R}^2$ jsou dány množiny $A = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{[x;y] \in \mathbb{R}^2; y - \frac{1}{2}x^2 > 0\}$

Načrtněte množiny A a B a vyšrafujte jejich průnik a sjednocení.



Literatura k tématu:

[1] BÍLKOVÁ, A. *Matematika I.* Praha: SPN, 1980. 382 stran. ISBN 17-536-80 (skripta)

[2] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87

[3] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. 405 stran. ISBN 80-86119-00-9.

Kapitola 3

Relační struktury

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat základní relační struktury,
- pracovat s příslušnými množinami a množinovými operacemi,
- interpretovat vlastnosti relací a definovat jejich význačné představitele.

Klíčová slova:

Množina, relace, zobrazení, ekvivalence, kongruence, uspořádání, tolerance, rozklad.

Úvodní kapitola je věnována důležitému a velmi obecnému pojmu relace, který zastřešuje řadu na pohled různorodých pojmů jako zobrazení, ekvivalence nebo uspořádání. Protože relace popisují vztahy mezi prvky množin a navíc jsou samy množinami, bude vhodné množiny nejprve krátce připomenout.

Množiny

Množiny patří k základním matematickým objektům. V jistém smyslu je celá matematika, jak ji dnes známe, vystavěna na pojmu množiny. Všechny ostatní matematické objekty, ať jde o přirozená čísla nebo spojité funkce, lze totiž modelovat pomocí množin.

Komplikované vlastnosti množinového světa jsou předmětem samostatného oboru, tzv. teorie množin. Nás ale v této kapitole nebudou detaily této teorie příliš zajímat a postačí nám následující intuitivní pohled na věc.

Množina je pro nás soubor navzájem různých objektů, které označujeme jako její prvky. Je-li a prvkem množiny X, píšeme $a \in X$, jinak $a \notin X$. Množina je buď konečná (má-li konečný počet prvků) nebo nekonečná. Počet prvků konečné množiny X označujeme symbolem $|X|$. Sestává-li množina X z prvků $x_1,\dots,x_k$, píšeme $X = \{x_1,\dots,x_k\}$.

Podobně například zápis $X = \{m \in N : m \text{ je sudé číslo}\}$ znamená, že množina X je složena ze všech sudých přirozených čísel (symbol N bude i nadále označovat množinu všech přirozených čísel).

Podmnožina množiny X je množina Y, jejíž každý prvek je také prvkem množiny X. Je-li Y podmnožinou množiny X, píšeme $Y \subset X$ (případně $Y \subseteq X$, chceme-li zdůraznit, že množiny X, Y mohou být shodné). Pro pocvičení ve formálním zápisu můžeme definici vyjádřit takto:

$Y \subset X$ právě když $\forall y : y \in Y \Rightarrow y \in X$.

Mezi pojmy prvek a podmnožina je zásadní a někdy přehlížený rozdíl. Je-li $X = \{1,2,3\}$, pak platí $1 \in X$, ale zápis $1 \subset X$ nemá smysl, protože přirozené číslo 1 (alespoň zatím) nepovažujeme za množinu. Podobně platí $\{1\} \subset X$, ale neplatí $\{1\} \in X$. Další podmnožiny množiny X jsou například $\emptyset$, $\{2,3\}$ nebo X.

Jiný příklad: platí $\emptyset \subset \emptyset$, ale $\emptyset \notin \emptyset$, protože množina $\emptyset$ žádné prvky neobsahuje.

S množinami lze provádět následující základní operace. Průnik $X \cap Y$ sestává ze všech společných prvků množin X a Y, sjednocení $X \cup Y$ ze všech prvků alespoň jedné z množin X a Y, rozdíl $X - Y$ (psáno také $X \setminus Y$) je složen ze všech prvků množiny X, které nejsou obsaženy v množině Y. Kartézský součin $X \times Y$ množin X a Y je množina všech uspořádaných dvojic (x,y), kde $x \in X$ a $y \in Y$

Relace

Mějme dvě množiny X, Y a představme si, že každý prvek $x \in X$ může (a nemusí) být ve 'vztahu' R s libovolným počtem prvků $y \in Y$. Na tento vztah nejsou kladeny žádné další podmínky. Přirozeným způsobem, jak takový vztah popsat, je vyjmenovat všechny dvojice (x,y) prvků $x \in X$ a $y \in Y$, které spolu jsou ve vztahu R. Připomeneme-li si, že kartézský součin X×Y je v předchozí části definován jako množina všech uspořádaných dvojic s prvním prvkem z množiny X a druhým prvkem z množiny Y, dostáváme se k následující definici pojmu relace:

Relace z množiny X do množiny Y je libovolná podmnožina R kartézského součinu $X \times Y$.

Takové relaci se říká binární, protože určuje vztah mezi dvojicemi objektů. Definici lze snadno zobecnit na n-ární relace (vztahy mezi n-ticemi prvků), ale nás zajímá především binární případ. Je-li dána relace R z množiny X do množiny Y, pak pro každou dvojici $(x,y) \in R$ také píšeme x R y (a čteme 'prvek x je v relaci R s prvkem y'). Daný prvek $x \in X$ ovšem nemusí být v relaci R s žádným prvkem množiny Y (v extrémním případě může být relace R třeba prázdná). Proto definujeme levý obor relace R jako

$$L(R) = \{x \in X: \text{existuje nějaké } y \in Y \text{ tak, že } x\,R\,y\}$$

a podobně pravý obor

$$P(R) = \{y \in Y: \text{existuje nějaké } x \in X \text{ tak, že } x\,R\,y\}$$

Příklad

Vezměme si například množiny X = {2,3,5} a Y = {1,4,7,10}. Jedna z relací z množiny X do množiny Y pak vypadá třeba takto:

$$R = \{(2,4),(2,10),(5,10)\}.$$

Relace R má shodou okolností dosti přirozený popis; platí totiž, že x je v relaci s y, právě když x dělí y. To ale vůbec není podmínkou: stejně tak je relací z X do Y třeba množina {(2,4),(3,7),(5,1)}, u které žádný takový popis asi nenajdeme.

Skládání relací

Za chvíli uvidíme, že zobrazení (funkce), jak je známe z analýzy, jsou speciálním případem relací. Následující definice skládání relací je zobecněním představy skládání funkcí.

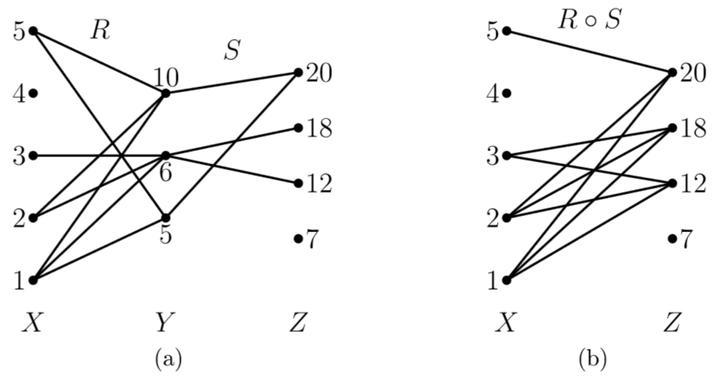
Definice

Nechť R je relace z množiny X do množiny Y a S je relace z množiny Y do množiny Z. Pak složení relací R a S je relace $R \circ S \subset X \times Z$ z množiny X do množiny Z, definovaná takto:

$(x, z) \in R \circ S$, právě když existuje $y \in Y$ tak, že $x\, R\, y$ a $y\, S\, z$, kde $x \in X$ a $z \in Z$.

Všimněme si, že složení relací R, S je definováno jen v případě, že relace R 'končí' v množině, kde S 'začíná'.

Podívejme se na konkrétní příklad. Nechť X = {1,2,3,4,5}, Y = {5,6,10} a Z = {7,12,18,20}, a definujme relace $R \subset X \times Y$ a $S \subset Y \times Z$ opět pomocí dělitelnosti (tedy například pro $x \in X$ a $y \in Y$ bude $(x,y) \in R$, pokud x dělí y). V grafovém znázornění relací R a S dostaneme situaci na následujícím obrázku.



Obrázek 3.1 (a) Relace R a S, (b) jejich složení.

Z definice skládání plyne, že prvky $x \in X$ a $z \in Z$ budou v relaci $R \circ S$, pokud se z x do z dá přejít 'po spojnicích' přes nějaký prvek $y \in Y$. Ověřte, že $R \circ S$ vypadá jako na obr. 1. b.

V tomto znázornění relace je průhledný i další pojem: inverzní relace.

Definice

Relace inverzní k relaci $R \subset X \times Y$ je relace $R^{-1} \subset Y \times X$, definovaná vztahem

$$y\, R^{-1}\, x \text{ právě když } x\, R\, y$$

pro $x \in X, y \in Y$.

V grafovém znázornění se přechod k inverzní relaci projeví zrcadlovým otočením obrázku podle svislé osy. Jak tomu bude v kartézském znázornění? Vezměme například relaci S z obr. 1a.

Relace inverzní k S bude $S^{-1} = \{(20, 5),(12, 6),(18, 6),(20, 10)\}$

a jedná se o relaci z množiny Z do množiny Y.

Nechť je dána množina X. Místo o 'relaci z X do X' mluvíme prostě o relaci na množině X. Všimněme si, že pro každé dvě relace na X je definováno jejich složení. Význačným příkladem relace na množině X je identická relace

$$E_X = \{(x, x) : x \in X\}.$$

Co se stane, složíme-li relaci $R \subset X{\times}Y$ s relací k ní inverzní? Zjevně $R \circ R^{-1}$ je relace na množině X a lákavá hypotéza je, že je rovna identické relaci E_X. To ale není pravda, jak ukazuje třeba prázdná relace $R = \emptyset$, pro kterou je $R \circ R^{-1}$ rovněž prázdná. Obecně neplatí ani jedna z inkluzí mezi E_X a $R{\circ}R^{-1}$. Podobně je tomu u opačného pořadí skládání, totiž pro relace $R^{-1} \circ R$ a E_Y.

Záleží u skládání operací na pořadí? Obecně samozřejmě ano — pokud R je relace z X do Y, a S je relace z Y do Z, pak $R \circ S$ je dobře definovaná relace, zatímco $S \circ R$ definována není. Jsou-li ovšem R, S relace na množině X, pak tento problém nemůže nastat. Ani tam ale nemusí být $R \circ S = S \circ R$. Příkladem je tato situace: množina X je dvouprvková, $X = \{a, b\}$. Relace $R \subset X \times X$ sestává z jediné dvojice (a, a), zatímco $S = \{(a, b)\}$. Pak platí

$$R \circ S = \{(a, b)\} \text{ a } S \circ R = \emptyset.$$

Třebaže u skládání relací záleží na jejich pořadí (není to tedy komutativní operace), jednou pěknou vlastností nás skládání překvapí. Je totiž asociativní, což znamená, že nezáleží na způsobu, jakým relace uzávorkujeme. Přesněji to vyjadřuje následující věta.

Věta (O asociativitě skládání relací)

Nechť $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$ a $T \subset Z \times W$ jsou relace. Potom

$$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T.$$

Zobrazení

Zobrazení je speciálním případem relace.

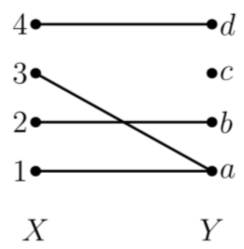
Definice

Zobrazení (nebo také funkce) množiny X do množiny Y je relace $f \subset X \times Y$, pro kterou platí, že pro každý prvek $x \in X$ existuje právě jeden prvek $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$. Skutečnost, že f je zobrazením X do Y, zapisujeme jako

$$f\colon X \to Y.$$

Pro $x \in X$ nazýváme ono jediné y hodnotou zobrazení f v bodě x a píšeme $f(x) = y$. Říkáme také, že prvek x je vzorem prvku y při zobrazení f. Nepřehlédněme, že libovolný prvek může mít více vzorů.

Například relace f z množiny $X = \{1, 2, 3, 4\}$ do množiny $Y = \{a, b, c, d\}$ na obr. 3.2 je zobrazením. Platí třeba $f(3) = a$ atd.



Obrázek 3.2 Zobrazení $f: X \to Y$.

Zobrazení mohou mít několik důležitých vlastností.

Definice
Zobrazení $f: X \to Y$ je

- **prosté**, pokud každé $y \in Y$ má nejvýše jeden vzor při zobrazení f,
- **na**, pokud každé $y \in Y$ má alespoň jeden vzor při zobrazení f,
- **vzájemně jednoznačné** (jinak též **bijekce**), pokud je prosté a na.

Zobrazení f z obr.3.2 není ani prosté, ani na, neboť prvek c nemá vzor, zatímco a má hned dva.

Co se stane, utvoříme-li inverzní relaci k nějakému zobrazení $f: X \to Y$? Tato inverzní relace f^{-1} je vždy definována (je dokonce definována pro libovolnou relaci), ale nemusí to být zobrazení. Příkladem je třeba právě zobrazení f z obr. 2.

Složíme-li dvě zobrazení $f: X \to Y$ a $g : Y \to Z$, výsledná relace $f \circ g$ je zobrazení X do Z, pro jehož hodnoty platí

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)).$$

(Často je možné se setkat i se zápisem v obráceném pořadí, ve kterém se stejné zobrazení označuje jako $g \circ f$. V tomto textu se držíme výše uvedeného značení.)

Vlastnosti relací

Vzhledem k obecnosti pojmu relace je přirozené, že se relace dále dělí podle toho, zda mají nebo nemají určité základní vlastnosti.

Definice

Relace R na množině X je

- **reflexívní**, pokud pro každé $x \in X$ platí $x\ R\ x$,
- **symetrická**, pokud pro každé $x, y \in X$,

$$x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x,$$

- **slabě antisymetrická**, pokud pro každé $x, y \in X$,

$$x\ R\ y \text{ a } y\ R\ x \Rightarrow x = y,$$

- **tranzitivní**, pokud pro každé $x, y, z \in X$,

$$x\ R\ y \text{ a } y\ R\ z \Rightarrow x\ R\ z.$$

Tyto vlastnosti většinou mají srozumitelnou interpretaci v jednotlivých zná- zorněních relace R. Uvažme třeba znázornění pomocí orientovaného grafu. Reflexívní relaci poznáme podle toho, že v tomto orientovaném grafu je u každého z bodů ‘smyčka’, u symetrické relace má každá z čar svou dvojnici v opačném směru, atd.

Příklad

Uvažme relaci S, definovanou na množině kladných reálných čísel R^+ předpisem

$x\ S\ y$ právě když $2x < y$.

Tato relace není reflexívní, protože dokonce pro žádné $x \in R^+$ není $2x < x$. Není ani symetrická (stačí uvážit $x = 1$, $y = 3$), a to do té míry, že je dokonce slabě antisymetrická. Kdyby totiž $2x < y$ a $2y < x$, pak bychom dostali $4x < x$, což je na R^+ nemožné. Žádná dvojice tedy nesplňuje před- poklad implikace v definici antisymetričnosti. Relace S je také tranzitivní: pokud $2x < y$ a $2y < z$, pak $2x < z/2$ a tedy $2x < z$.

Situace se dramaticky změní, pokud uvažujeme relaci S‘ zadanou stejným předpisem, ale na množině záporných reálných čísel R^-. Relace S‘ totiž je reflexívní a není slabě antisymetrická. Není ani tranzi- tivní, jak ukazuje trojice $x = -2$, $y = -3$, $z = -4$, pro kterou máme $2x < y$ a $2y < z$, ale neplatí $2x < z$.

Ekvivalence a rozklady

Význačné místo mezi relacemi mají ekvivalence.

Definice

Ekvivalence na množině X je relace R na množině X, která je reflexívní, symetrická a tranzitivní.

Příklad

Nechť X je množina všech přímek v rovině. Definujme na X relaci R předpisem

$$(p, q) \in R \text{ právě když } p \text{ a } q \text{ jsou rovnoběžné přímky.}$$

Lze zjistit, že relace má všechny tři vlastnosti z definice ekvivalence.

Příklad

Důležitým příkladem ekvivalence, který se nám bude hodit v příští kapitole, je **kongruence modulo p**. Jde o relaci na množině celých čísel Z. Zvolme pevně celé číslo p a definujme relaci ≡ na Z předpisem

$$x \equiv y \text{ právě když } p \text{ dělí } x - y.$$

(Připomeňme, že p dělí $x - y$, pokud $x - y = pk$ pro nějaké $k \in Z$.)

Relace ≡ je reflexívní, protože p jistě pro každé x dělí číslo $x - x = 0$. Je také symetrická, neboť pokud $x - y = kp$, pak $y - x = (-k) \cdot p$. Lze rovněž dokázat, že ≡ je tranzitivní.

Relace ≡ tedy skutečně je ekvivalence.

Definice

Relace, která je zároveň reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, se nazývá **uspořádání.**

Uspořádání zde máme, podobně jako tomu bylo v případě ekvivalence, definováno velmi obecně, tj. jde nám o to, abychom byli schopni vybudovat na prvcích dané množiny stromovou strukturu. Nechceme tedy uspořádat prvky množiny do jediného řetězce, jak by mohlo z významu slova "uspořádání" plynout, obecnost spočívá právě v tom, že jeden prvek může mít v daném uspořádání více následníků, vždy má však jen jediného předchůdce.

Typickým uspořádáním je relace ≤, tedy "být menší nebo rovno".

Relacím, které jsou pouze reflexívní a symetrické (a nemusí být tranzitivní) se někdy říká **tolerance**.

Příklad

Nechť X je množina všech k-tic nul a jedniček, kde $k \geq 2$. Dvě k-tice jsou v relaci R, pokud se liší nejvýše v jednom symbolu. Taková relace R je tolerancí, nikoli však ekvivalencí. Jak je tomu pro k = 1?

Ekvivalence úzce souvisí s pojmem rozkladu množiny.

Definice

Nechť X a I jsou množiny (označujeme ji jako indexová množina). (Neuspořádaný) soubor podmnožin $\{X_i : i \in I\}$ množiny X je rozklad množiny X, pokud množiny X_i jsou neprázdné, navzájem disjunktní a jejich sjednocením je celá množina X. Množiny X_i nazýváme **třídy** rozkladu $\{X_i : i \in I\}$.

Soubor S = {{1, 3}, {6}, {2, 4, 5}}, je například rozkladem množiny X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, zatímco soubory

{{1, 2, 3}, {1, 4, 5}, {1, 5, 6}} a {{1, 2}, {3, 4, 5}}

nikoli. Zdůrazněme, že u rozkladu nezáleží na pořadí, ve kterém jsou jeho třídy uvedeny, takže soubor {{2, 4, 5}, {6}, {1, 3}} je totožný s rozkladem S.

Věta
Ekvivalence na X jednoznačně odpovídají rozkladům X.

Je-li $\sim$ ekvivalence, pak se třídy příslušného rozkladu nazývají třídy ekvivalence $\sim$.

Příklad
Uvažme relaci R na množině {1, . . . , 6} s následujícím maticovým znázorněním:

$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Řádky i sloupce odpovídají po řadě prvkům 1,. . . ,6.) Ověřte, že se jedná o ekvivalenci.

V rámci této kapitoly jsme zavedli základní pojmy, jako jsou množiny, relace a zobrazení. Slovo relace lze do češtiny přeložit nejpřesněji jako "vztah". Relace nám tedy umožňují dávat dohromady prvky množin, které jsou spolu v nějakém vztahu. Protože slučování prvků dohromady nám umožnily již uspořádané dvojice, trojice, či n-tice, využili jsme tohoto aparátu. V kartézském součinu, který obsahuje vždy všechny možné uspořádané n-tice prvků, tak je dohromady každý prvek s každým. Chceme-li nějak specifikovat vztahy mezi těmito prvky, případně popisovat vlastnosti, které musí prvky mít, abychom je mohli sloučit, je třeba z kartézského součinu vybírat jen některé n-tice, čili vytvářet jeho podmnožiny. Pojem zobrazení vychází dále z pojmu relace. Zatím co relace definovala nějaký obecný vztah mezi libovolnými dvojicemi prvků daných množin, zobrazení je tu od toho, aby každému prvku jedné množiny přiřadilo (obecně jiný) prvek téže, nebo jiné množiny. Z toho tedy vyplývá ona důležitá omezující podmínka, že každý prvek množiny A může být v relaci maximálně s jediným prvkem množiny B. Dále jsme se v rámci tohoto tématu věnovali vybraným vlastnostem relací a definovali jejich význačné představitele (ekvivalence, kongruence, uspořádání, tolerance a rozklady).

?

1. Definujme relaci $\sim$ takto:

   $$x \sim y \text{ právě když existuje přirozené } k \text{ tak, že } x - y = kp,$$

   kde k přirozeným číslům řadíme i nulu. Je relace $\sim$ ekvivalence?
2. Nechť R a S jsou ekvivalence na množině X. Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:
   a) $R \cup S$,
   b) $R - S$,
   c) $R \circ S$.
3. Zjistěte, zda následující relace na množině R^2 jsou ekvivalence, a případně najděte geometrickou interpretaci jejich tříd. U každého případu je uvedena podmínka pro to, aby dvojice (x, y) a (z, w) z množiny R^2 byly spolu v relaci.
   a) $y - x = w - z$,
   b) $y - kx = w - kz$ (kde $k \in R$),
   c) $x^2 + 4y^2 = z^2 + 4w^2$.

Literatura k tématu:

[1] BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra*. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-135-4.

[2] ČADA, R., KAISER, T. a RYJÁČEK, Z. *Diskrétní matematika* [online]. 2. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2009 [cit. 2018-01-12]. Dostupné z: http://www.cam.zcu.cz/~ryjacek/students/DMA/skripta/

[3] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.

[4] NOVOTNÁ, J a TRCH, M.. *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů*. 2. dopl. vyd. Praha: Univerzita Karlova, 2000. ISBN 80-7290-007-2.

[5] KATRIŇÁK, T. *Algebra a teoretická aritmetika*. 4. nezm. vyd. Bratislava: Univerzita Komenského, 2002. ISBN 80-223-1674-1

Kapitola 4

Algebraické struktury

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat základní algebraické struktury,
- pracovat s příslušnými množinami a množinovými operacemi,
- řešit soustavy rovnic ve vektorových prostorech nad konečnými tělesy.

Klíčová slova:

Algebraická struktura, grupa, těleso, aritmetika, inverzní prvek, ekvivalence, kongruence.

Řada algebraických objektů má podobu množiny s nějakou dodatečnou strukturou. Například vektorový prostor je množina vektorů, ty však nejsou 'jeden jako druhý': jeden z nich hraje význačnou roli nulového vektoru, pro každé dva vektory je dán jejich součet, je definována operace násobení vektoru skalárem atd. Právě tuto dodatečnou informaci, která vektorový prostor odlišuje od pouhé množiny vektorů, máme na mysli, když mluvíme o 'struktuře'. Často se i samotné tyto objekty označují pojmem algebraické struktury.

Grupy a tělesa

V této kapitole představíme dva význačné příklady algebraických struktur: grupu a těleso. Jsou definovány jako množina s jednou resp. dvěma operacemi, které mají (v porovnání s většinou ostatních algebraických struktur) poměrně silné vlastnosti. Příkladů grup i těles je přesto celá řada, a to v nejrůznějších oblastech matematiky. Každý vektorový prostor existuje nad určitým tělesem, jehož prvky jsou právě skaláry, jimiž můžeme vektory násobit. Vektorové prostory nad tělesem reálných čísel jsou tak jen jedním speciálním případem.

Nechť M je množina. Zobrazení * z M × M do M se nazývá (binární) operace na množině M.

Taková operace může mít různé vlastnosti. Řekneme, že * je komutativní operace, pokud pro každé x, y ∈ M je x * y = y * x (tedy pokud výsledek nezáleží na pořadí operandů).

Operace * je asociativní, pokud pro x, y, z ∈ M je x * (y * z) = (x * y) * z (výsledek nezáleží na uzávorkování). Příklad asociativní operace lze vidět již u relací.

Uvážíme-li množinu všech relací na dané množině X a definujeme-li operaci ◦ jako složení dvou relací, bude tato binární operace asociativní, ale nikoli komutativní. Prvky množiny M mohou mít vzhledem k operaci * speciální vlastnosti.

Prvek n ∈ M je neutrálním prvkem (vzhledem k operaci *), pokud pro každé x ∈ M je x * n = x a rovněž n * x = x.

Všimněme si, že z definice triviálně plyne, že takový prvek je nejvýše jeden. Jsou-li totiž n, n' neutrální prvky, pak na jednu stranu n * n' = n' (protože n je neutrální), ale na druhou stranu n * n' = n (protože n' je neutrální), takže n = n'. Nechť n je neutrální prvek vzhledem k operaci *.

Prvek inverzní k prvku x ∈ M je takový prvek y, pro nějž platí, že x * y = y * x = n.

V případě, že * je asociativní operace, je inverzní prvek k libovolnému prvku $x \in M$ nejvýše jeden. Jsou-li totiž y, y‘ dva takové prvky, uvažme výraz y * x * y‘. Obě jeho uzávorkování dají stejný výsledek. Přitom (y * x) * y‘ = n * y‘ = y‘, ale y * (x * y‘) = y * n = y, takže y = y‘.

Nyní již můžeme definovat pojem grupy. Grupa je množina M spolu s asociativní binární operací *, ve které existuje neutrální prvek a ke každému prvku x existuje prvek inverzní (který značíme x^{-1}). Pokud je operace * navíc komutativní, mluvíme o komutativní nebo abelovské grupě. Používá se též označení Abelova grupa. Tato třída grup je nazvána po norském matematikovi Nielsu Henriku Abelovi (1802–1829).

Formálně grupu definujeme jako uspořádanou dvojici (M, *).

Standardním příkladem grupy je třeba množina všech reálných (celých, komplexních, racionálních) čísel s operací sčítání. Přirozená čísla se sčítáním grupu netvoří (0 je neutrální, ale vzhledem k operaci sčítání neexistuje skoro žádný inverzní prvek), a třeba celá čísla s násobením také ne (1 je neutrální, ale inverzní prvky rovněž neexistují). Ani v množině racionálních čísel neexistuje inverzní prvek k číslu 0 vzhledem k operaci násobení (pro žádné racionální y není $0 \cdot y = 1$). Oproti tomu množina všech nenulových racionálních čísel již tvoří grupu vzhledem k operaci násobení.

Množina všech matic daných rozměrů je grupou vzhledem ke sčítání. Grupou je rovněž množina všech regulárních čtvercových matic řádu n s operací násobení. Požadavek regularity je podstatný, protože k žádné singulární matici by neexistoval inverzní prvek. Spojité reálné funkce tvoří grupu vzhledem ke sčítání, permutace dané množiny vzhledem ke skládání, atd. Relace na dané množině spolu s operací skládání grupu netvoří.

K popisu grupy na konečné množině prvků je často vhodné použít tabulku, která pro každou dvojici prvků udává výsledek grupové operace. Příkladem je tab. 1, která definuje grupu na množině {a,b} s operací $*$.

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

Tabulka 4.1 Grupa na množině {a,b}.

Pojem tělesa zachycuje dvě grupy, definované na téže základní množině. Jeho prototypem je množina všech reálných čísel R s operacemi + a ·.

Dvojice (R,+) je komutativní grupa s neutrálním prvkem 0, dvojice (R,·) ale grupa není (stejně jako u racionálních čísel chybí inverzní prvek k číslu 0).

Z tohoto důvodu v následující definici tělesa přistupujeme k neutrálnímu prvku první operace s jistou opatrností.

Nechť množina M spolu s operací $\oplus$ tvoří komutativní grupu s neutrálním prvkem (dejme tomu) 0, a nechť na množině $M - \{0\}$ je určena další binární operace $\otimes$. Potom $(M,\oplus,\otimes)$ je těleso, pokud $(M-\{0\},\otimes)$ je rovněž komutativní grupa a navíc platí distributivní zákon:

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

pro každé $x, y, z \in M$.

Mezi tělesa patří množiny všech racionálních, reálných a komplexních čísel, vždy se standardními operacemi sčítání a násobení.

V následujícím oddílu budeme hovořit o tělesech, která sestávají jen z konečného počtu prvků. Všimněme si ještě, že pojem vektorového prostoru není příliš vzdálen od pojmu abelovské grupy. Dá se říci, že vektorový prostor je abelovská grupa (s operací sčítání vektorů), na které je navíc definováno násobení vektorů prvky daného tělesa.

Cvičení

1. Najděte grupu $(G, *)$ o 4 prvcích, ve které pro každý prvek x platí $x * x = 0$.
2. Isomorfismus grup $(G, *)$ a $(H, \square)$ je bijekce $f : G \to H$, která zobrazuje neutrální prvek grupy G na neutrální prvek grupy G a má tu vlastnost, že pro každé $g, g' \in G$ je
   $$f(g * g') = f(g) \square f(g').$$
   Ukažte, že isomorfismus f zobrazuje inverzní prvek k libovolnému prvku $g \in G$ na inverzní prvek k prvku $f(g)$ (v grupě H).
3. Najděte dvě konečné grupy stejné velikosti, které nejsou isomorfní (tj. neexistuje mezi nimi isomorfismus).

Aritmetika modulo p

Připomeňme si, že ekvivalence $\sim$ na množině X je relace na X, která je reflexívní, symetrická a tranzitivní. Jsou-li na množině X definovány nějaké operace, může být přirozený požadavek, aby ekvivalence $\sim$ navíc zachovávala tyto dodatečné operace. Takovým ekvivalencím se pak říká kongruence. My se zaměříme na jeden konkrétní příklad, kongruence modulo p.

Nechť $p \geq 1$ je přirozené číslo. Definujme na množině všech celých čísel relaci $\equiv$ (kongruenci modulo p) předpisem

$$x \equiv y, \text{ pokud } p \text{ dělí rozdíl } x-y.$$

Je-li potřeba zdůraznit hodnotu čísla p, píšeme $x \equiv y \pmod p$.

Lze dokázat, že se v tomto případě jedná o ekvivalenci. Každá z p tříd této ekvivalence je tvořena všemi čísly, která při dělení číslem p dávají tentýž zbytek. Proto se označují jako zbytkové třídy modulo p. Třídu obsahující číslo x budeme značit jako $[x]_p$ (jindy se používá značení $Z_p(x)$) a o prvku x budeme mluvit jako o reprezentantu této třídy. Je-li číslo p zřejmé z kontextu, píšeme místo $[x]_p$ prostě $[x]$. Množina všech zbytkových tříd modulo p se značí Z_p. Třídy $[0]_p$ a $[1]_p$, které mají svým způsobem význačné postavení, budeme značit prostě 0 resp. 1. Jak je naznačeno v úvodu této kapitoly, kongruence modulo p se chová 'slušně' k operacím sčítání a násobení na celých číslech:

Tvrzení 1.2.1

Nechť $x \equiv x'$ a $y \equiv y'$ jsou celá čísla. Potom

$$x + y \equiv x' + y' \text{ a } xy \equiv x'y'.$$

Důkaz.
Z faktu $x \equiv x'$ plyne $x' - x = pm$, kde m je celé. Podobně $y' - y = pn$, n celé.
Potom $(x' + y') - (x + y) = pm + pn = p(m + n)$, takže $x + y \equiv x'+y'$.
Stejně tak $x'y' - xy = (x + pm)(y + pn) - xy = p(xn + ym + pmn)$, proto $x'y' \equiv xy$.

Hlavním důvodem, proč je tento fakt důležitý, je, že umožňuje přenést aritmetické operace z celých čísel na zbytkové třídy, kde tak dostaneme tzv. aritmetické operace modulo p. Nechť číslo p je pevně dáno, takže je nemusíme explicitně uvádět. Pro třídy [x] a [y], zadané pomocí svých reprezentantů, definujeme jejich součet $\oplus$ a součin $\otimes$ předpisy

$$[x] \oplus [y] = [x + y],$$

$$[x] \otimes [y] = [xy].$$

U podobné definice je však třeba ověřit její korektnost: nedostaneme při jiné volbě reprezentantů tříd [x] a [y] jiné výsledky? Kdyby ano, jednalo by se o špatnou definici.

Proto předpokládejme, že $[x] = [x']$ a $[y] = [y']$. To samozřejmě znamená, že $x \equiv x'$ a $y \equiv y'$. Podle Tvrzení 1.2.1 tedy $x + x' \equiv y + y'$. Pak ovšem musí být $[x + y] = [x' + y']$, takže hodnota přiřazená součtu $[x] \oplus [y]$ je na volbě reprezentantů nezávislá. Podobně je tomu u operace $\otimes$.

Podívejme se pro konkrétnost na případ p = 7, třeba na třídy $[2]_7$ a $[6]_7$. Z definice je

$$[2]_7 = \{\dots,-5,2,9,16,\dots\},$$
$$[6]_7 = \{\dots,-1,6,13,20,\dots\}.$$

Všechny možné součty prvku z třídy $[2]_7$ a prvku z třídy $[6]_7$ tvoří množinu $\{\ldots,-6,1,8,15,22,\ldots\}$, což je právě třída $[8]_7$, takže je přirozené, že jsme položili
$[2]_7 \oplus [6]_7 = [8]_7$. Podobně množina všech součinů prvku ze třídy $[2]_7$ a prvku ze třídy $[6]_7$ je obsažena ve třídě $[12]_7$.
Množina Z_7 má 7 prvků, které lze psát například jako $[0]_7, [1]_7, \ldots, [6]_7$. Při počítání modulo p můžeme v praxi vynechat symboly pro třídy a pracovat pouze s čísly $0,1,\ldots,p-1$ (s tzv. úplnou soustavou zbytků modulo p), s tím, že výsledek každé operace nahradíme příslušným zbytkem. Například při počítání modulo 5 bychom tak mohli psát třeba $3 \oplus 4 = 2$ nebo $4 \otimes 3 = 2$. Úplnou informaci o aritmetice modulo 5 podává tabulka 2

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\otimes$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Tabulka 4.2 Aritmetika nad Z_5 (v tabulce násobení je vynechán řádek a sloupec prvku 0, které sestávají ze samých nul).

Věta 1.2.2
Pro libovolné $p \geq 1$:

a) dvojice $(Z_p,\oplus)$ je komutativní grupa,
b) operace $\otimes$ na $Z_p - \{0\}$ je komutativní, asociativní a má neutrální prvek,
c) operace $\oplus$ na Z_p je distributivní vzhledem k operaci $\otimes$, tj.

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

pro libovolné $a,b,c \in Z_p$.

Důkaz. Věta snadno plyne z vlastností aritmetických operací na celých číslech. V části (a) je například operace $\oplus$ komutativní, protože $[a] \oplus [b] = [a + b] = [b + a] = [b] \oplus [a]$. Podobně dostaneme asociativitu. Třída [0] je zjevně neutrální vzhledem ke sčítání. Inverzní prvek ke třídě [a] je třída [−a].

Část (b) se dokazuje zcela podobně. Část (c) je opět důsledkem distributivity na celých číslech, protože platí

$$[a]\otimes([b]\oplus[c]) = [a]\otimes[b + c] = [a(b + c)] = [ab + ac] = [ab]\oplus[ac] = ([a]\otimes[b]) \oplus ([a]\otimes[c]).$$

Je Z_p spolu s operacemi $\oplus$ a $\otimes$ tělesem? Podle předchozí věty k tomu mnoho nechybí: vlastně pouze to, aby ke každé nenulové třídě existoval inverzní prvek vzhledem k násobení. Pak by totiž i $(Z_p,\otimes)$

byla abelovská grupa. Ptáme se tedy, kdy ke třídě [x] ∈ Z_p existuje inverzní prvek vzhledem k násobení. Asi tomu tak nebude vždy; například pro p = 4 nenajdeme inverzní prvek ke třídě $[2]_4$. Máme totiž [2] ⊗ [1] = [2], [2] ⊗ [2] = [0] a [2] ⊗ [3] = [2]. Na druhou stranu například Z_5 tělesem je, jak se lze přesvědčit z výše uvedené tabulky operace ⊗. Úplnou odpověď na naši otázku nabízí následující tvrzení.

Tvrzení 1.2.3
Ke třídě [r] ∈ Z_p existuje inverzní prvek vzhledem k násobení, právě když r a p jsou nesoudělná čísla.

Důsledek 1.2.4
Množina Z_p s operacemi ⊕ a ⊗ je tělesem, právě když p je prvočíslo. Nabízí se ještě další otázka. Víme, že Z_p je těleso pouze pro prvočíselná p. Existuje těleso o neprvočíselném počtu prvků, řekněme čtyřprvkové? Odpověď zní ano. Obecně platí věta, kterou nebudeme dokazovat, že n-prvkové těleso existuje právě tehdy, když n je mocnina prvočísla.

Nechť p je prvočíslo. Víme-li, že Z_p je těleso, nic nám nebrání uvažovat o vektorových prostorech nad tímto tělesem. Podobně jako jedním ze základních příkladů vektorového prostoru nad reálnými čísly je prostor R^n, tvořený n-ticemi reálných čísel, zde hraje důležitou roli vektorový prostor

$$Z^n_p = \{(a_1,\dots,a_n) : a_i \in Z_p \text{ pro každé } i\},$$

přičemž sčítání + a násobení skalárem · jsou definovány ‘po složkách’:

$$(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n) = (a_1 \oplus b_1,\dots,a_n \oplus b_n),$$

$$c\cdot(a_1,\dots,a_n) = (c \otimes a_1,\dots,c \otimes a_n),$$

kde c ∈ Z_p. Všimněme si, že protože jednotlivé složky vektorů jsou prvky Zp, sčítáme je pomocí operace ⊕ a násobíme pomocí operace ⊗. Dále se můžeme setkat se speciálním případem této konstrukce, vektorovým prostorem Z^n_2 nad Z_2, jehož prvky jsou n-tice nul a jedniček.

Ve vektorových prostorech nad konečnými tělesy lze provádět všechny obvyklé operace jako v reálných vektorových prostorech, například řešit soustavy rovnic.

Jako příklad řešme soustavu

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4t &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

o 4 neznámých nad tělesem Z_5 (viz tabulka 2). Pro přehlednost vynecháváme třídové závorky a aritmetické operace zapisujeme jako +, · (a nikoli ⊕,⊗).

Standardním postupem vytvoříme matici a převedeme ji do kanonického tvaru:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right],$$

přičemž provedené úpravy jsou (po řadě): přičtení čtyřnásobku prvního řádku k druhému, vynásobení druhého řádku 'číslem' 4, a přičtení trojnásobku druhého řádku k prvnímu. Zjišťujeme, že řešení této soustavy mají tvar

$$\{(4 + 4z + 4w, 1 + 4z + w, z, w) : z, w \in Z_5\}.$$

Jinak řečeno, každé řešení je lineární kombinací

$$(4,1,0,0) + z \cdot (4,4,1,0) + w \cdot (4,1,0,1), \text{ kde } z, w \in Z_5.$$

Grupa je v matematice algebraická struktura, která popisuje a formalizuje koncept symetrie. Formálně se zavádí jako množina spolu s binární operací splňující níže uvedené axiomy. Matematická disciplína zabývající se studiem grup se nazývá teorie grup. Příklady grup jsou celá čísla s operací sčítání, nenulová racionální čísla s operací násobení, symetrie pravidelných geometrických útvarů, množiny regulárních matic a automorfismy různých algebraických struktur.

Teorie grup vznikla počátkem 19. století. U jejího zrodu stál matematik Évariste Galois, který dokázal, že polynomiální rovnice nelze obecně řešit pomocí odmocnin. Grupy našly později uplatnění také v geometrii, teorii čísel, algebraické topologii a dalších matematických oborech. Klasifikace jednoduchých konečných grup byla dokončena koncem 20. století a patří k největším výsledkům matematiky vůbec. Pojem grupy abstraktně popisuje či zobecňuje mnoho matematických objektů a má významné uplatnění i v příbuzných oborech

1. Nechť $x, y \in Z^n_2$. Kdy je i-tá složka součtu $x + y$ nulová?
2. Řešte soustavu nad tělesem Z_3:

$$\begin{aligned} x + 2y + t &= 1 \\ 2x + 2z &= 1 \\ 2x + z + t &= 0 \end{aligned}$$

3. Napište tabulky sčítání a násobení v tělesech Z_2 a Z_7.
4. Nechť a a b jsou celá čísla (alespoň jedno nenulové). Dokažte, že (a,b) je nejmenší kladné číslo tvaru ax + by, kde x, y ∈ Z.
5. Ověřte, že množina {0,1,2,3} spolu s operacemi * a ∘, zadanými pomocí následujících tabulek, je tělesem. Ukažte, že tyto operace se liší od sčítání a násobení na množině Z_4.

$\star$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\circ$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

Literatura k tématu:

[1] BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra*. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-135-4.

[2] ČADA, R., KAISER, T. a RYJÁČEK, Z. *Diskrétní matematika* [online]. 2. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2009 [cit. 2018-01-12]. Dostupné z: http://www.cam.zcu.cz/~ryjacek/students/DMA/skripta/

[3] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.

[4] NOVOTNÁ, J a TRCH, M.. *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů*. 2. dopl. vyd. Praha: Univerzita Karlova, 2000. ISBN 80-7290-007-2.

[5] KATRIŇÁK, T. *Algebra a teoretická aritmetika*. 4. nezm. vyd. Bratislava: Univerzita Komenského, 2002. ISBN 80-223-1674-1.

Kapitola 5

Booleovy algebry

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat uspořádání a svaz,
- rozhodnout o vlastnostech dané relace,
- identifikovat atomy Booleových algeber.

Klíčová slova:

Uspořádání, svaz, infimum, supremum, svaz, Booleova algebra, atom, reprezentace.

Uspořádání a svazy

Jak už bylo definováno v předchozí kapitole, uspořádání na množině X je libovolná relace na X, která je reflexívní, (slabě) antisymetrická a tranzitivní.

Oproti definici ekvivalence jsme tedy 'pouze' zaměnili symetričnost za antisymetričnost. Účinky této změny jsou však značné.

Je-li R uspořádání na množině X, pak dvojice (X, R) se nazývá **uspořádaná množina**. Jsou-li prvky x, y v relaci R (tedy x R y), interpretujeme to slovy 'prvek x je menší nebo roven prvku y'. To je v souladu se všemi třemi základními vlastnostmi uspořádání. Uspořádáním z naší definice se také říká **neostrá uspořádání**, protože pro každé x platí x R x. (U ostrého uspořádání bychom požadavek reflexivity nahradili antireflexivitou: pro žádné x neplatí x R x.

Neostrá uspořádání často značíme symboly ≤ nebo ≼. Snadno se ověří, že vlastnosti uspořádání má například 'standardní' uspořádání ≤ množiny reálných čísel. Poněkud zajímavější je možná fakt, že uspořádá- ním je i relace dělitelnosti definovaná vztahem 'x dělí y' na libovolné množině přirozených čísel. Tyto dva příklady se liší v jednom důležitém ohledu, který podrobně rozebereme. Nechť x, y jsou dva prvky uspořádané množiny (X, ≼).

Platí-li x ≼ y nebo y ≼ x, jsou prvky x, y porovnatelné, v opačném případě jsou neporovnatelné. Uspořádání ≼ se často označuje jako částečné, protože předchozí definice připouští existenci dvojic neporovnatelných prvků. Podobně o množině (X, ≼) mluvíme jako o částečně uspořádané množině.

Při standardním uspořádání ≤ na množině R jsou každé dva prvky porovnatelné. Takovým uspořá- dáním se říká lineární nebo úplné. Důvodem pro první označení je fakt, že lineární uspořádání řadí prvky dané množiny do jedné linie, 'od nejmenšího k největšímu'. Náš druhý příklad, relace dělitel- nosti na přirozených číslech, lineární není, jak ukazuje například neporovnatelná dvojice {2, 3}. Zdů- razněme ovšem, že oba zmíněné příklady spadají do obecnější kategorie částečných uspořádání. Přidejme ještě třetí příklad uspořádání. Pro libovolnou množinu A můžeme uvážit nějaký soubor B jejích podmnožin. Na souboru B je pak přirozeně definováno uspořádání inkluzí ⊂: podmnožiny B, B‘ ∈ B budou v relaci (tedy B ⊂ B‘), pokud B je podmnožinou množiny B‘. Ani uspořádání ⊂ obecně není lineární.

Zaveďme dále několik pojmů označujících význačné prvky uspořádané množiny. Mějme uspořáda- nou množinu (X, ≼). Prvek a ∈ X je **největším prvkem** množiny X, pokud pro každé x ∈ X platí x ≼ a. Podobně **nejmenší prvek** množiny X je prvek a takový, že a ≼ x pro každé x ∈ X.

Největší prvek obecně nemusí existovat, ale existuje-li, pak je určen jednoznačně.

Sjednocení množin A, B je množina, která obsahuje jak množinu A, tak množinu B (jako podmnožiny), ale ‘neobsahuje nic navíc’. Přesněji řečeno, je to nejmenší ze všech množin, které jsou větší než A i než B. Slova ‘nejmenší’ a ‘větší’ se tu samozřejmě vztahují k uspořádání inkluzí. Níže definovaný pojem suprema tak lze chápat jako (dalekosáhlé) zobecnění pojmu sjednocení. Prvek z je **horní závorou** dvojice prvků x, y uspořádané množiny (X, $\preccurlyeq$), pokud platí $x \preccurlyeq z$ a $y \preccurlyeq z$. **Supremum** (jinak též **spojení**) prvků x, y je nejmenší ze všech jejich horních závor, tedy takový prvek s, který je horní závorou dvojice x, y, přičemž neexistuje jiná horní závora $z \neq s$, pro kterou by bylo $z \preccurlyeq s$.

Dvojice prvků obecně žádné supremum mít nemusí: předně nemusí mít ani žádnou horní závoru, nebo naopak může množina horních závor mít více minimálních prvků, ze kterých pak, jak víme, žádný nebude nejmenší.

Podobně jako supremum je definováno **infimum** dvou prvků. Dolní závora prvků x, y je prvek z, pro který je $z \preccurlyeq x$ a $z \preccurlyeq y$, a **infimum** (**průsek**) prvků x, y je největší z jejich dolních závor. K pojmu infima se symetrickým způsobem vztahuje vše, co bylo řečeno o supremu.

Definice

Svaz je uspořádaná množina (X, $\preccurlyeq$), ve které existuje supremum i infimum pro libovolnou dvojici prvků.

Ve svazu můžeme na supremum a infimum pohlížet jako na binární operace (protože je zaručeno, že jejich hodnoty jsou definovány pro každou dvojici). Supremum prvků x, y zde značíme $x \vee y$, infimum jako $x \wedge y$. Příkladem svazu, na který jsme již narazili, je množina všech podmnožin libovolné množiny (uspořádaná inkluzí). Supremum dvou množin zde odpovídá jejich sjednocení, infimum odpovídá jejich průniku.

Každý svaz, ve kterém platí:

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ pro libovolné prvky a, b, c.

se nazývá **distributivní**. Příkladem takového svazu je svaz podmnožin libovolné množiny. Jsou-li totiž A, B, C nějaké množiny, pak je zřejmé, že $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Booleovy algebry

Soubor podmnožin libovolné množiny má strukturu distributivního svazu. Jeho struktura je ale bohatší o operaci, která každé podmnožině přiřazuje její doplněk. Distributivním svazům s podobnou operací se říká Booleovy algebry.

Definice

Nechť $(X, \preccurlyeq)$ je svaz s nejmenším prvkem 0 a největším prvkem 1. **Komplement** prvku $x \in X$ je každý prvek y, pro který platí

$$x \vee y = 1, x \wedge y = 0.$$

Jak jsme naznačili výše, představu o pojmu komplement poskytuje svaz podmnožin libovolné množiny A, kde komplementem množiny $B \subset A$ je prostě množinový doplněk $A-B$. (Je totiž jasné, že sjednocením množiny B a jejího doplňku je celá množina A, zatímco jejich průnik je prázdný.)

V tomto případě je komplement určen jednoznačně. Obecně tomu tak být nemusí, ale v případech, o které se budeme zajímat, platí, že komplement libovolného prvku je nejvýše jeden:

Tvrzení

Je-li $(X, \preccurlyeq)$ distributivní svaz s 0 a 1, potom každý prvek $x \in X$ má nejvýše jeden komplement.

Definice

Booleova algebra je distributivní komplementární svaz s prvky 0 a 1. Používá se také pojmu **Booleův svaz**.

V Booleově algebře má tedy každý prvek x právě jeden komplement, který se značí $\bar{x}$.

U Booleových algeber je rovněž často přijímána konvence, které se přidržíme i my, totiž značit operaci suprema jako + a operaci infima jako · (přičemž tečka se stejně jako u běžného součinu obvykle vynechává). Přepíšeme-li tedy například definici komplementu v tomto novém značení, dostaneme $x + \bar{x} = 1$ a $x\bar{x} = 0$. Zákony distributivity v novém hávu vypadají takto:

$$x(y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z),$$

$$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z).$$

První z nich vypadá jako známá distributivita u číselných operací, prosté roznásobení závorky. Druhá rovnost, která neplatí o nic méně, ale u čísel žádnou obdobu nemá.

Booleovské počítání

Věta (De Morganovy zákony)

V Booleově algebře A platí pro každou dvojici prvků x, y ∈ A:

a) $\overline{x+y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

b) $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$.

Pravidla počítání v Booleových algebrách shrnuje následující věta:

Věta

Pro libovolné prvky a, b, c Booleovy algebry B platí:

1) a + a = a,
2) a + b = b + a (komutativita),
3) a + (b + c) = (a + b) + c (asociativita),
4) a + (ab) = a,
5) a(b + c) = (ab) + (ac) (distributivita),
6) a + 0 = a,
7) a · 0 = 0,
8) $\bar{1}$ = 0,
9) a + $\bar{a}$ = 1,
10) $\bar{a}$ = a,
11) $\overline{a+b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ (De Morganovy zákony),

a rovněž duální formy všech těchto tvrzení (ve kterých zaměníme symboly + a · a symboly 0 a 1).

Definovali jsme Booleovu algebru jako speciální případ svazu, obecněji uspořádané množiny. Z daného uspořádání na této množině jsme teprve dodatečně odvodili operace součtu, součinu a komplementu (pomocí pojmů supremum a infimum). Znalost samotného uspořádání nám poskytuje úplnou informaci o těchto operacích.

K věci bychom ale mohli přistoupit i z druhé strany a definovat Booleovu algebru přímo jako množinu M s binárními operacemi + a · a unární operací komplement, které splňují určitá pravidla. Mohli bychom pak definovat uspořádání ≼ na množině M předpisem

$$a \preccurlyeq b, \text{ právě když } a \cdot b = a.$$

Pokud byly podmínky kladené na naše operace vhodně zvoleny, bude množina M s tímto uspořádáním distributivní komplementární svaz — jinými slovy Booleova algebra podle naší staré definice.

Definice

Atom Booleovy algebry $(A, \preccurlyeq)$ je libovolný nenulový prvek $a \in A$ takový, že jediným prvkem $z \in A - \{a\}$, pro který platí $z \preccurlyeq a$, je prvek $z = 0$. Množinu všech atomů Booleovy algebry A značíme $At(A)$.

Všimněme si, že ekvivalentně by šlo atomy definovat jako prvky, jejichž bezprostředním předchůdcem je prvek 0. Například Booleova algebra $2^{\{a,b\}}$ má atomy $\{a\}$ a $\{b\}$.

Snadno se zjistí, že každá konečná Booleova algebra obsahuje aspoň jeden atom: platí dokonce následující silnější tvrzení:

Pro každý prvek $x \neq 0$ konečné Booleovy algebry A existuje atom $a \in At(A)$ takový, že $a \preccurlyeq x$.

Reprezentace Booleových algeber

Definujme nejprve pojem isomorfismu mezi uspořádanými množinami. Obecně řečeno je isomorfismus bijekce, která zachovává ‘vše podstatné’. U uspořádaných množin musí zachovávat uspořádání, zatímco například u grup jde o jednotkový prvek a grupovou operaci.

Definice

Isomorfismus uspořádaných množin $(X, \preccurlyeq)$ a $(Y, \sqsubseteq)$ je bijekce $f : X \to Y$ taková, že pro každé $a, b \in X$ platí $a \preccurlyeq b$ právě když $f(a) \sqsubseteq f(b)$. Tyto uspořádané množiny jsou isomorfní (psáno $(X, \preccurlyeq) \simeq (Y, v)$), pokud mezi nimi existuje isomorfismus.

Dále platí, že isomorfismus dvou Booleových algeber jakožto uspořádaných množin zachovává i všechny dosud uvažované operace (např. supremum).

Definice

Nechť $B = \{a_1, . . . , a_k\}$ je konečná množina prvků svazu $(X, \preccurlyeq)$ s nejmenším prvkem 0. Je-li $k > 1$, definujme supremum množiny B jako

$$\sup B = (. . .((a_1 \vee a_2) \vee a_3) \vee . . .) \vee a_k.$$

Dále definujme $\sup \emptyset = 0$, $\sup \{a\} = a$.

Tvrzení

Nechť $(X, \preccurlyeq)$ je svaz s nejmenším prvkem 0 a $B = \{a_1, . . . , a_k\} \subset X$. Potom:

(1) sup B je nejmenší horní závora množiny B, tj. nejmenší prvek $x \in X$ s vlastností $a_i \preccurlyeq x$ pro každé i,

(2) sup B = $a_1 \vee \cdots \vee a_k$).

Věta (Stoneova)
Každá konečná Booleova algebra $(A, \preccurlyeq)$ je isomorfní s Booleovou algebrou $(2^{At(A)}, \subset)$.

Důsledky

- Počet prvků konečné Booleovy algebry A je vždy mocnina čísla 2, konkrétně 2^m, kde m = |At(A).
- Dvě konečné Booleovy algebry se stejným počtem prvků jsou isomorfní.

Booleova algebra je algebraická struktura, která zobecňuje vlastnosti množinových a logických operací. Je nazvána podle britského matematika George Boolea. Klíčový význam mají Booleovy algebry také pro metodu forsingu.

Σ

V rámci této kapitoly jsme zavedli pojem Booleova algebra, která je množinou dvojstavových proměnných spolu s operacemi logického součtu, součinu a negace. Pojem Booleovy algebry je však obecnější, takže námi uvedená množina je jen její speciální případ. Vyvinul se v návaznosti na analogii mezi množinovými operacemi sjednocení a průnik a aritmetickými operacemi sčítání a násobení. Rozsah a důležitost této analogie objasnil jako první britský matematik George Boole (1815-1864), který položil základy algebraické teorie množin před více než 100 lety. Jde o algebraickou strukturu, která zobecňuje vlastnosti množinových a logických operací. Klíčový význam mají Booleovy algebry také pro metodu forsingu. Booleova algebra je tedy definována jako distributivní komplementární svaz.

?

1. Ukažte, že jsou-li dvě Booleovy algebry isomorfní (jako uspořádané množiny), pak příslušný isomorfismus f zachovává i operace suprema, infima a komplementu, tedy například
$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
(kde se ovšem symbol + na každé straně rovnice vztahuje k jiné Booleově algebře).
2. Nechť $g : Y \to Z$ je bijekce mezi konečnými množinami. Zobrazení g indukuje zobrazení $2^g : 2^Y \to 2^Z$, dané předpisem
$$2^g(A) = \{g(a) : a \in A\}$$

pro libovolné $A \subset Y$. Ukažte, že 2^g je isomorfismus Booleových algeber $(2^Y, \subset)$ a $(2^Z, \subset)$.

3. Najděte všechny navzájem neisomorfní uspořádané množiny o 3 prvcích. Dokažte, že stejně velké konečné lineárně uspořádané množiny jsou isomorfní. Najděte dvě neisomorfní lineární uspořádání množiny všech přirozených čísel.

Literatura k tématu:

[1] BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra*. Vyd. 4. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-80-7378-135-4.

[2] ČADA, R., KAISER, T. a RYJÁČEK, Z. *Diskrétní matematika* [online]. 2. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2009 [cit. 2018-01-12]. Dostupné z: http://www.cam.zcu.cz/~ryjacek/students/DMA/skripta/

[3] BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.

[4] NOVOTNÁ, J a TRCH, M.. *Algebra a teoretická aritmetika: sbírka příkladů*. 2. dopl. vyd. Praha: Univerzita Karlova, 2000. ISBN 80-7290-007-2.

[5] KATRIŇÁK, T. *Algebra a teoretická aritmetika*. 4. nezm. vyd. Bratislava: Univerzita Komenského, 2002. ISBN 80-223-1674-1.

Kapitola 6

Vektorové prostory

Po prostudování kapitoly budete umět:

- pracovat s vektory - sčítat vektory, násobit vektor číslem, vypočítat skalární součin vektorů,
- tvořit lineární kombinace vektorů,
- rozhodnout o lineární závislosti a nezávislosti vektorů,
- vědět, co je vektorový prostor a jak se vygeneruje.

Klíčová slova:

Vektor, operace s vektory, lineární kombinace vektorů, vektorový prostor, lineární závislost a nezávislost vektorů, báze vektorového prostoru.

Vektory a operace s nimi

Definice 6.1 Uspořádanou n-tici

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

budeme nazývat $n -$ rozměrným vektorem. Množinu všech n-rozměrných vektorů budeme nazývat **n-rozměrným vektorovým prostorem** a označovat V_n, x_i nazýváme **složky** vektoru.

Velikost vektoru je $|\vec{x}| = \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$.

Vektor $\vec{o} = (0; 0; \dots; 0) \in V_n$ nazveme **nulovým vektorem**.

Příklad Ze skladu s pískem je exportován materiál ke třem odběratelům. První má požadavek na dodávku ve výši 8t, druhý 5t a třetí ve výši 7t. Požadavky odběratelů lze vyjádřit jako vektor $(8,5,7)$.

Definice 6.2 Nechť jsou dány vektory $\overrightarrow{x_1} = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$, $\overrightarrow{x_2} = x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2 \in \mathbb{R}^n$ a konstanta $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

- sčítání vektorů (provádí se po složkách)
$$\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} = (x_1^1 + x_1^2, x_2^1 + x_2^2, \dots, x_n^1 + x_n^2),$$
- násobení vektoru skalárem (provádí se po složkách)
$$\alpha\overrightarrow{x_1} = (\alpha x_1^1, \alpha x_2^1, \dots, \alpha x_n^1),$$
- skalární součin vektorů
$$\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_2} = x_1^1 x_1^2 + x_2^1 x_2^2 + \cdots + x_n^1 x_n^2.$$

Poznámka Součet dvou vektorů je vektor, součin vektoru a skaláru je vektor, skalární součin dvou vektorů je skalár.

Poznámka Pokud skalární součin $\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_2} = 0$, jsou vektory $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}$ kolmé.

Příklad Spočítejte $c\vec{a} - \vec{b}$, když $c = 3, \vec{a} = (1,-1,2)$ a $\vec{b} = (0,2,0)$.

Řešení

$$c\vec{a} - \vec{b} = 3(1,-1,2)) - (0,2,0) = (3,-5,6).$$

Definice 6.3 Množina $V_n \subset \mathbb{R}^n$ všech n-rozměrných vektorů s operacemi sčítání a násobení skalárem, pro které platí

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n,$$
$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n, \alpha \in \mathbb{R},$$

se nazývá **vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ reálných čísel**.

Příklad Vektory $\overline{x} = (1,2,1), \overline{y} = (-1,0,-1)$ patří do vektorového prostoru.

Lineární kombinace vektorů

Definice 6.4 Nechť $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in V_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Výraz

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k$$

se nazývá **lineární kombinace vektorů** $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.

V případě, že všechny koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ lineární kombinace jsou nulové, hovoříme o **triviální lineární kombinaci**. Je-li aspoň jeden z koeficientů různý od nuly, hovoříme o **netriviální lineární kombinaci**. Lineární kombinace, která je rovna nulovému vektoru se nazývá nulová. Zřejmě každá triviální lineární kombinace je nulová. Triviální lineární kombinací libovolných vektorů je vždy vektor nulový.

Příklad Napište, jak vypadá triviální lineární kombinace vektorů $\vec{a} = (2, -1, 2)$ a $\vec{b} = (1, 2, -3)$.

Řešení Podle definice 6.4 má triviální lineární kombinace tvar

$$0\vec{a} + 0\vec{b} = 0 \cdot (2, -1, 2) + 0 \cdot (1, 2, -3) = (0, 0, 0)$$

Příklad Utvořte lineární kombinaci $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c}$ vektorů $\vec{a} = \left(\frac{1}{2}; -2; 0\right)$, $\vec{b} = (-1; 0; 1), \vec{c} = \left(\frac{2}{3}; \frac{-3}{2}; -1\right)$, je-li $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = \frac{3}{2}$.

Řešení Podle definice 6.4 je lineární kombinací vektor, označíme jej $\vec{u}$.

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} = 2\left(\frac{1}{2}; -2; 0\right) - 1(-1; 0; 1) + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}; \frac{-3}{2}; -1\right) =$$
$$= (1; -4; 0) + (1; 0; -1) + \left(1; \frac{-9}{4}; -\frac{3}{2}\right) = \left(3; \frac{-25}{4}; -\frac{5}{2}\right)$$

Lineární kombinací je vektor $\vec{u} = \left(3; \frac{-25}{4}; -\frac{5}{2}\right)$.

Příklad Zjistěte, zda je vektor $\vec{a} = (2; 4; -4)$ lineární kombinací vektorů $\vec{b} = (0; -2; 3)$ a $\vec{c} = (1; 0; 1)$.

Řešení Pokud by byl $\vec{a}$ lineární kombinací $\vec{b}$ a $\vec{c}$, pak by existovala reálná čísla α_1 a α_2 tak, že by podle definice 6.4 platilo $\vec{a} = \alpha_1\vec{b} + \alpha_2\vec{c}$.

$$(2;4;-4) = \alpha_1(0;-2;3) + \alpha_2(1;0;1)$$
$$(2;4;-4) = (0;-2\alpha_1;3\alpha_1) + (\alpha_2;0;\alpha_2)$$
$$(2;4;-4) = (\alpha_2;-2\alpha_1;3\alpha_1 + \alpha_2)$$

Dva vektory se sobě rovnají, rovnají-li se jejich odpovídající složky, tj.

$$2 = \alpha_2$$
$$4 = -2\alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1 = -2$$
$$-4 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$$
$$-4 = 3 \cdot (-2) + 2$$

Existují čísla $\alpha_1 = -2$ a $\alpha_2 = 2$ taková, že platí $\vec{a} = -2\vec{b} + 2\vec{c}$, vektor $\vec{a}$ je tedy lineární kombinací vektorů $\vec{b}$ a $\vec{c}$. Je zřejmé, že vektor $\vec{b}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$ a $\vec{c}$, protože $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$. Obdobně vektor $\vec{c}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$, protože $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Příklad Zjistěte, zda je vektor $\vec{w}$ lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

$$\vec{w} = (5,6,7), \vec{u} = (1,3,2), \vec{v} = (2,-1,3)$$

Řešení Pokud by byl $\vec{w}$ lineární kombinací $\vec{u}$ a $\vec{v}$, pak by existovala reálná čísla α_1 a α_2 tak, že by podle definice 6.4 platilo

$$\vec{w} = \alpha_1\,\vec{u} + \alpha_2\,\vec{v}$$
$$(5,6,7) = \alpha_1(1,3,2) + \alpha_2(2,-1,3)$$
$$(5,6,7) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$$

Z rovnosti vektorů dostaneme

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5 \quad \Rightarrow \alpha_1 = 5 - 2\alpha_2 \quad \alpha_1 = 5 - 2 \cdot \frac{9}{7} = \frac{17}{7}$$
$$3\alpha_1 - \alpha_2 = 6 \quad 3(5 - 2\alpha_2) - \alpha_2 = 6 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{9}{7}$$
$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 7$$

Dosadíme vypočítané hodnoty α_1 a α_2 do poslední rovnice.

$$2 \cdot \frac{17}{7} + 3 \cdot \frac{9}{7} = \frac{61}{7} \neq 7$$

Soustava rovnic pro neznámé α_1 a α_2 nemá řešení. Neexistují koeficienty α_1 a α_2 tak, aby platilo $\vec{w} = \alpha_1\,\vec{u} + \alpha_2\,\vec{v}$. Vektor $\vec{w}$ není lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Lineární závislost vektorů

Definice 6.5 Vektory se nazývají **lineárně nezávislé**, právě když pouze jejich triviální lineární kombinace je nulový vektor. Existuje-li aspoň jedna jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna vektoru nulovému, jsou vektory **lineárně závislé**.

Příklad Zjistěte, zda vektory $\vec{a} = (2, -4)$ a $\vec{b} = (-1,2)$ jsou lineárně závislé či lineárně nezávislé.

Řešení Platí $\vec{a} + 2\vec{b} = (0,0)$. Existují tedy nenulové konstanty $c_1 = 1, c_2 = 2$ tak, že lineární kombinace $\alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} = \vec{o}$. To znamená, že vektory jsou lineárně závislé.

Příklad Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů $\vec{x}_1 = (1,0,2)$, $\vec{x}_2 = (1,-1,0)$, $\vec{x}_3 = (3,-2,3)$.

Řešení Podle definice 6.5 jsou vektory lineárně nezávislé, když jejich lineární kombinace

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 = \vec{o} \quad (1)$$

jen v případě, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Když (1) rozepíšeme do složek, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \quad (2)\\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \quad (3)\\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Z rovnice (4) je $\alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_3$.

Z rovnice (3) je $\alpha_2 = -2\alpha_3$.

Po dosazení do rovnice (2) obdržíme $-\frac{3}{2}\alpha_3 - 2\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0$. Odtud spočteme, že $-\alpha_3 = 0$.

Odtud je vidět, že $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. To znamená, že zadané vektory jsou lineárně nezávislé, protože pouze jejich triviální kombinace je rovna vektoru nulovému.

O úzkém vztahu mezi pojmy lineární kombinace a lineární závislost vypovídá následující věta:

Věta 6.1 *Vektory $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_n} \in V_n$ jsou lineárně závislé, právě když aspoň jeden z nich je lineární kombinací ostatních.*

Poznámka Věta udává nutnou a zároveň postačující podmínku pro lineární závislost vektorů.

Příklad Zjistěte, zda dané tři vektory jsou lineárně závislé, či nezávislé. $\vec{a} = (0; 0; 1)$, $\vec{b} = (1; -1; -1)$, $\vec{c} = (1; -1; 1)$.

Řešení

a) Vyšetříme lineární závislost podle podle definice 6.5. Utvoříme lineární kombinaci vektorů a položíme ji rovnu $\vec{o}$.

$$\alpha_1\vec{o} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c} = \vec{o}$$
$$\alpha_1(0;0;1) + \alpha_2(1;-1;\ -1) + \alpha_3(1;-1;1) = (0;0;0)$$
$$(\alpha_2 + \alpha_3; -\alpha_2 - \alpha_3; \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = (0;0;0)$$

Z rovnosti vektorů obdržíme soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = -\alpha_3$$
$$-\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 2\alpha_3$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Řešením jsou všechny uspořádané trojice tvaru

$$(2\alpha_3; -\alpha_3;\ \alpha_3), \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

Např. pro $\alpha_3 = 1$ obdržíme jednu takovou trojici $(2;-1;1)$.

V tomto případě dokonce nekonečně mnoho netriviálních lineárních kombinací dává vektor $\vec{o}$, tedy vektory $\vec{a}, \vec{b}$ a $\vec{c}$ jsou lineárně závislé.

b) Vyšetříme lineární závislost podle věty 6.1. Zjistíme, zda je např. vektor $\vec{a}$ lineární kombinací vektorů $\vec{b}$ a $\vec{c}$, tj. platí-li

$$\vec{a} = k \cdot \vec{b} + l \cdot \vec{c}, \text{ kde } k, l \in \mathbb{R}$$
$$(0;0;1) = k(1;\ -1;\ -1) + l(1;\ -1;1)$$
$$(0;0;1) = (k + l;\ -k - l;\ -k + l)$$

Z rovnosti vektorů dostáváme

$$0 = k + l \ \Longrightarrow k = -l, k = -\frac{1}{2}$$
$$0 = -k - l$$
$$1 = -k + l \quad 1 = 2l \Longrightarrow l = \frac{1}{2}$$
$$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

Vektor $\vec{a}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{b}$ a $\vec{c}$ a podle věty 6.1 jsou vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárně závislé.

Poznámky Lineární závislost či lineární nezávislost vektorů lze vyšetřit také užitím hodnosti matic nebo výpočtem hodnoty determinantů. (Dozvíme se to v kapitolách 7 a 8.)

Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice 6.6 Maximální počet lineárně nezávislých vektorů z prostoru V_n se nazývá **dimenze vektorového prostoru** V_n a množina těchto vektorů tvoří tzv. **bázi** daného vektorového prostoru.

Poznámka Známe-li bázi vektorového prostoru, můžeme každý libovolný prvek prostoru vygenerovat jako lineární kombinaci prvků báze.

Příklad Zjistěte, zda vektory $\vec{x}_1 = (1,0,0), \vec{x}_2 = (0,1,0), \vec{x}_3 = (0,0,1)$ jsou lineárně nezávislé. Pokud ano, vyjádřete vektor (5,4,-30) jako lineární kombinaci těchto vektorů.

Řešení Řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 1\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 1\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

Protože tato soustava má jen triviální řešení, jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ lineárně nezávislé.
Vektor $(5,4,-30) = 5\vec{x}_1 + 4\vec{x}_2 - 30\vec{x}_3$.

Vektor je uspořádaná n-tice reálných čísel. Vektory můžeme mezi sebou sčítat, násobit skalárem, utvořit jejich skalární součin. Lineární kombinací vektorů je vektor. Vektory jsou lineárně nezávislé, když pouze jejich triviální lineární kombinace je rovna nulovému vektoru. Vektory jsou lineárně závislé, je-li aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.

1. Co je vektor a jaké znáte operace s vektory?
2. Co je lineární kombinace vektorů a triviální lineární kombinace vektorů?
3. Kdy jsou vektory lineárně závislé a kdy lineárně nezávislé? Uveďte příklady.
4. Vysvětlete pojmy vektorový prostor, jeho báze a dimenze? Uveďte příklady.
5. Zjistěte, zda vektory jsou na sebe kolmé.
   a) $\vec{x}_1 = (1,0), \vec{x}_2 = (2,0)$ [ano]
   b) $\vec{x}_1 = (1,-1,2), \vec{x}_2 = (3,5,1)$ [ne]
6. Určete vektor $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$, jsou-li dány vektory $\vec{a} = (3;5;-2;6)$, $\vec{b} = (-1;7;13;-3), \vec{c} = (1;0;-2;3)$.
   $[\vec{x} = (8;-11;-41;6)]$

7. Vypočítejte $a, b \in \mathbb{R}$ z rovnice $\vec{x} = \vec{y}$, kde $\vec{x} = (-2; 0; a - b; a)$ a $\vec{y} = (b; a + b; 4; -b)$

[$a = 2, b = -2$]

8. Zjistěte, zda je vektor $\vec{w}$ lineární kombinací vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

   a) $\vec{w} = (-3; 0), \vec{a} = (0; 1), \vec{b} = (1; 4)$

   [ano; $\vec{w} = 12\vec{a} - 3\vec{b}$]

   b) $\vec{w} = (2; 0; 4), \vec{a} = (0; -2; 3), \vec{b} = (1; 0; 1)$

   [$\vec{w}$ není lineární kombinací $\vec{a}$ a $\vec{b}$]

9. Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů.

   a) $\vec{x}_1 = (1,0), \vec{x}_2 = (2,1), \vec{x}_3 = (-1,1)$

   [lineárně závislé]

   b) $\vec{x}_1 = (1,1,0), \vec{x}_2 = (0,2,2), \vec{x}_3 = (3,0,-3)$

   [lineárně závislé]

   c) $\vec{x}_1 = (1,1,0), \vec{x}_2 = (0,2,2), \vec{x}_3 = (3,0,3)$

   [lineárně nezávislé]

Literatura k tématu:

[1] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I.* SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87

[2] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. 405 stran. ISBN 80-86119-00-9

Kapitola 7

Matice

Po prostudování kapitoly budete umět:

- Realizovat operace s maticemi,
- stanovit hodnost matice,
- umět k dané matici určit matici inverzní.

Klíčová slova:

Matice, násobení matic, transponovaná matice, hodnost matice, inverzní matice, regulární a singulární matice.

Definice matice a typy matic

Definice 7.1 **Maticí A typu** m/n nazýváme obdélníkové schéma mn reálných čísel a_{ij}, kde

i= 1, 2, ..., m a $j = 1,2,\dots,n$ sestavených v m řádcích a n sloupcích, tj.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \;\; \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \|a; j\|.$$

a_{ij} je prvek matice stojící v i-tém řádku a j-tém sloupci

i je řádkový index

j je sloupcový index

i, j, m, n $\in$ N

a_{11}, a_{22}, ... jsou prvky, které leží na hlavní diagonále matice A

a_{1n}, a_{2n-1}, ... jsou prvky, které leží na vedlejší diagonále matice A

Řádky matice A lze považovat za n-členné řádkové vektory. Sloupce matice A lze považovat za m-členné sloupcové vektory.

Příklad Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1/2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 3/4 & -7 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matice je typu 3/4 (má 3 řádky a 4 sloupce). Číslo 5 je prvek a_{23}, protože stojí ve 2. řádku a 3. sloupci; tedy $a_{23} = 5$.

Prvky 2, 1, 0 leží na hlavní diagonále matice.

Prvky 4, 5, -7 leží na vedlejší diagonále matice.

Typy matic

- *Matice, která má stejný počet řádků jako sloupců $(m = n)$, se nazývá* ***čtvercová matice*** *řádu n.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{4} & 5 \end{pmatrix} \quad a \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

m = n = 2 m = n = 3

A a B jsou čtvercové matice; A je řádu 2, B je řádu 3.

- *Čtvercová matice, která má pod hlavní diagonálou samé nuly se nazývá* **horní trojúhelníková matice**.

  Příklad

  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ je horní trojúhelníková matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ je horní lichoběžníková matice}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ je horní stupňovitá matice}$$

(každý další řádek má na začátku více nul, než řádek předcházející)

- *Čtvercová matice, která má mimo hlavní diagonálu pouze nuly, se nazývá* **diagonální**.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ je diagonální matice řádu 3}$$

- *Diagonální matice s jedničkami na hlavní diagonále se nazývá* **jednotková matice**. *Budeme ji značit E.*

Příklad

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ je jednotková matice řádu 2}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ je jednotková matice řádu 3}$$

- *Matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule se nazývá* **nulová matice**, *značíme* $\|0\|$.

Příklad

$$\|\mathbf{0}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ je nulová matice typu 2/3}$$

Operace s maticemi

Definice 7.2 Říkáme, že matice **A, B jsou si rovny** a píšeme $A = B$, jsou-li téhož typu a jestliže $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechny uspořádané dvojice $(i; j)$.

Poznámka Prvky na odpovídajících místech jsou si rovny.

Příklad Zjistěte, pro která a, b$\in$R platí rovnost matic A a B, je-li

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & a-5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \quad a \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ b+1 & 3 \\ a+b & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení $A = B$ podle definice 7.2 když

$$\mathrm{b} + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{b} = -1$$

$$\mathrm{a} - 5 = 3 \Rightarrow \mathrm{a} = 8$$

$$\mathrm{a} + \mathrm{b} = 7 \qquad 8 - 1 = 7$$

Pro čísla $a = 8$ a $b = -1$ nastane rovnost $A = B$.

Definice 7.3 *Nechť* $c \in R$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{i,j} \in R,$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}, b_{i,j} \in R,$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}, c_{i,j} \in R.$$

Pak definujeme **násobení matice konstantou**

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix},$$

součet dvou matic

$$A + C = \begin{pmatrix} a_{11} + c_{11} & \dots & a_{1n} + c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + c_{m1} & \dots & a_{mn} + c_{mn} \end{pmatrix},$$

součin dvou matic

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \ldots & a_{11}b_{1s} + \ldots + a_{1n}b_{ns} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}b_{11} + \ldots + a_{mn}b_{n1} & \ldots & a_{m1}b_{1s} + \ldots + a_{mn}b_{ns} \end{pmatrix}.$$

Prvek $a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{1n}$ je **skalárním součinem** prvního řádu (řádkového vektoru) matice A a prvního sloupce (sloupcového vektoru) matice B, atd.).

Poznámky

- Sčítat a odčítat lze pouze matice stejného typu.
- Při násobení matice konstantou na typu matice nezáleží. Společný činitel **všech** prvků matice A lze vytknout před matici A.
- Násobit dvě matice mezi sebou můžeme jen tehdy, je-li počet sloupců prvního činitele roven počtu řádků druhého činitele.

Příklad Vypočtěte matici $X = 2A - 3B$,

$$\text{je-li } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení Užitím definice 7.3 postupně dostaneme

$$X = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -3 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 5 & -15 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad Spočítejte součiny AB a BA, když

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Zřejmě $AB \neq BA$.

Příklad Spočítejte součiny AB a BA, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \ a \ B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$A\,.B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$$

1/3 3/1 1/1

$$B\,.A = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -12 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3/1 1/3 3/3

Poznámky

- Jistě jste si všimli, že pro násobení matic neplatí komutativní zákon. Proto rozlišujeme násobení matice A maticí B zprava a zleva, tzn., že při násobení matic záleží na jejich pořadí.
- Je-li A čtvercová matice a E jednotková matice stejného řádu, pak platí

$$AE = EA = A.$$

- Na rozdíl od reálných čísel, kde $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ nebo $b = 0$, může se u matic stát, že $AB = \|0\|$ a přitom žádná z matic A, B není nulová.

Příklad Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ a \ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \|0\|$$

a přitom $A \neq \|0\|$ i $B \neq \|0\|$.

- Pokud $AB = BA$ hovoříme o **zámĕnných maticích**.

Transponovaná matice

Definice 7.3 Jestliže v dané matici A typu m/n vyměníme řádky za sloupce, přičemž ponecháme jejich pořadí, říkáme, že jsme matici **transponovali**. Značíme ji A^T a je typu n/m.

Příklad Určete k matici A matici transponovanou.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3/4 4/3

Poznámky

- Zřejmě platí $(A^T)^T = A$
- Jedině v případě, že matice B, resp. C, je čtvercová, může nastat případ $B^T = B$, resp. $C^T = -C$, tj. pro všechny prvky takové matice platí $b_{ij} = b_{ji}$, resp. $c_{ij} = -c_{ji}$.

V takovém případě nazýváme matici B **symetrickou maticí** a matici C **antisymetrickou maticí.**

Z rovnosti $c_{ij} = -c_{ji}$ plyne, že antisymetrická matice má v hlavní diagonále samé nuly.

Příklad

Matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ je symetrická.

Matice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ je antisymetrická.

Hodnost matice

Každé matici A lze přiřadit jisté důležité číslo, které nazýváme hodnost matice A, a značíme h, resp. h(A).

Definice 7.4 **Hodnost matice** je maximální počet jejích lineárně nezávislých řádků (sloupců).

Poznámka Pro nenulovou matici je $h \in \mathbb{N}$, pro nulovou matici $h = 0$.

Věta 7.1 *Hodnost matice se nezmění,*

- *když zaměníme pořadí řádků*
- *když libovolný řádek vynásobíme libovolnou nenulovou konstantou*
- *když jeden řádek přičteme k řádku jinému*
- *když vynecháme řádek, který je lineární kombinací ostatních (tj. nulový, stejný s jiným řádkem, násobek jiného řádku)*

Věta 7.2 Hodnost matice je rovna hodnosti matice k ní transponované.

Důsledek Řádková hodnost matice je rovna její sloupcové hodnosti.

Poznámka Je-li h hodnost matice znamená to, že mezi řádky této matice existuje h lineárně nezávislých řádků a každý další řádek je jejich lineární kombinací – tedy $h \leq m$. Provedeme-li analogickou úvahu pro sloupce, pak $h \leq n$.

Důsledek $h \leq min\ \{\text{m; n}\}$.

Věta 7.3 Hodnost horní trojúhelníkové (lichoběžníkové, stupňovité) matice je rovna počtu nenulových řádků této matice.

Hodnost matice zpravidla určujeme tak, že danou matici upravíme „dovolenými“ úpravami, které nemění její hodnost, na horní trojúhelníkový, lichoběžníkový nebo stupňovitý tvar. Hodnost matice je pak rovna počtu nenulových řádků upravené matice. Jak důležitá je hodnost matice uvidíme v kapitole o řešení soustav lineárních rovnic.

Poznámka Úpravy matic, které nemění její hodnost, budeme nazývat **ekvivalentní úpravy**.

Definice 7.5 Dvě matice A a B se nazývají **ekvivalentní**, mají-li stejnou hodnost a stejný počet sloupců.

Zápis: A~B.

Příklad Určete hodnost matice

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Řešení

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & -1 & -6\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & -1 & -6\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

Hodnost matice $h(A)=3$.

Příklad Určete hodnost matice $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\\ -3 & 4\\ 1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$.

Řešení

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\\ -3 & 4\\ 1 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\\ 2 & 1\\ -3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -4\\ 0 & -1\\ 0 & 7\\ 0 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Hodnost matice $h(A)=2$.

Inverzní matice a její výpočet

Sčítání a násobení matic má některé analogické vlastnosti, jako sčítání a násobení reálných čísel.

Např. v případě sčítání matic existuje nulová matice $\|0\|$ tak, že A + $\|0\|$ = A a existuje opačná matice $-A$ tak, že $A+(-A)=\|0\|$. Nabízí se otázka: Existuje v případě násobení matic k matici A nějaká matice X taková, že platí $AX=E$? Odpověď dává následující věta.

Definice 7.6 Nechť A, X, E jsou čtvercové matice řádu n. Jestliže platí $AX=E$, pak X nazýváme **inverzní matice k matici A** a značíme ji A^{-1}.

Poznámka Pro inverzní matici platí

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Příklad Ověřte, zda matice A^{-1} je inverzní k matici A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Ověříme, zda platí vztah $A^{-1}A = E$, $A^{-1}A = E$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Matice A^{-1} je inverzní maticí k matici A.

Definice 7.7 Nechť A je čtvercová matice řádu n.

Je-li h (A) = n, nazývá se A **regulární matice**, je-li h (A)<n, nazývá se A **singulární matice**.

Poznámka V kapitole 8 se dozvíme, že při určování, zda je matice regulární či singulární, můžeme využít výpočtu jejího determinantu.

Věta 7.4 *Ke čtvercové matici A existuje jednoznačně určená inverzní matice A^{-1}, právě když je matice A regulární.*

Poznámka Pro čtvercovou matici A jsou ekvivalentní výroky:

a) matice A je regulární
b) determinant matice A je roven nule (detA = O)
c) k matici A existuje inverzní matice A^{-1}

Některé vlastnosti inverzních matic:

- je-li A regulární, pak A^{-1} je rovněž regulární
- $(A^{-1})^{-1} = A$

Inverzní matici můžeme vypočítat dvojím způsobem:

1. Úpravou matice A na jednotkovou matici E.
2. Využitím adjungované matice (viz kapitola 8).

1. Matici A převedeme úpravami z věty 7.1 na jednotkovou matici E a současně týmiž úpravami převedeme matici E na matici A^{-1}.

$$\mathrm{A} \to \mathrm{E} \ \text{ a } \mathrm{E} \to \mathrm{A}^{-1}$$

Upozornění Při výpočtu inverzní matice je třeba použít buď pouze řádkové nebo pouze sloupcové úpravy.

Příklad K matici $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ určete inverzní matici A^{-1}.

Řešení Nejprve zjistíme, zda je matice regulární

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

h (A) = 2 = n $\Rightarrow$ matice A je regulární, lze k ní podle věty 7.4 určit jednoznačně inverzní matici A^{-1}.

A $\downarrow$ E

A	E
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$
E	A^{-1}

E $\downarrow$ A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Sami ověřte, že AA^{-1} = E.

Příklad Určete inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení: Buď užijeme schématu uvedeného v předcházejícím příkladě nebo matici A rozšíříme o jednotkovou matici E a pomocí ekvivalentních úprav je upravujeme tak, aby $(A/E) \approx (E/A^{-1})$. Zřejmě, h (A) = 3 = n, protože A je horní trojúhelníková matice. Inverzní matice A^{-1} existuje jednoznačně. 3. řádek opíšeme. Od trojnásobku 1. řádku odečteme dvojnásobek 3. řádku. Od trojnásobku 2. řádku odečteme dvojnásobek 3. řádku.

1. řádek dělíme 3, 2. řádek dělíme 6, 3. řádek dělíme 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Sami ověřte, že $A\,A^{-1} = E$.

Matice-obdélníkové schéma. Matice můžeme mezi sebou sčítat, násobit skalárem. Mezi sebou lze násobit pouze takové matice, pro které počet sloupců prvního činitele je roven počtu řádků v druhém činiteli. Součin matic není komutativní. Vyměníme-li v matici řádky za sloupce v témž pořadí, obdržíme matici transponovanou. Hodnost matice je rovna počtu nenulových řádků v odpovídající horní trojúhelníkové matici. K regulární matici existuje jednoznačně určená matice inverzní.

1. Vysvětlete, jak byste postupovali při určování hodnosti matice?
2. Jakou maximální hodnost může mít matice typu 8/3?

1. Když $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ spočtěte}$$

a) $A - B$

b) $A.B$

c) $A.C$

d) $C.A$

$$\left[\text{a)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & -4 \\ -3 & 0 & -12 \end{pmatrix} \text{ c) Nelze násobit, d) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 11 \end{pmatrix} \right]$$

3. Určete hodnost matice.

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $[h = 2]$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}$ $[h = 3]$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 10 \\ -3 & -9 & 6 & -15 \\ 5 & 15 & -10 & 25 \end{pmatrix}$ $[h = 1]$ $B \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ $[h = 2]$

- $A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 8 & -8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ $[h = 3]$ $C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & -3 & 4 & 8 & 9 \\ 6 & -2 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ $[h = 2]$

4. K matici A určete inverzní matici A^{-1}.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right]$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\left[A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -9 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right]$

Literatura k tématu:

[1] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I.* SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87

[2] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1).* Ekopress Praha, 1997. 405 stran. ISBN 80-86119-00-9..

Kapitola 8

Determinanty

Po prostudování kapitoly budete umět:

- správně chápat pojem determinant čtvercové matice,
- vypočítat determinant pomocí křížového pravidla a Sarrusova pravidla,
- vypočítat determinant užitím Laplaceova rozvoje,
- využít determinanty při určování inverzní matice.

Klíčová slova:

Determinant, křížové pravidlo, Sarrusovo pravidlo, Laplaceův rozvoj, algebraický doplněk prvku, adjungovaná matice, inverzní matice.

Definice determinantu a jeho vlastnosti

Definice 8.1 **Determinant** je zobrazení z množiny čtvercových matic do množiny reálných čísel. Značíme jej $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A}$, $|\boldsymbol{A}|$ nebo $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Definice 8.2 Determinantem čtvercové matice $A = (a_{ij})$ typu n/n nazýváme součet

$$\sum_{k = (k_1, k_2, \dots, k_n)} (-1)^{p_k} a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$$

$n!$ součinů, v němž se sčítá přes všechny permutace $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ množiny $\{1,2, \dots, n\}$ sloupcových indexů a v němž p_k značí počet inverzí v permutaci k.

Poznámka Determinant čtvercové matice řádu n je roven $n!$ součinů n prvků této matice takových, že v každém součinu je právě jeden prvek z každého řádku a právě jeden prvek z každého sloupce. Každý součin má tvar $a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}$ a je navíc opatřen znaménkem plus nebo mínus, které závisí na tom, ze kterých řádků a sloupců byly prvky do součinu vybrány.

Věta 8.1 (Vlastnosti determinantů.)

- *Jestliže zaměníme mezi sebou dva řádky, hodnota determinantu se změní na opačnou.*
- *Jestliže jeden řádek determinantu vynásobíme konstantou c, pak hodnota determinantu je c násobkem původní hodnoty.*
- *Jestliže k jednomu řádku determinantu přičteme libovolnou kombinaci jiných řádků, hodnota determinantu se nezmění. (Sečtení dvou řádků determinantu nezmění hodnotu determinantu.)*
- *Hodnota determinantu je nulová, když některé řádky determinantu jsou lineárně závislé (např. když jeden řádek determinantu je nulový, dva řádky determinantu jsou shodné, jeden řádek determinantu je c násobkem jiného).*

Důsledek. Hodnota determinantu se nezmění přičtením jednoho řádku nebo c-násobku řádku k jinému řádku.

Výpočet hodnoty determinantů

Věta 8.2 *Determinanty 2. řádu počítáme* **křížovým pravidlem**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Příklad Spočítejte hodnotu determinantu $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Řešení

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 2 = -3 + 2 = -1$$

Věta 8.3 *Determinanty 3. řádu počítáme* **Sarrusovým pravidlem**.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

Poznámka Abychom žádný součin nevynechali a výpočet si usnadnili postupujeme takto: Pod determinant opíšeme první dva řádky (nebo za determinant opíšeme první dva sloupce). Vynásobíme prvky umístěné na hlavní diagonále a na rovnoběžkách s ní, přičemž znaménka součinů ponecháme. Pak vynásobíme prvky umístěné na vedlejší diagonále a na rovnoběžkách s ní, přičemž znaménka součinů změníme na opačná. Všechny součiny sečteme.

Příklad Spočítejte hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Řešení

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot 0 -$$
$$\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}$$
$$-[3 \cdot (-3) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot 2] = 6 + 6 + 0 - [0 + 0 + 4] = 12 - 4 = 8$$

Věta 8.3 *Hodnota determinantu příslušného k trojúhelníkové matici je rovna součinu prvků na hlavní diagonále.*

Příklad Pomocí vlastností determinantů spočítejte hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Řešení Úprava na trojúhelníkový tvar:

1. řádek opíšeme; ke druhému řádku přičteme (-2)-násobek 1. řádku; 3. řádek opíšeme.

První dva řádky opíšeme. Ke 3. řádku přičteme 2. řádek

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-8) = 8$$

Laplaceův rozvoj determinantu

Laplaceův rozvoj determinantu je univerzální metoda pro výpočet determinantů libovolného řádu. Na výpočet determinantů řádu $n \geq 4$ již nemáme k dispozici nějakou přehlednou analogii (schéma) jako jsme měli křížové nebo Sarrusovo pravidlo pro determinanty řádu $n = 2$ nebo $n = 3$. K výpočtu determinantů řádu $n \geq 4$ používáme Laplaceův rozvoj. Nejprve uvedeme algebraický doplněk prvku a nadefinujeme adjungovanou matici.

Definice 8.3 Nechť A je čtvercová regulární matice řádu n. Součin

$$(-1)^{i+j} A_{ij},$$

kde A_{ij} je determinant matice, která vznikne z A vynecháním i- tého řádku a j–tého sloupce, se nazývá **algebraický doplněk** prvku a_{ij} matice A.

Příklad Určete algebraický doplněk prvku a_{22} a a_{32} matice $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Řešení Podle definice 8.3 je doplněk prvku a_{22} označený $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot (1 - 0) = 1$ a doplněk a_{32} označený $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5 - 0) = -5$.

Definice 8.4 **Adjungovaná matice** k matici A, značíme ji adj$A$, je matice sestavená z algebraických doplňků prvků matice A a to takto:

$$\text{Je-li } A = (a_{ij}) \Longrightarrow \text{adj}A = (A_{ji})$$

Poznámka Algebraické doplňky prvků matice A jsou umístěny „transponovaně“ (překlopeně podle hlavní diagonály).

Adjungovanou matici užijeme při výpočtu inverzní matice.

Příklad Určete adjungovanou matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení Spočteme $A_{11} = 2, A_{12} = 2, A_{21} = -1, A_{22} = 1$. Pak adj$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Věta 8.4 (Laplaceův rozvoj determinantu.) *Determinant se rovná součtu součinů prvků kteréhokoliv jeho řádku (sloupce) s příslušnými algebraickými doplňky.*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, (-1)^{i+j} A_{ij}$$

popř.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, (-1)^{i+j} A_{ij}$$

Poznámka Determinanty rozvíjíme přednostně podle prvků toho řádku nebo sloupce, ve kterém je nejvíce nul. Úpravami, neměnícími hodnotu determimantu, je možné dosáhnout toho, aby v některém řádku nebo sloupci byl nejvýše jeden nenulový prvek.

Příklad Spočítejte hodnotu determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Řešení Rozvojem podle prvků 3. řádku dostaneme

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-2) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 1 \cdot (0 - 6) - 2 \cdot (-3 + 2) = 6 + 2 = 8$$

Užití determinantů

1) K určení, zda je matice regulární či singulární.

Věta 8.5 *Čtvercová matice A je regulární, právě když* $\det A \neq 0$.

Poznámka Čtvercová matice A je singulární, právě když $\det A = 0$

Příklad Vyšetřete, zda matice A je regulární či singulární.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 - (16 - 6) = 10 - 10 = 0$$

Matice A je singulární, protože $\det A = 0$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - (2 + 3) = 1 - 5 = -4 \neq 0$$

Protože $\det A \neq 0$, je matice A regulární

2) K určení lineární závislosti či nezávislosti vektorů.

Mějme m vektorů o m složkách. Považujme vektory za řádkové vektory matice a sestavme z nich čtvercovou matici A. Pak platí:

Je-li $\det A \neq 0$, pak jsou řádky matice A lineárně nezávislé a také vektory jsou lineárně nezávislé.

Je-li $\det A = 0$, pak jsou řádky matice A a tedy i vektory lineárně závislé.

Příklad Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{a} = (1; 2; 3), \vec{b} = (-1; 0; 2), \vec{c} = (2; 1; 2)$ lineárně závislé.

Řešení Složky vektorů napíšeme jako řádky matice a vypočteme jeji determinant.

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 8 - (2 - 4) = 5 + 2 = 7 \neq 0$$

Vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně nezávislé, protože $\det A \neq 0$.

3) K výpočtu inverzní matice.

Věta 8.6 *Když A je čtvercová regulární matice matice řádu n, pak pro inverzní matici platí*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathrm{adj}A.$$

Příklad Určete inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení Inverzní matici spočteme na základě věty 8.6. Adjungovaná matice k matici A je

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 6$$

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}A}{|A|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Poznámka Připomínáme, že inverzní matici lze počítat také tak, že matici rozšířenou o jednotkovou matici upravujeme pomocí ekvivalentních úprav tak, aby $(A|E) \approx (E|A^{-1})$.

4) K řešení soustav rovnic (viz. kapitola 9).

Σ

Determinant přiřazuje čtvercové matici určité reálné číslo. Výpočet determinantů 2. řádu provádíme křížovým pravidlem, 3. řádu Sarrusovým pravidlem a determinantů vyšších řádů Laplaceovým rozvojem. Determinant se využívá při výpočtu inverzní matice, při určování regulární a singulární matice, při vyšetřování lineární závislosti vektorů, při řešení soustav rovnic. Rozlišujeme: matice má hodnost, determinant má hodnotu.

?

1. Co můžete říct o hodnotě determinantu trojúhelníkové matice a o hodnotě determinantu transponované matice?
2. Ke které matici lze spočítat matici inverzní?

3. Na příkladu demonstrujte určení hodnoty detrminantu prostřednictvím jeho vlastností.
4. Ověřte, že inverzní matice k jednotkové matici 3. řádu je ta samá matice.
5. Určete hodnotu determinantu.
   - $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$ $[1]$
   - $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ $[4]$
   - $\begin{vmatrix} 1/3 & -5/6 & 1/4 & -1/15 \\ 1/2 & -1/2 & -1/5 & 1/3 \\ -2/3 & -5/6 & -1/2 & 2/3 \\ -1/2 & 1/3 & 3/10 & -2/5 \end{vmatrix}$ $\left[-\frac{1}{2160}\right]$
6. Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně závislé či lineárně nezávislé.

   $$\vec{a} = (2,4,-3,-1), \vec{b} = (-2,-4,3,2), \vec{c} = (4,8,-6,0), \vec{d} = (1,2,3,-1)$$

   [lineárně závislé]
7. Zjistěte, zda je matice singulární či regulární.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ [singulární]
8. Určete inverzní matici k matici
   - $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ [nelze - matice není regulární]
   - $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ [nelze - matice není čtvercová]

Literatura k tématu:

[1] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87

[2] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. 405 stran. ISBN 80-86119-00-9

Kapitola 9

Řešení soustav lineárních rovnic

Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozhodnout o existenci a počtu řešení soustavy lineárních rovnic,
- řešit soustavu Gaussovou eliminační metodou,
- řešit soustavu Cramerovým pravidlem.

Klíčová slova:

Homogenní a nehomogenní soustava lineárních rovnic, ekvivalentní úpravy, Frobeniova věta, volné neznámé, parametr, Gaussova eliminační metoda, Cramerovo pravidlo.

Definice soustavy a jejího řešení

Definice 9.1 Lineární rovnicí o n neznámých budeme rozumět rovnici tvaru

$a_1x_1 + a_2x_2 +...+a_nx_n = b,$ i=1, 2, ..., n,

kde x_i jsou **neznámé**, a, b∈R pevně zvolená čísla.

Řešením rovnice nazveme uspořádanou n-tici čísel ($u_1, u_2, ..., u_n$), které po dosazení za neznámé x_i přemění rovnici v rovnost.

Příklad Řešením rovnice

$$2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -3$$

je trojice čísel $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 0$, což můžeme zapsat, také jako vektor $\vec{u} = (-3, 1, 0)$.

Poznámka Rovnici z definice 9.1 můžeme zapsat i pomocí matic. Uvažujme matici A typu 1/n a matici X typu n/1, tedy

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n\ )\ a\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{x} \text{ sloupcový vektor}$$

1/n n/1

Potom maticová rovnice $AX = b$, resp. $A\,\vec{x} = b$ je jen jiným zápisem rovnice z definice 9.1.

Definice 9.2 Systém rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 +...+a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +...+a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +...+a_{mn}x_n = b_m$$

kde a_{ij}, b_j jsou reálná čísla, i=1, 2, ..., m, j=1, 2, ..., n a x_i neznámé, se nazývá **soustava m lineárních rovnic o n neznámých**, stručně **soustava lineárních rovnic**.

a_{ij} ∈R jsou koeficienty, b_i ∈R jsou absolutní členy rovnic nebo také „pravé strany“ rovnic.

Jsou-li b_i=0 pro všechna $i = 1, 2, ..., m$ nazývá se soustava **homogenní**.

Je-li aspoň jedno $b_i \neq 0$, pak se soustava nazývá **nehomogenní**.

Řešením soustavy nazýváme každou uspořádanou n-tici reálných čísel $u_1, u_2, \dots, u_n$ [tedy aritmetický vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$], které po dosazení za neznámé x_i změní soustavu rovnic v soustavu m rovností.

Poznámka Řešením rozumíme i početní postup, jímž takové n-tice (vektory) hledáme.

Maticový zápis soustavy rovnic

$$A\vec{x} = \vec{b}, kde\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

m/n n/1 m/1

Matici A, která je sestavená z koeficientů u neznámých nazýváme **matice soustavy**.

Přidáme-li k matici A za svislou čáru sloupec pravých stran, obdržíme **rozšířenou matici soustavy**, označíme ji A_R.

$$A_R = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic

Definice 9.3 Dvě soustavy se nazývají **ekvivalentní,** mají-li tytéž množiny řešení. Značíme ≈.

Poznámka Počet neznámých musí být u obou soustav stejný, avšak počet rovnic nemusí být nutně stejný.

Příklad Soustava rovnic

$x - y = 1$ je ekvivalentní se soustavou $x - y = 1$

$2x + 3y = 7$ $20x + 30y = 70$

$200x + 300y = 700$

Jediným řešením obou soustav je aritmetický vektor $\vec{u} = (2, 1)$ neboli $x = 2$ a $y = 1$.

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic jsou takové úpravy soustavy, při nichž z jedné soustavy dostaneme soustavu s ní ekvivalentní. Ekvivalentní úpravou se množina řešení nemění.

Ekvivalentní úpravy soustavy rovnic jsou:

- výměna pořadí rovnic
- násobení jedné rovnice nenulovým reálným číslem
- přičtení libovolného nenulového k-násobku jedné rovnice k jiné rovnici
- vynechání rovnic tvaru $0 = 0$

Existence řešení

Věta 9.1 (Existence řešení-**Frobeniova věta.**) Soustava lineárních rovnic má alespoň jedno řešení, právě když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Zřejmě platí $h(A) = h(A_R)$ nebo $h(A_R) = h(A) + 1$; tedy vždy $h(A) \leq h(A_R)$.

Poznámka Homogenní soustava má vždy řešení, protože přidání nulového sloupce pravých stran hodnost matice nezmění.

Věta 9.2 Pokud soustava lineárních rovnic má řešení a hodnost matice soustavy je rovna počtu neznámých, pak toto řešení je jediné.

Pokud soustava lineárních rovnic má řešení a hodnost matice soustavy je menší, než počet neznámých, pak soustava má nekonečně mnoho řešení. Počet volných neznámých, resp. parametrů je roven $n - h(A)$.

Poznámka Jestliže má homogenní soustava jediné řešení, pak se jedná o řešení triviální.

Příklad Rozhodněte, zda daná soustava má řešení.

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Řešení

$a)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 8 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & -11 \end{array}\right)$

$h(A) = 3,\ h(A_R) = 3,\ n = 3.$

$h(A) = h(A_R) = n$ - soustava má právě jedno řešení.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $h(A) = 2,\ h(A_R) = 2,\ n = 3.$

$h(A) = h(A_R) < n$ - soustava má nekonečně mnoho řešení. Jedna neznámá je volná (jeden parametr).

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $h(A) = 2,\ h(A_R) = 3,\ n = 3.$

$h(A) \neq h(A_R)$ - soustava nemá řešení.

Rozlišujeme:

- **Obecné řešení** soustavy je vztah popisující všechna řešení soustavy; obsahuje jeden nebo více parametrů.
- **Partikulární řešení** soustavy obdržíme z obecného řešení, dosadíme-li za parametry konkrétní reálná čísla.
- **Základní řešení** soustavy je partikulární řešení, ve kterém jsou parametry rovny nule.

Gaussova eliminační metoda

Jednou z metod, jak určit řešení soustavy rovnic je Gaussova eliminační metoda, která spočívá v provádění ekvivalentních úprav rozšířené matice soustavy.

Smyslem úprav je převést matici na horní trojúhelníkový nebo lichoběžníkový či stupňovitý tvar. Z takto upravené matice snadno určíme hodnost $h(A)$ matice soustavy a $h(A_R)$hodnost rozšířené matice soustavy a podle **Frobeniovy věty** zjistíme, zda má soustava řešení. Pokud ano, pak porovnáním h a n (hodnosti a počtu neznámých) určíme počet řešení. Řešení pak získáme zpětnou eliminací.

Příklad Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 \quad &= -4 \end{aligned}$$

Je to nehomogenní soustava tří rovnic o třech neznámých. Počet rovnic m=3, počet neznámých n=3.

Řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{h} = \mathrm{h}' = 2 \Rightarrow$ soustava má alespoň jedno řešení

$h(A) = h(A_R) = 2 < n = 3$ - soustava má nekonečně mnoho řešení. Počet parametrů je $n - h(A) = 1$.

Za volnou neznámou vybereme proměnnou x_3. Zpětnou eliminací spočteme obecné řešení.

Poslední nenulový řádek matice přepíšeme jako rovnici $-\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{x}_3 = 2$

Položme $x_3 = t, t \in R$, t je parametr, dosadíme do rovnice a vypočtěme x_2.

$$-\mathrm{x}_2 + 2\mathrm{t} = 2 \Rightarrow \mathrm{x}_2 = 2\mathrm{t} - 2$$

První řádek přepíšeme do rovnice $\mathrm{x}_1 - 2\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 = -1$, dosadíme za x_2 a x_3 a vypočteme x_1.

$$\mathrm{x}_1 - 2\,(2t - 2) + t = -1 \Rightarrow \mathrm{x}_1 = 3t - 5$$

Obecné řešení soustavy je vektor $\vec{x} = (3t - 5, 2t - 2, t)$; $t \in R$.

Když za t dosadíme určitou konstantu, obdržíme partikulární řešení.

Partikulární řešení pro $t = 2$: $\vec{u} = (3.2 - 5, 2.2 - 2, 2)$

$$\vec{u} = (1,2,2)$$

Základní řešení (t=0): $\vec{w} = (-5, -2, 0)$

Příklad Řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 0$$

$$y + z = 1$$

$$x + y - z = 1$$

nehomogenní soustava, $m = 3, n = 3$

Řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$h(A) = h(A_R) = n = 3 \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení. Zpětnou eliminací získáme:

$$-2z = 1 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$$y + z = 1; y - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$x + y + z = 0; x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -1$$

Řešením soustavy je vektor $\vec{u} = \left(-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Povšimneme si geometrické interpretace. Každá rovnice dané soustavy je rovnicí roviny v trojrozměrném prostoru. Řešením soustavy hledáme společné body tří rovin. V našem případě mají dané roviny jediný společný bod $P = \left[-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Příklad Řešte soustavu rovnic

$$x + y + z = 1$$

$$x - y + 2z = 1$$

$$2x \quad\quad + 3z = 0$$

nehomogenní soustava, $m = 3, n = 3$

Řešení

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$h(A) = 2, h(A_R) = 3, h(A) \neq h(A_R) \Rightarrow$ soustava nemá řešení.

Příklad Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \quad = 0$$

nehomogenní soustava, $m = 2, n = 4$

Řešení

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -10 \end{array}\right)$$

$h(A) = h(A_R) = 2 \Rightarrow$ soustava má alespoň jedno řešení

$n = 4 > 2 = h(A) \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na

$n - h(A) = 4 - 2 = 2$ parametrech.

Zpětnou eliminací vypočítáme obecné řešení.

$-x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -10$; položme $x_3 = r$ a $x_4 = s$; $r, s \in R$; r a s jsou parametry

$$-x_2 + 2r + 2s = -10$$

$$x_2 = 10 + 2r + 2s$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5$$

$$x_1 - 10 - 2r - 2s + r - s = 5$$

$$x_1 = 15 + r - 3s$$

Obecné řešení: $\vec{x} = (15 + r - 3s, 10 + 2r + 2s, r, s)$; $r, s \in R$

Partikulární řešení pro $r = 1$ a $s = -1$: $\vec{z} = (13, 10, 1, -1)$

Základní řešení: $\vec{w} = (15, 10, 0, 0)$

Důsledky Frobeniovy věty pro homogenní soustavu rovnic:

1. Vždy $h(A) = h(A_R)$, protože připsáním sloupce pravých stran, což jsou samé nuly, se hodnost matice soustavy nezmění.
2. Poněvadž vždy $h(A) = h(A_R)$ má homogenní soustava vždy alespoň jedno řešení, a to triviální řešení, což je nulový vektor $\vec{o}$.
3. Je-li $h(A) = n$, pak má soustava pouze triviální řešení.
4. Je-li $h(A) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na $n - h(A)$ parametrech.
5. Je-li $m = n$, pak $|A| \neq 0$, právě když má soustava jen triviální řešení.
6. Je-li $m = n$, pak $|A| = 0$, právě když má soustava nekonečně mnoho řešení.

Poznámka Při řešení Gaussovou eliminační metodou pravé strany rovnic do matice nepíšeme, neboť výsledkem ekvivalentních úprav s nimi jsou opět nuly. Píšeme tedy jen matici soustavy.

Příklad Určete všechna řešení soustavy rovnic.

1.

$$3x + y + 2z = 0$$

$$2x + 3y - 5z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

homogenní soustava, m=n=3

Řešení

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}$$

$h(A) = h(A_R) = 3 \Rightarrow n$ soustava má právě jedno řešení

Zpětnou eliminací dostaneme

$$-29z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$y - 7z = 0\,; y - 7.0 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x + y + z = 0\,; x + 0 + 0 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Soustava má pouze triviální řešení: $\vec{o} = (0, 0, 0)$

2.
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$$
$$4x_1 + 7x_2 + x_3 = 0$$
$$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0$$

Řešení

homogenní soustava, $m = 4 = n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$h(A) = h(A_R)$ =2; $n >\ h(A)$; $n - h(A) = 4 - 2 = 2$

Soustava má nekonečně mnoho řešení závislých na dvou parametrech.

Druhý řádek matice napíšeme do rovnice.

$-x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0$; položme $x_4 = u\ a\ x_3 = v$, kde $u, v \in R$; u, v jsou parametry

$$-x_2 - 3v + 4u = 0$$
$$x_2 = 4u - 3v$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + 2(4u - 3v) + v - u = 0$$
$$x_1 + 8u - 6v + v - u = 0$$
$$x_1 = 5v - 7u$$

Obecné řešení: $\vec{x} = (5v - 7u, 4u - 3v, v, u); u, v \in R$

Partikulární řešení pro $v = 2$ a $u = -1$; $\vec{w} = (17, -10, 2, -1)$

Triviální řešení: $\vec{o} = (0, 0, 0, 0)$

Cramerovo pravidlo

Pokud je matice soustavy čtvercová, tzn., že počet rovnic je roven počtu neznámých, tj. $m = n$, lze matici řešit za určitého předpokladu i Cramerovým pravidlem.

Věta 9.3 (Cramerovo pravidlo) *Jestliže* A *je regulární matice řádu* n *, pak pro složky* $x_1, \ldots, x_n$ *vektoru řešení soustavy* $A\vec{x} = \vec{b}$ *platí*

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

kde $|A|$ *je determinant matice soustavy a determinant* $|A_i|$ *vznikne z* $|A|$ *tak, že v něm* i *-tý sloupec nahradíme vektorem pravých stran* $\vec{b}$ *.*

Příklad *Řešte soustavu rovnic*

$$x - y + 2z = 2$$

$$4x - 6y + 7z = 5$$

$$2x \qquad + z = 3$$

nehomogenní soustava; $m = n = 3$

Řešení Zjistíme, zda je matice soustavy A regulární, tj. zda její determinant je různý od nuly.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 14 - (-24 - 4) = -20 + 28 = 8$$

$|A| \neq 0 \Longrightarrow$ matice soustavy je regulární, soustavu lze řešit Cramerovým pravidlem a soustava má právě jedno řešení, které určíme podle vzorce uvedeného ve větě 9.3.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -6 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 8$$

Řešení: $\vec{u} = (1,1,1)$

Příklad Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &= 0 \\ x_1 \quad\quad + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$ homogenní soustava $\mathrm{m} = \mathrm{n} = 3$

Řešení
K řešení soustavy užijeme Cramerovo pravidlo.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,\ |A| \neq 0 \Longrightarrow$ soustavu lze řešit Cramerovým pravidlem, soustava má právě jedno řešení.

Spočteme

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Na závěr spočteme jednotlivé složky řešení $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 0, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 0, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 0,$

Soustava má jen triviální řešení.

Řešení: $\vec{o} = (0,0,0,)$

Pro srovnání vyřešíme soustavu i Gaussovou metodou.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0| & 0 \\ 1 & 0 & 1| & 0 \\ 1 & 1 & 1| & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0| & 0 \\ 0 & 1 & -1| & 0 \\ 0 & 0 & -1| & 0 \end{pmatrix}$$

$h(A) = h(A_R) = 3 = n$ - soustava má jediný vektor řešení. Je to nulový vektor $\vec{o} = (0,0,0,)$.

Řešení soustavy užitím inverzní matice

Soustavu rovnic, jejíž matice soustavy A je čtvercová a regulární, můžeme řešit také užitím inverzní matice A^{-1}.

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{je matice soustavy;}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{matice neznámých a } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{matice pravých stran.}$$

Soustavu n lineárních o n neznámých vyjádříme maticovou rovnicí.

$$AX = B$$

Pokud A je regulární matice, tj. $|A| \neq 0$, má maticová rovnice právě jedno řešení, které obdržíme takto:

Maticovou rovnici $AX = B$ vynásobíme zleva inverzní maticí A^{-1},

$$\underbrace{A^{-1}A}_{E}X = A^{-1}B$$

Potom $X = A^{-1}B$.

Příklad Řešte soustavu rovnic

$$x + 3y - z = 0$$

$$2x - y + z = 3$$

$$-x + 2y + 2z = 1$$

nehomogenní soustava, $m = n = 3$

Řešení

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Longrightarrow$ A je regulární matice, existuje k ní inverzní matice A^{-1} a soustava má právě jedno řešení

Soustavu lze zapsat pomocí matic $AX = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{inverzní matice } A^{-1} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -4 & -8 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Potom } X = A^{-1}B = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -4 & -8 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vypočítejte inverzní matici A^{-1} pomocí $adj\ A$ nebo pomocí jednotkové matice E.

Řešení: $\vec{u} = (1,0,1)$

Poznámka Je-li $|A| = O$ (matice soustavy je singulární), pak soustavu nelze řešit Cramerovým pravidlem. V tom případě použijeme Gaussovu eliminační metodu.

Poznámka V případě dvou rovnic pro dvě proměnné každá rovnice soustavy představuje přímku v rovině. Mohou nastat tyto tři situace:

- Pokud se přímky protínají, soustava má jediné řešení (řešením soustavy jsou souřadnice jejich průsečíku).
- Jestliže přímky splývají, soustava má nekonečně mnoho řešení (řešením jsou souřadnice bodů, které leží na přímce).
- Když jsou přímky rovnoběžné různé, soustava nemá řešení.

Σ

Matice a determinanty slouží jako nástroj k řešení soustav lineárních rovnic. Pokud je hodnost matice soustavy rovna hodnosti matice rozšířené, soustava má řešení. Řešení je jediné, když je tato společná hodnost rovna počtu neznámých. Vlastní řešení je možné získat Gaussovou metodou. Pokud má soustava jediné řešení, a matice soustavy je čtvercová a regulární, je možné použít také Cramerovo pravidlo.

?

1. Soustavu dvou rovnic pro dvě proměnné a její řešení interpretujte geometricky.
2. Kolik řešení může mít homogenní soustava?

3. Kdy lze použít Gaussovu eliminační metodu a kdy Cramerovo pravidlo?

4. Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která nemá žádné řešení. Situaci nakreslete.

5. Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která má jediné řešení. Situaci nakreslete.

6. Uveďte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která má nekonečně mnoho řešení. Situaci nakreslete.

7. Rozhodněte o řešitelnosti soustavy

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 &= 0 \\ 9x_1 - 14x_2 + 28x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

[a) nemá řešení b) má nekonečně mnoho řešení (dvě volné neznámé)]

8. Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= -1 \\ x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4&=0\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4&=0\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4&=0\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a)\ \vec{x}=(3,1,1);\ b)\vec{x}=(2-t,1-t,2+t,t),t\in R;\\ c)\ \vec{x}=(13t-13s,19t-20s,17t,17s)\ t,s\in R \end{bmatrix}$$

9. Cramerovým pravidlem řešte soustavu

a) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3&=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3&=11\\ 3x_1+4x_2-2x_3&=7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4&=4\\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4&=-4\\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4&=6\\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4&=6 \end{aligned}$$

[nelze řešit Cramerovým pravidlem b) (2,0,0,0)]

10. Vyřešte soustavu a situaci nakreslete

a) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2&=-1\\ x_1+2x_2&=8 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1-x_2&=-1\\ -6x_1+3x_2&=-24 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1-\quad x_2&=-1\\ x_1-0{,}5x_2&=0{,}5 \end{aligned}$$

[a) (2, 3) b) ((t-1)/2, t) c) nemá řešení]

Literatura k tématu:

[1] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I.* SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87

[2] KLŮFA, J., COUFAL, J. *Matematika pro ekonomy (1)*. Ekopress Praha, 1997. 405 stran. ISBN 80-86119-00-9.

Kapitola 10

Vlastní čísla a vlastní vektory

Po prostudování kapitoly budete umět:

- identifikovat vlastní čísla a vlastní vektory,
- spočítat vlastní čísla a vlastní vektory,
- převést matici na Jordanův tvar.

Klíčová slova:

Vlastní číslo, vlastní vektor, charakteristický polynom, podobné matice, matice v Jordanově tvaru.

Definice vlastních čísel a vlastních vektorů

Definice 10.1 Nechť A je čtvercová matice řádu n. Pokud pro n-rozměrný vektor $\vec{v}$ a číslo λ má soustava

(10. 1) $$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

nenulové řešení, pak λ je **vlastní číslo** a $\vec{v}$ **vlastní vektor matice** A.

Poznámka: Soustavu (10. 1) lze přepsat na tvar

(10. 2) $$(A - \lambda I)\vec{v} = 0,$$

kde I je jednotková matice. Z tohoto vztahu je zřejmé, že řešíme homogenní soustavu, která má nenulové řešení právě když $det(A - \lambda I) = 0$.

Definice 10.2 Pro čtvercovou matici řádu n a číslo λ je

$$det(A - \lambda I) = (-1)^n c_n \lambda^n + (-1)^{n-1} c_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + c_1 \lambda + c_0$$

tzv. **charakteristický polynom** matice A.

Věta 10.1 *Každá čtvercová matice řádu n má n vlastních čísel, která jsou kořeny charakteristického polynomu (10. 2).*

Příklad Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Určíme kořeny charakteristického polynomu

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$$ jsou vlatní čísla matice A.

Dosazením vlastních čísel do rovnice (10.2) získáme homogenní soustavy pro výpočet vlastních vektorů:

Pro $\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = (r, 0)^T, r \in R.$

Pro $\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_2} = (t, 2t)^T, t \in R.$

Vlastnosti vlastních čísel

Definice 10.3 Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice. Řekneme, že A je **symetrická matice**, pokud $a_{ij} = a_{ji}$. Matici $A^H = (a_{ij}^H)$ nazveme **Hermiteovsky transponovanou**, pokud a $a_{ij}^H = a_{ji}$.

Věta 10.2 *Když A je čtvercová regulární matice a λ je její vlastní číslo, pak*

- $\lambda(A^{-1}) = \left(\lambda(A)\right)^{-1}$
- $\lambda(A^k) = \left(\lambda(A)\right)^k$
- $\lambda(A^H) = \lambda(A)$

Věta 10. 3 *Když A je symetrická matice, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná a vektory, které odpovídají různým vlastním číslům jsou ortgonální.*

Příklad Spočítejte vlastní čísla a vlastní vektory symetrické matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ověřte, zda vlastní vektory jsou ortogonální.

Řešení:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = < \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}$ - vlastní čísla matice A, která jsou navzájem různá

$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$:

Pro $\lambda_1 = 3$ máme $\begin{pmatrix} -1 & 1\ 0 \\ 1 & -1\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1\ 0 \\ 0 & 0\ 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{v_1} = (r, r), r \in R$ je vlastní vektor.

Pro $\lambda_2 = 1$ máme $\begin{pmatrix} 1 & 1\ 0 \\ 1 & 1\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1\ 0 \\ 0 & 0\ 0 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{v_2} = (-t, t)$ je vlastní vektor.

Protože skalární součin $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (rt, t) \cdot (-rt, t) = 0$ jsou vektory $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ kolmé.

Věta 10.4 *Vlastní čísla diagonální nebo trojúhelníkové matice jsou rovna prvkům na hlavní diagonále.*

Příklad Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

Vlastní číslo $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$.

Spočteme vlastní vektory. Rozšířená matice soustavy $(A-\lambda I)\vec{v} = 0$ má

pro $\lambda_1 = 2$ tvar $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Odtud $\overrightarrow{v_1} = (0, r, 0)^T, r \in R$.

pro $\lambda_2 = -1$ máme $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = (0, 0, s)^T, s \in R$.

pro $\lambda_3 = 4$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_3} = (t, 3t, 5t)^T, t \in R$

Poznámka Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů může být u některých matic menší než je řád matice. Např.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ má trojnásobné vlastní číslo $\lambda = 2, \overrightarrow{v_1} = (1,0,0)^T, \overrightarrow{v_2} = (0,1,0)^T, \overrightarrow{v_3} = (0,0,1)^T$, jsou její vlastní vektory.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ má trojnásobné vlasní číslo $\lambda = 2$ a vlastní vektory $\overrightarrow{v_1} = (1,0,0)^T, \overrightarrow{v_3} = (0,0,1)^T$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ má trojnásobné vlastní číslo $\lambda = 2$ a pouze jeden vlastní vektor $\overrightarrow{v_1} = (1,0,0)^T$

Definice 10. 4 **Matice** A a B jsou **podobné**, pokud existuje regulární matice P tak, že

(10. 3) $\qquad P^{-1}AP = B$ nebo také $A = P^{-1}BP$.

Poznámka: Matice, které mají stejná vlastní čísla ještě nemusí být podobné. Např. matice A, B, C z předchozího příkladu si podobné nejsou.

Věta 10.5 *Pokud vlastní vektory matice A jsou lineárně nezávislé, je matice A podobná diagonální matici.*

Příklad Matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 1$ a vlastní vektory $\overrightarrow{v_1} = (0,1,1)^T, \overrightarrow{v_2} = (1,-1,-2)^T, \overrightarrow{v_3} = (0,1,-1)^T$.

Když vlastní vektory použijeme ke konstrukci matice P tak, aby $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, pak $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Poznámka Každá matice se nemusí dát převést na diagonální tvar.

Matice v Jordanově tvaru

Definice 10.5 Nechť $A_k, k = 1,2,\dots,p$ jsou čtvercové matice řádu n_k. **Direktním součtem** těchto **matic** rozumíme matici

$$A = A_{n_1} + A_{n_2} + \dots + A_{n_p} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_p \end{pmatrix} \text{ řádu } n_1 + n_2 + \dots + n_p.$$

Příklad Sestavte matici A, která je direktním součtem matic A_1=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = 3, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení: Spočteme direktní součet matic podle Definice 10.5.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definice 10. 5 Nechť I je jednotková matice, λ_k je číslo a

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

je matice řádu n_k. Matici řádu n_k

$$J_k = \lambda_k I + N_1$$

pak nazýváme **Jordanovým polem** příslušným vlastnímu číslu λ_k.

Matici J, která je direktním součtem Jordanových bloků $J_k, k = 1, 2, \dots, p$ nazveme **Jordanovou maticí**.

Příklad Sestavte Jordanovou matici, když $J = J_1 + J_2 + J_3$, $\lambda_1 = 2, n_1 = 3, \lambda_2 = -1, n_2 = 2, \lambda_3 = 5, n_3 = 1$.

$$J_1 = \lambda_1 I + N_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \lambda_2 I + N_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \lambda_3 I + N_1 = 5 + 0 = 5$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Věta 10.6 *Ke každé čtvercové matici A řádu n existuje regulární matice P a Jordanova matice J tak, že*

(10.5) $\qquad A = PJP^{-1}$.

Poznámka: Věta říká, že každá čtvercová matice je podobná s nějakou Jordanovou maticí.

Příklad Najděte Jordanův tvar matice $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Najdeme největší společné dělitele hlavních minorů matice $A + \lambda I$. Ty pak určují tvar rozkladu zadané matice.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

minory 1. řádu: $-3-\lambda, 4, -1, 1$. Jejich největší společný dělitel je $s_1 = 1$.

minor 2. řádu: $s_2 = (-3-\lambda)(1-\lambda) + 4 = (\lambda+1)^2$.

Obecně: Množina elementárních dělitelů $\left\{\frac{s_2}{s_1}, \frac{s_3}{s_2}, \dots, \frac{s_p}{s_{p-1}}\right\}$ určuje, jak vypadají vlastní čísla zadané matice a jaká je jejich násobnost.

V našem případě je tato množina jen jednoprvková $\{(\lambda+1)^2\} \Rightarrow \lambda = -1, n_1 = 2 \Rightarrow J = \lambda I + N_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Příklad Určete Jordanův tvar matice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Řešení Charakteristický polynom

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ -3 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

má minory 1. řádu: $-1-\lambda;\ 1;\ 1;\ -3;\ 3-\lambda \Rightarrow s_1 = 1$

minory 2. řádu: $(-1-\lambda)(3-\lambda) + 3 = \lambda(\lambda-2)$

$(-1-\lambda) + 3 = -\lambda + 2$

$1 - (3-\lambda) = \lambda - 2$

$(-1-\lambda) + 3 = \lambda - 2$

$(-\lambda-1)(3-\lambda) + 3 = \lambda(\lambda-2)$

$3 - \lambda - 1 = -\lambda + 2$

$-3 + 3(3-\lambda) = -3(\lambda-2)$

$-3(3-\lambda) + 3 = 3(\lambda-2)$

$(3-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-2)(\lambda-4) \Rightarrow s_2 = \lambda - 2$

minory 3. řádu:

$$(-1-\lambda)(3-\lambda)^2-3-3-[(-3)(3-\lambda)+(-1-\lambda)+(-3)(3-\lambda)]=$$

$$\{\lambda-2,\lambda-1,8-\lambda\} \Rightarrow \lambda=2,\lambda=1,\lambda=8\,.$$

Odtud je vidět, že Jordanova matice má tvar $J=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$.

Příklad Najděte matici P tak, aby $A=PJP^{-1}$, když $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Řešení:

Platí $AP-PJ=0$. Položme $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Pak

$$\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Zároveň matice P musí být regulární, tzn. $|P|\neq 0$.

$$\begin{array}{c}-3a+4c+a=0\\ \underline{-3b+4d-a+b=0}\end{array}$$

Položme $c=t, d=s;\ t,s\in R$, pak $a=2t, b=2s-t$. Z charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix}2t & 2s-t\\ t & s\end{vmatrix}=2ts-(2s-t)t\neq 0$$

$$t^2\neq 0.$$

Pro $t=1,\ s=1$ je $P=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ P^{-1}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Σ

Kořeny charakteristického polynomu se nazývají vlastní čísla. Vlastní vektor příslušný konkrétnímu vlastnímu číslu obdržíme řešením soustavy (10.1). Na základě znalosti vlastních čísel a vlastních vektorů matice, je možné uvést tuto matici na Jordanův kanonický tvar. Matice v Jordanově kanonickém tvaru je blokově diagonální matice, která je s původní maticí podobná.

?

1. Definujte vlastní číslo a vlastní vektor matice.
2. Kdy jsou dvě matice podobné?

3. Matici $A = \begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$ uveďte na Jordanův kanonický tvar.

[diag (3,-2,-1)]

4. Matici $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ uveďte na Jordanův kanonický tvar.

[J= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$]

Literatura k tématu:

[1] Mareš,J.. Algebra. V Praze: *České vysoké učení technické*, 1. vyd. 2014. 201 s. ISBN 978-80-01-05445-1

[2] Olšák, P. *Úvod do algebry, zejména lineární*. 2., přeprac. vyd. V Praze: České vysoké učení technické, 2013. 189 s. ISBN 978-80-01-05291-4

[3] , J., Ryjáček Z. *Lineární algebra II*, 1.vyd. Plzeň. ZČU Plzeň 1995, 216 s. ISBN80-7082-060-8.

Kapitola 11

Číselné posloupnosti

Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat posloupnost a načrtnout graf posloupnosti,
- vyznat se v jednotlivých způsobech zadání posloupnosti,
- objasnit vlastní a nevlastní limitu posloupnosti,
- určovat, zda je posloupnost monotónní a omezená,
- vypočítat limitu posloupnosti,
- vyjmenovat a využít základní vlastnosti konvergentních posloupností,
- vyjmenovat základní limity,
- graficky zachytit geometrický význam definice limity.

Klíčová slova:

Posloupnost, monotónní posloupnost, omezená posloupnost, vlastní limita, nevlastní limita, konvergentní a divergentní posloupnost, vybraná posloupnost, nulová posloupnost.

Definice posloupnosti a její graf

Definice 11.1 Posloupnost reálných čísel (dále jen posloupnost) je zobrazení množiny přirozených čísel do množiny čísel reálných.
Posloupnost, kterou je každému číslu $n \in \mathbb{N}$ přiřazeno číslo $a_n \in \mathbb{R}$, zapisujeme

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

nebo stručně $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$.

Číslo a_n se nazývá n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$, číslo n index členu a_n.

Poznámka Posloupnost je funkce definovaná na množině přirozených čísel. Posloupnost má vždy nekonečně mnoho členů; je to tedy nekonečná posloupnost.
Posloupnost můžeme zadat

1. symbolicky – vzorcem pro n-tý člen (pokud existuje),
2. rekurentně, tj. m prvními členy a vzorcem kterým, je n-tý člen vyjádřen pomocí m bezprostředně předcházejících členů,
3. výčtem členů, prakticky však pouze několika prvních členů, pokud je zřejmé, jaké členy následují,
4. graficky.

Příklady

a) Určeme prvních 5 členů posloupnosti $\left\{\frac{n+3}{2n-1}\right\}$.

Řešení

$$a_1 = \frac{1+3}{2\cdot 1-1} = 4, a_2 = \frac{2+3}{2\cdot 2-1} = \frac{5}{3}, a_3 = \frac{3+3}{2\cdot 3-1} = \frac{6}{5},$$

$$a_4 = \frac{4+3}{2\cdot 4-1} = 1, a_5 = \frac{5+3}{2\cdot 5-1} = \frac{8}{9}.$$

b) Určeme prvních 5 členů posloupnosti zadané rekurentně:

$$a_1 = 3, a_2 = 5, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 3(n-1), n \geq 3.$$

Řešení

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 5$$
$$a_3 = 2a_2 + a_1 - 3\cdot 2 = 2\cdot 5 + 3 - 3\cdot 2 = 7$$
$$a_4 = 2a_3 + a_2 - 3\cdot 3 = 2\cdot 7 + 5 - 3\cdot 3 = 10$$
$$a_5 = 2a_4 + a_3 - 3\cdot 4 = 2\cdot 10 + 7 - 3\cdot 4 = 15$$

c) Určeme vzorec pro n-tý člen posloupnosti $\left\{\frac{2}{11}, \frac{3}{12}, \frac{4}{13}, \frac{5}{14}, \frac{6}{15}, \cdots\right\}$.

Řešení

Zřejmě je $a_n = \frac{n+1}{n+10}$.

Poznámka Nejčastěji bývá posloupnost zadána symbolicky. „Uhodnout" vzorec pro n-tý člen z rekurentního vzorce či výčtu členů se podaří jen v jednoduchých případech.

Definice 11.2 **Graf posloupnosti** $\{a_n\}$ je množina všech bodů $[n;\ a_n]$ v rovině $\mathbb{R}^2$, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic. Značíme jej $G(\{a_n\})$.

Příklad Sestrojme graf posloupnosti $\{2n-5\}$.

Řešení

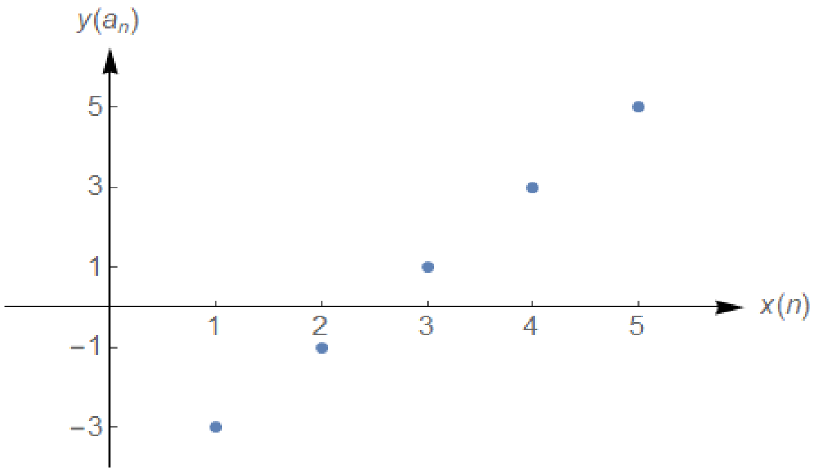
$a_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$

$a_2 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$

$a_3 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

$a_4 = 2 \cdot 4 - 5 = 3$

$a_5 = 2 \cdot 5 - 5 = 5$



Obrázek 11.1 Graf posloupnosti $\{2n-5\}$

Poznámka Grafem posloupnosti je vždy množina **izolovaných bodů**, protože jejím definičním oborem je diskrétní množina $\mathbb{N}$.

Jistě jste si všimli, že v přecházejícím příkladu se členy posloupnosti od sebe liší stále o číslo 2, což se dá zapsat také takto: $a_2 = a_1 + 2, a_3 = a_2 + 2, \dots, a_n = a_{n-1} + 2, \dots$.
Posloupnost lze zadat rekurentně $a_1 = -3, a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2$ a také výčtem několika počátečních členů $\{-3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$.
Posloupnost uvedená v předchozím příkladu je speciálním případem posloupnosti, a to aritmetické posloupnosti. Dalším speciálním případem je posloupnost geometrická. Uvedeme nyní definice těchto posloupností a některé základní poznatky o nich.

Definice 11.3 Posloupnost se nazývá **aritmetická**, právě když existuje takové číslo $d \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslo d se nazývá **diference** aritmetické posloupnosti.

Pro aritmetickou posloupnost platí: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Číslo s_n je součet prvních n členů aritmetické posloupnosti. Rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti je konstantní; je roven d.

Příklad Seštěte čísla od jedné do sta.

Řešení

$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = ?$

Čísla tvoří aritmetickou posloupnost, jejíž diference $d = 1$.

$$s_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50 \cdot 101 = 5050$$

Definice 11.4 Posloupnost se nazývá **geometrická**, právě když existuje takové číslo $q \in \mathbb{R}$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n q.$$

Číslo q se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti.

Pro geometrickou posloupnost platí: $a_n = a_1 q^{n-1}$

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$$

Číslo s_n je součet prvních n členů geometrické posloupnosti. Podíl dvou sousedních členů geometrické posloupnosti je konstantní; je roven q.

Příklad Určete 10. člen geometrické posloupnosti, je-li $a_1 = 61$ a $q = \frac{1}{2}$.

Řešení

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 2^6 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Poznámka Zřejmě posloupnost nemusí být jen aritmetická nebo geometrická.

Např. posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ není ani aritmetická, ani geometrická.

Vlastnosti posloupnosti

Definice 11.5 **Konečnou** posloupností rozumíme zobrazení prvních m přirozených čísel do množiny $\mathbb{R}$. Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{m} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$.

Poznámka Pojem posloupnosti lze zobecnit. Jejími členy nemusí být jen čísla, ale i jiné matematické objekty, např. trojúhelníky, funkce apod.

Definice 11.6 Posloupnost, jejíž všechny členy se sobě rovnají, nazýváme **konstantní** nebo **stacionární** posloupnost.

Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a, a, a, \dots\}, a \in \mathbb{R}$.

Např. Posloupnost $\{4\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 4, 4, \dots\}$ je stacionární.

Definice 11.7 Posloupnost $\{a_n\}$ je

$\left\{\begin{matrix} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \end{matrix}\right\}$, jestliže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\left\{\begin{matrix} a_n < a_{n+1} \\ a_n \leq a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \end{matrix}\right\}$.

Posloupnost $\left\{\begin{matrix} \text{rostoucí} \\ \text{klesající} \end{matrix}\right\}$ se nazývá **ryze monotónní**.

Posloupnost $\left\{\begin{matrix} \text{nerostoucí} \\ \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{klesající} \end{matrix}\right\}$ se nazývá **monotónní**.

Příklad Posloupnost $\left\{\frac{n+1}{3n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní, a to klesající, protože pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{3n+4} - \frac{n+1}{3n+1} = \frac{-2}{(3n+4)(3n+1)} < 0,$$

tedy $a_n > a_{n+1}$.

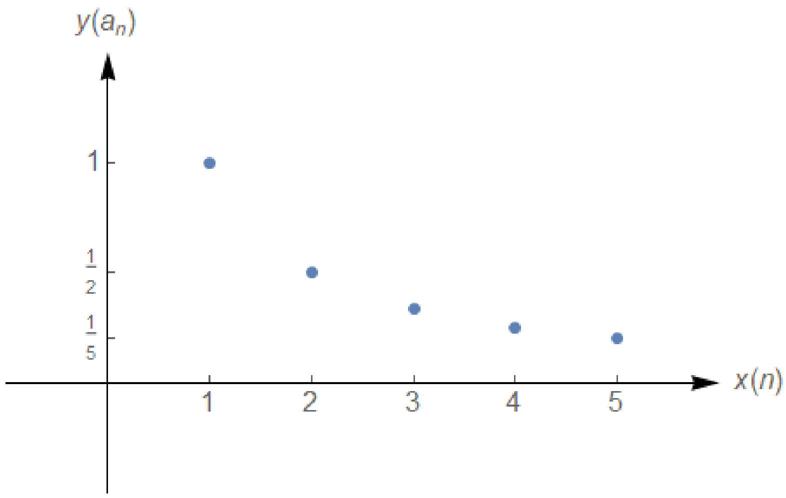
Definice 11.8 Posloupnost $\{a_n\}$ je **omezená shora**, resp. zdola, existuje-li číslo $k \in \mathbb{R}$, resp. $l \in \mathbb{R}$, takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq k$, resp. $a_n \geq l$. Posloupnost $\{a_n\}$ je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Věta 11.1 *Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, právě když existuje $K \in \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{R}$ platí $|a_n| \leq K$.*

Příklad Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, protože pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}.$$

Určíme $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{100}, \dots\right\}$ a setrojíme graf.



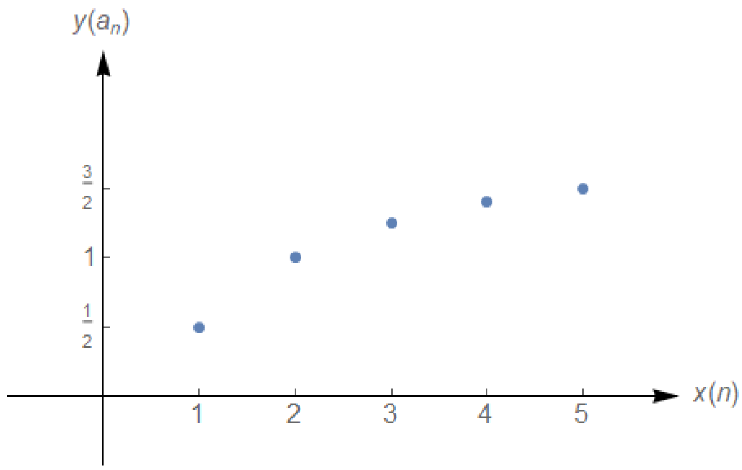
Z grafu lze usoudit, že je posloupnost omezená shora jedničkou a zdola nulou, neboť

$$0 < a_n = \frac{1}{n} \leq 1 \text{ pro } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Příklad Zjistěte, zda posloupnost $\left\{\frac{2n-1}{n+1}\right\}$ je monotónní a omezená.

Řešení Vypočítáme prvních 5 členů posloupnosti a nakreslíme graf.

$$\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \dots\right\}$$



Ze znalosti prvních pěti členů a grafu posloupnosti usoudíme, že tato posloupnost je rostoucí. Přesvědčíme se, zda pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n < a_{n+1}$, tj.

$$\frac{2n-1}{n+1} < \frac{2(n-1)-1}{(n+1)+1}$$

$$\frac{2n-1}{n+1} < \frac{2n-1}{n+2}$$

Užitím ekvivalentních úprav této nerovnice dostaneme, že

$$(2n-1)(n+2) < (2n+1)(n+1),$$

$$2n^2 + 3n - 2 < 2n^2 + 3n + 1,$$

$$0 < 3,$$

což platí pro všechna čísla n; tím je důkaz toho, že daná posloupnost je rostoucí, tedy ryze monotónní, a také monotónní, proveden.

Protože je posloupnost rostoucí, je zřejmé, že zdola je omezená členem $a_1 = \frac{1}{2}$.

Tzn., že $a_n \geq \frac{1}{2}$ pro $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Pro odhad horní meze je užitečné určit některé z členů s velkým indexem.

Z toho, že $a_{99} = 1{,}97$ a $a_{999} = 1{,}997$ usoudíme, že posloupnost je shora omezená číslem 2.

O správnosti naší úvahy, že $a_n < 2$, se přesvědčíme následovně:

$$\frac{2n-1}{n+1} < 2 \Rightarrow 2n - 1 < 2n + 2 \Rightarrow 0 < 3.$$

Ukázali jsme, že daná posloupnost je omezená shora i zdola, tedy je omezená.

Definice 11.8 Posloupnost $\{a_{k_n}\}$, kde $\{a_n\}$ je daná posloupnost a $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, se nazývá **vybraná posloupnost** z posloupnosti $\{a_n\}$.

Příklad Uvažujme posloupnost $\left\{2, \frac{3}{2}, , \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$.

Vybrané posloupnosti jsou např. tyto:

$\{a_{k_n}\}$: $\left\{2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$, kde $\{k_n\} = \{1,3,5, \dots\}$ je rostoucí posloupnost lichých čísel;

$\left\{\frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots\right\}$, kde $\{k_n\} = \{4,5,6, \dots\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel větších jak 3.

Naproti tomu posloupnost $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{100}{99}\right\}$ není vybraná posloupnost, protože je konečná.

Posloupnost $\left\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$ také není vybraná, protože posloupnost $\{k_n\} = \{3, 2, 1, 4, 5, \dots\}$ není rostoucí.

Poznámka Vybranou posloupnost lze z dané posloupnosti vybrat nekonečně mnoha způsoby.

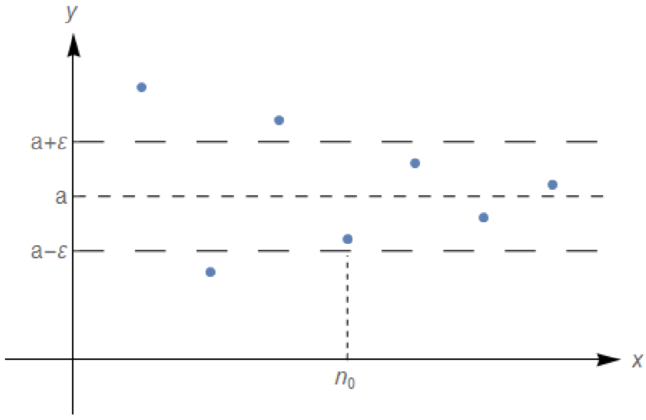
Definice 11.9 Existuje-li číslo n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ mají členy posloupnosti $\{a_n\}$ vlastnost V, jinými slovy, mají-li všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ vlastnost V s výjimkou jejich konečného počtu (tedy i bez výjimky), pak říkáme, že **skoro všechny členy posloupnosti** $\{a_n\}$ mají vlastnost V.

Limita posloupnosti

Definice 11.10 (Vlastní limita posloupnosti.) Posloupnost $\{a_n\}$ má **vlastní limitu** $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$. Zápis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nebo také $a_n \to a$.

Stručný zápis definice:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$



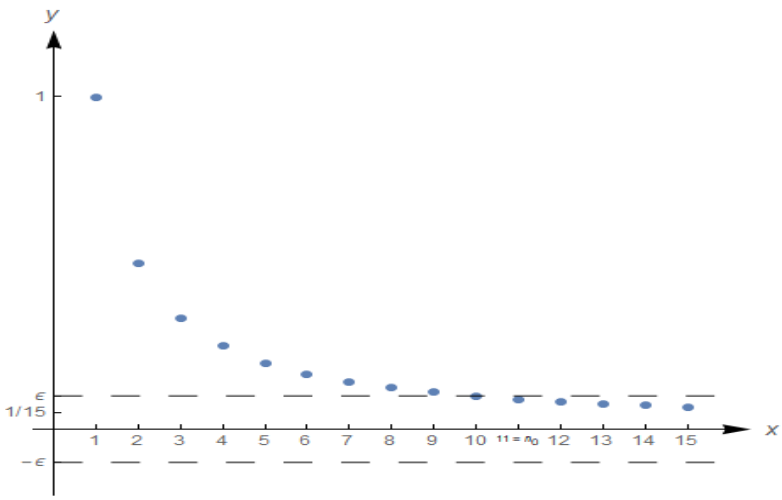
Obr. 11.4 Vlastní limita posloupnosti - geometrický význam $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Poznámka Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, pak skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ patří do okolí $U_\varepsilon(a)$, což znamená, že skoro všechny body grafu posloupnosti $\{a_n\}$ leží v pásu ohraničeném přímkami o rovnicích $y = a - \varepsilon$ a $y = a + \varepsilon$.

Číslo n_0 závisí na volbě čísla ε, je jeho funkcí, což lze psát $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Příklad Dokažme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řešení Sestrojíme nejprve graf posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.



Obr. 11.5 Graf posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

Z grafu vyčteme:

Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} > 0$.

Roste-li n nade všechny meze, tj. $n \to \infty$, pak hodnoty členů se blíží nule, tj. $\frac{1}{n} \to 0$ (viz obr.). Tedy $\lim \frac{1}{n} = 0$, což podle definice 11.10 znamená, že

$$\lim \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Upravíme nerovnost

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$
$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Položme n_0 rovno nejmenšímu přirozenému číslu, které je větší než $\frac{1}{\varepsilon}$. Pak pro všechna $n \geq n_o$ platí $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, což znamená, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Dokázali jsme jednu ze základních limit, kterou často užíváme při výpočtu limit posloupností.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Pro větší názornost a důkladnější pochopení definice 11.10 provedeme konkrétní volbu ε.

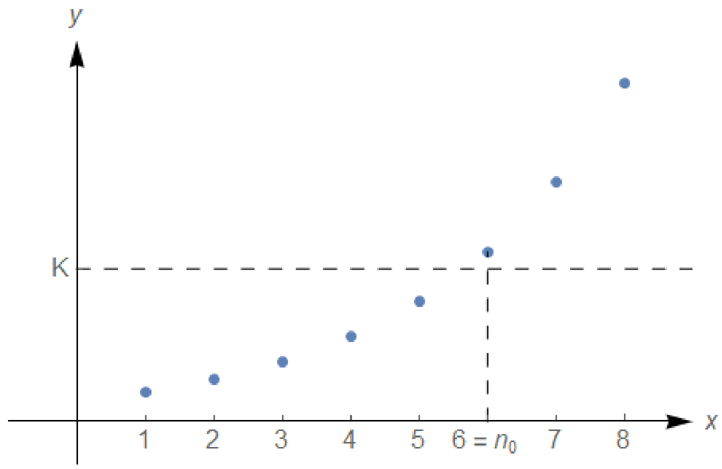
Poznámka Je účelné volit ε malé kladné číslo.

Zvolíme-li např. $\varepsilon = \frac{1}{10}$, pak $n_0 > \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$. Pak pro $\forall n \geq 11$ je $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \frac{1}{10}$. Vybereme např. $n = 15$ a pak $\left|\frac{1}{15} - 0\right| < \frac{1}{10}$, což platí, neboť $\frac{1}{15} < \frac{1}{10}$.

Definice 11.11 (Nevlastní limita posloupnosti.) Posloupnost $\{a_n\}$ má **nevlastní limitu** $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ platí $a_n > K$, resp. $a_n < K$. Zápis: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $(a_n \to +\infty)$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ $(a_n \to -\infty)$.

Stručný zápis definice:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < K.$$



Obrázek 11.6 Nevlastní limita posloupnosti – geometrický význam $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Poznámka Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pak skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ patří do okolí $U(+\infty, K)$, což znamená, že skoro všechny body grafu posloupnosti $\{a_n\}$ leží nad přímkou o rovnici $y = K$.

Číslo n_0 **závisí** na volbě K, je funkcí čísla $K, n_0 = n_0(K)$. V případě $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ je účelné volit K dostatečně velké kladné číslo.

Definice 11.12 Posloupnost, která má vlastní limitu se nazývá **konvergentní**. Posloupnost, která není konvergentní se nazývá **divergentní**.
Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in R$, říkáme, že posloupnosti $\{a_n\}$ **konverguje**.
Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **diverguje**.
Neexistuje-li $\lim a_n$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **osciluje**.
Divergentní posloupnost je tedy posloupnost, která má buď nevlastní limitu nebo posloupnost, jejíž limita neexistuje.

Příklad
Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je konvergentní, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Posloupnost $\{n^2\}$ je divergentní, protože $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.
Posloupnost $\{1 - 2n\}$ je divergentní, protože $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - 2n) = -\infty$.
Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je divergentní (osciluje), protože $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ neexistuje.

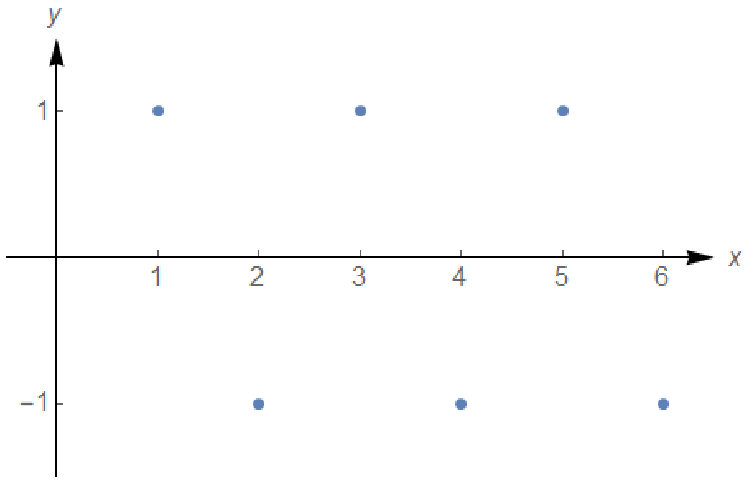
Shrnutí

posloupnost
- konvergentní – má vlastní limitu
- divergentní
  - má nevlastní limitu
  - limita neexistuje (posloupnost osciluje)

Příklad Limita posloupnosti $\{(-1)^n\}$ neexistuje, protože neexistuje žádné číslo $a \in \mathbb{R}$, v jehož okolí by se nacházely skoro všechny členy dané posloupnosti.

$$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \cdots\}$$

Nekonečně mnoho členů posloupnosti leží v okolí bodu 1 a nekonečně mnoho členů posloupnosti leží v okolí bodu -1.



Obr. 11.7 Graf posloupnosti $\{(-1)^n\}$, jejíž limita neexistuje

Definice 11.13 Posloupnost, jejíž limita je rovna nule, se nazývá **nulová**.

Příklad Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je nulová posloupnost, protože $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Poznámka Limitu posloupnosti hledáme vždy jen pro $n \to \infty$, proto můžeme stručně psát pouze $\lim a_n$ místo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Vlastnosti limity posloupnosti

Věta 11.2 *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Poznámka Tzn. buď žádnou nebo právě jednu.

Věta 11.3 *Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti takové, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = b_n$. Pak $\lim a_n$ existuje, právě když existuje $\lim b_n$ a obě limity jsou si rovny.*

Důsledek Vynechání, přidání nebo změna konečného počtu členů posloupnosti nemá vliv na existenci a hodnotu limity.

Např. Posloupnost $\{3,3,\cdots\} = \{3\}_{n=1}^{\infty}$ je stacionární posloupnost, která má limitu 3.

A také posloupnost $\{\underbrace{50,40,30,20,10,1,}_{\text{přidané členy}}3,3,3,\cdots\}$ má limitu 3.

Věta 11.4 *Jestliže pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = a, a \in R$, pak $\lim a_n = a$.*

Důsledek Limita konstantní posloupnosti je rovna té konstantě.

Např. Posloupnost $\{3,3,3,\cdots\} = \{3\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu 3.

Věta 11.5 (O limitě posloupností vzniklých početními operacemi.)
Nechť $\lim a_n = a, \lim b_n = b, a, b \in \mathbb{R}^*$ *a početní operace* $a + b, a - b, a \cdot b, \frac{a}{b}, a^m, \sqrt[m]{a}$, $m \in \mathbb{N}$, *jsou definovány na množině* $\mathbb{R}^*$.

Potom je

$$\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b \qquad \lim |a_n| = |a|$$

$$\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \qquad \lim (a_n)^m = a^m$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \qquad \lim \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}, \text{ pokud pro skoro všechna } n \text{ je } a_n \geq 0$$

Poznámka Dospějeme-li při výpočtu limity k výrazu, který není definován v $\mathbb{R}^*$, pak jej nazveme **neurčitým výrazem**. Ne proto, že by nešel určit, ale proto, že v tomto okamžiku ještě nedokážeme říci, zda limita existuje či neexistuje a v případě, že existuje, zda je vlastní nebo nevlastní. V tomto případě musíme člen a_n posloupnosti vhodným matematickým obratem nejprve upravit, abychom mohli použít vhodné věty a vzorce.

Výčet neurčitých výrazů:

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0}$$

Příklad Vypočtěme $\lim \frac{2n^2+3}{2-4n^2}$.

Řešení

$$\lim \frac{2n^2 + 3}{2 - 4n^2} = \frac{\lim(2n^2 + 3)}{\lim(2 - 4n^2)} = \frac{\lim 2 \cdot \lim n \cdot \lim n + \lim 3}{\lim 2 - \lim 4 \cdot \lim n \cdot \lim n} = \frac{2 \cdot \infty + 3}{2 - 4 \cdot \infty} = \left(\frac{\infty}{-\infty}\right)$$

Obrželi jsme neurčitý výraz, proto nejprve upravíme člen a_n.

a) Vydělíme čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou n ve jmenovateli.

$$\lim \frac{2n^2 + 3}{2 - 4n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\frac{2n^2}{n^2}}{\frac{2 - 4n^2}{n^2}} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - 4} = \frac{2 + 0}{0 - 4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

b) Vytkneme nejvyšší mocninu n v čitateli a nejvyšší mocninou n ve jmenovateli.

$$\lim \frac{2n^2 + 3}{2 - 4n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{n^2\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{2}{n^2} - 4\right)} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{\frac{2}{n^2} - 4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Příklad Vypočtěme $\lim \sqrt{4n^2+5n-7}-2n$.

Řešení

$$\lim\left(\sqrt{4n^2+5n-7}-2n\right)=(\infty-\infty)=\lim\frac{4n^2+5n-7-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n-7}+2n}=$$

$$=\lim\frac{5n-7}{\sqrt{4n^2+5n-7}+2n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\frac{5-\frac{7}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^2}}+2}=\frac{5}{4}$$

Poznámka Vzorec pro n-tý člen jsme upravili rozšířením a užili jsme vzorec

$$(a^2-b^2)=(a-b)(a+b).$$

Pozor! Neurčité výrazy nejsou:

$$\frac{\text{konstanta}}{0}=\begin{cases}+\infty;\text{čitatel a jmenovatel mají stejná znaménka}\\ -\infty;\text{čitatel a jmenovatel mají opačná znaménka}\end{cases}$$

$$\frac{\text{konstanta}}{\infty}=0$$

Příklad

1) $\lim\frac{2}{n^3}=\left[\frac{2}{\infty}\right]=0$
2) $\lim\frac{n^4}{\frac{1}{n}}=\left[\frac{\infty}{\to 0^+}\right]=+\infty$
3) $\lim\frac{5}{\frac{1}{n}}=\left[\frac{5}{\to 0^+}\right]=+\infty$
4) $\lim\frac{5}{-\frac{1}{n}}=\left[\frac{5}{\to 0^-}\right]=-\infty$
5) $\lim\frac{n^4}{\frac{1}{n}}=\lim n^5=\infty$

Vlastnosti konvergentních posloupností

Věta 11.6 *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Věta 11.7 (O součinu nulové a omezené posloupnosti.)

Je-li $\lim a_n=0$ *a posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená, pak* $\lim(a_n\cdot b_n)=0$.

Příklad Vypočtěme $\lim\frac{\cos n}{n}$.

Řešení Upravíme $\frac{\cos n}{n}=\frac{1}{n}\cdot\cos n$.

Víme, že $\lim\cos n$ neexistuje, avšak pro každé n je $|\cos n|\le 1$, což znamená, že posloupnost $\{\cos n\}$ je omezená.

Platí $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Potom podle věty 11.7

$$\lim \frac{\cos n}{n} = \left(\underbrace{\lim \frac{1}{n}}_{0} \cdot \underbrace{\cos n}_{\text{omezená p-st}} \right) = 0$$

Věta 11.8 (O limitě tří posloupností.)

Mějme tři posloupnosti $\{a_n\}, \{b_n\}$ *a* $\{c_n\}$.

Nechť

1) $a_n \leq c_n \leq b_n$ *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$
2) $\lim a_n = \lim b_n = a, a \in \mathbb{R}^*$.

Potom existuje i $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = c$.

Příklad Vypočtěme $\lim \frac{2n+\sin n}{3n+4}$.

Řešení Víme, že $\lim \sin n$ neexistuje.

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin n \leq 1 \quad &/(+2n) \\ 2n - 1 \leq 2n + \sin n \leq 2n + 1 \quad &/: 3(n+4) \ > 0 \\ \frac{2n-1}{3n+4} \leq \frac{2n+\sin n}{3n+4} \leq \frac{2n+1}{3n+1} \quad &(1) \\ \lim \frac{2n-1}{3n+4} = \lim \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} \quad &(2) \end{aligned}$$

Z (1) a (2) ⇒ limita $\frac{2n+\sin n}{3n+4}$ existuje a $\lim \frac{2n+\sin n}{3n+4} = \frac{2}{3}$.

Poznámka Zadanou limitu můžeme vypočítat i užitím vět 11.5 a 11.7.

$$\lim \frac{2n+\sin n}{3n+4} = \lim \frac{2n}{3n+4} + \lim \left(\underbrace{\frac{1}{3n+4}}_{0} \cdot \underbrace{\sin n}_{\text{omezená p-st}} \right) = \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}$$

Poznámka Všimněte si, že limita tvaru podílu, popř. součinu, může existovat, i když některý z činitelů nemá limitu. (Viz výše uvedené příklady.)

Věta 11.9 *Každá omezená a monotónnní posloupnost je konvergentní* (*tj. má vlastní limitu*).

Na základě této věty lze ukázat, že existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, kde $e \doteq 2{,}7182$.

Zapamatuj! Číslo e je Eulerovo číslo (je to základ přirozeného logaritmu).

Příklad Užitím přechozího vzorce vypočtěme limitu $\lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$.

Řešení

$$\lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = (1^\infty) = \lim\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right] = \lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} =$$

$$= e\cdot(1+0)^{-1} = e$$

Lze odvodit další vzorce:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right) = e^k$$

Je- li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, resp. $-\infty$, potom $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{a_n}\right)^{a_n} = e^k$.

Příklad Vypočtěme $\lim\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n}$.

Řešení

$$\lim\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{2n} = \lim\left(\frac{n+3-5}{n+3}\right)^{2n} = \lim\left[\left(1+\frac{-5}{n+3}\right)^n\right]^2 =$$

$$= \lim\left[\left(1+\frac{-5}{n+3}\right)^{n+3-3}\right]^2 = \lim\left[\left(1+\frac{-5}{n+3}\right)^{n+3}\right]^2\cdot\lim\left(1+\frac{-5}{n+3}\right)^{-6} =$$

$$= (e^{-5})^2\cdot(1+0)^{-6} = e^{-10}\cdot 1 = e^{-10}$$

Věta 11.10 (O limitě vybrané posloupnosti.)

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu $a, a\in\mathbb{R}^*$, pak každá posloupnost $\{a_{k_n}\}$ z ní vybraná má také limitu a, tj. $\lim a_{k_n} = \lim a_n = a$.

Větu lze užít dvojím způsobem:

1. Určení limity vybrané posloupnosti, známe-li limitu posloupnosti, z níž byla vybrána.

   Příklad Určeme limitu posloupnosti $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$.

   Řešení

$$\left\{\frac{1}{2n-1}\right\} = \left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\dots\right\}$$

Je to posloupnost vybraná z posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, kde posloupnost indexů $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost lichých čísel.

Víme, že $\lim\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim\frac{1}{2n-1} = 0$.

Všimněte si, že např. $\lim\frac{1}{2n} = 0$ a také $\lim\frac{1}{n+49} = 0$, poněvadž posloupnosti $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ a $\left\{\frac{1}{n+49}\right\}$ jsou vybrané posloupnosti z posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

2. Důkaz neexistence limity.
   Lze-li z posloupnosti $\{a_n\}$ vybrat alespoň 2 vybrané posloupnosti, jejichž limity jsou různé, pak posloupnost $\{a_n\}$ limitu nemá.
   Příklad Určete $\lim(-1)^n$.
   Řešení
   $$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$$
   Vybereme posloupnost lichých členů $\{-1, -1, -1, \cdots\}$, je to stacionární posloupnost, jejíž limita je -1.
   Vybereme posloupnost sudých členů $\{1, 1, 1, \dots\}$, je to stacionární posloupnost, jejíž limita je 1.
   Dle věty 11.10 pak posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá limitu; $\lim(-1)^n$ neexistuje, posloupnost $\{(-1)^n\}$ je divergentní (osciluje).

Přehled limit význačných posloupností

I. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \begin{cases} 0 \text{ pro } a = 0 \\ 1 \text{ pro } a > 0 \end{cases}$

III. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 \text{ pro } |a| < 1 \\ 1 \text{ pro } a = 1 \\ +\infty \text{ pro } a > 1 \\ \text{neexisuje pro } a \leq -1 \end{cases}$

IV. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

V. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

VI. $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = \begin{cases} +\infty \text{ pro } r > 0 \\ 1 \text{ pro } r = 0 \\ 0 \text{ pro } r < 0 \end{cases} \qquad r \in \mathbb{R}$

VII. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \begin{cases} 0 \text{ pro } 0 \leq a \leq 1 \\ +\infty \text{ pro } a > 1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}^+$

Výpočet limit posloupností

Příklad Určete limitu posloupnosti.

a) $\lim\,(3n^3 + 2n^6 - 10^{10}) = 2\infty^3 + \infty^6 - 10^{10} = \infty + \infty = \infty$

b) $\lim\,(5n - 7n^2 + 5) = (\infty - \infty) = \lim\left[n^2\left(\frac{5}{n} - 7 + \frac{5}{n^2}\right)\right] =$

$= \lim n^2 \cdot \lim\left(\frac{5}{n} - 7 + \frac{5}{n^2}\right) = \infty \cdot (0 - 7 + 0) = -\infty$

c) $$\lim \frac{n^3+2n-4}{3n^3-n+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{1+\frac{2}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{3-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}} = \frac{1}{3}$$

d) $$\lim \frac{2n^2-4n^3}{5n^6-7n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\frac{2}{n^4}-\frac{4}{n^3}}{5-\frac{7}{n^4}} = \frac{0}{5} = 0$$

e) $$\lim \frac{2-3n^3}{5n^2+5n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\frac{2}{n^2}-3n}{5+\frac{5}{n}} = \frac{0-\infty}{5} = -\infty$$

f) $$\lim \left[\frac{n^2-3n^3+4}{4n+2n^3+15}\left(2-\frac{3}{n}+\frac{15n}{n^2-4}\right)\right] =$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{n}-3+\frac{4}{n^3}}{\frac{4}{n^2}+2+\frac{15}{n^3}} \cdot \lim \left(2-\frac{2}{n}+\frac{\frac{15}{n}}{1-\frac{4}{n^2}}\right) = -\frac{3}{2}(2-0+0) = -3$$

g) $$\lim \frac{\sqrt{9+n^3+4n^4}}{\sqrt[3]{n^6+27}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\sqrt{\frac{9}{n^4}+\frac{1}{n}+4}}{\sqrt[3]{1+\frac{27}{n^6}}} = \frac{\sqrt{0+0+4}}{\sqrt[3]{1+0}} = 2$$

h) $$\lim \left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = (\infty-\infty) = \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-2\right)\left(\sqrt{n^2+n}+2\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$$

i) $$\lim \left[\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)\right] = (0\cdot\infty) = \lim \left[\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{2}(1+n)\right] =$$

$$= \lim \frac{1+n}{2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\frac{1}{n}+1}{2} = \frac{1}{2}$$

j) $$\lim \frac{(n+1)!-(n-1)!}{n!} = \lim \frac{(n+1)n(n-1)!-(n-1)!}{n(n-1)!} =$$

$$= \lim \frac{(n-1)!\,[n(n+1)-1]}{n(n-1)!} = \lim \frac{n^2+n-1}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim \frac{n + 1 - \frac{1}{n}}{1} = \infty$$

k) $$\lim \frac{5^n}{4^n - 9 \cdot 7^n} = \left(\frac{\infty}{\infty - \infty}\right) = \lim \frac{\frac{5^n}{7^n}}{\frac{4^n}{7^n} - 9\frac{7^n}{7^n}} =$$

$$= \lim \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n}{\left(\frac{4}{7}\right)^n - 9} = \frac{0}{0 - 9} = 0$$

l) $$\lim \left(\frac{n-5}{n+3}\right)^{n+5} = (1^\infty) = \lim \left(\frac{n+3-8}{n+3}\right)^{n+5} = \lim \left(1 + \frac{-8}{n+3}\right)^{n+5} =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{-8}{n+3}\right)^{n+3+2} = \lim \left(1 + \frac{-8}{n+3}\right)^{n+3} \cdot \lim \left(1 + \frac{-8}{n+3}\right)^2 =$$

$$= e^{-8} \cdot (1+0)^2 = e^{-8} \cdot 1 = e^{-8}$$

Σ

Číselná posloupnost je definována jako zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$. Jsou uvedeny základní vlastnosti posloupnosti: monotónnost, omezenost. Jsou připomenuty aritmetická a geometrická posloupnost. Limita posloupnosti je důležitým a nesnadným pojmem. Informuje nás, co se děje se členy posloupnosti pokud n roste nade všechny meze, tj. $n \to \infty$. Mohou nastat tři případy: $a_n \to a, a \in \mathbb{R}$, $a_n \to \pm\infty$ nebo $\lim a_n$ neexistuje. Věty o limitách využíváme při výpočtu limit posloupností.

?

1. Definujte číselnou posloupnost!
2. Jakým způsobem můžeme zadat posloupnost?
3. Kdy je posloupnost monotónní?
4. Kdy je posloupnost omezená?
5. Která posloupnost je konvergentní (divergentní)?
6. Kdy hovoříme o vybrané posloupnosti?
7. Může mít posloupnost více než jednu limitu?
8. Má každá posloupnost limitu?
9. Ano či ne?
   a) Geometrická posloupnost je vždy konvergentní.
   b) Konvergentní posloupnost má vždy právě jednu limitu.
   c) Grafem posloupnosti je spojitá křivka.
   d) Body grafu posloupnosti mohou ležet na parabole.
   e) Posloupnost $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ je geometrická

f) Posloupnost $\{e^{-n}\}$ je klesající konvergentní geometrická posloupnost.

g) Posloupnost $\{n^2\}$ je neomezená a divergentní.

h) $\lim\limits_{n\to\infty} 5^a = 5^a$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = e$

10. Napište první 4 členy posloupnosti, když

a) $a_n = (-2)^n$. $[\{-2, 4, -8, 16, \dots\}]$

b) $a_n = (-1)^n \cos\frac{\pi n^2}{n+1}$. $\left[\left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\cos\frac{\pi}{5}, \dots\right\}\right]$

c) $a_n = n + \frac{1+(-1)^n}{2}$. $[\{1, 3, 3, 5, \dots\}]$

11. Najděte předpis pro n-tý člen.

a) $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}$ $\left[a_n = \frac{n+1}{n}\right]$

b) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \dots\right\}$ $\left[a_n = \frac{n}{2^n}\right]$

c) $\{1, -4, 9, -16, 25, \dots\}$ $[a_n = (-1)^{n+1} n^2]$

12. Napište první čtyři členy posloupnosti dané rekurentně vztahy

a) $a_1 = -3, a_{n+1} = a_n + 3, n \geq 1.$ $[\{-3, 0, 3, 6, \dots\}]$

b) $a_1 = -3, a_{n+1} = a_n + n, n \geq 1.$ $[\{-3, -2, 0, 3, \dots\}]$

c) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_{n+1} = a_n - n a_{n-1}, n \geq 2.$ $[\{2, 4, 0, -12, \dots\}]$

13. Vypočtěte limitu posloupnosti.

a) $\lim(4 - n^2 + 3n^3)$ $[\infty]$

b) $\lim \frac{n^3 - 5n^2 + 4}{6n^5 - 3n^2}$ $[0]$

c) $\lim \frac{7 - 15n^4}{3n^3 - 4n}$ $[-\infty]$

d) $\lim \frac{45n^2 + 15n - 3}{15n^2 - 7n + 5}$ $[3]$

e) $\lim \frac{\sqrt[3]{27n^3 + 6n^2 - 8}}{\sqrt{4n^2 + 1}}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

f) $\lim\left(\sqrt[3]{n-5} - \sqrt[3]{n+5}\right)$ $[0]$

g) $\lim \frac{3(n+2)! - n!}{8(n+2)!}$ $\left[\frac{3}{8}\right]$

h) $\lim \left[\frac{3}{n^2+4}(1 + 2 + 3 + \dots + n)\right]$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

i) $\lim \frac{(-2)^n + 8^{n+3}}{\frac{1}{5}\cdot 3^{n-1} - \frac{1}{3}\cdot 8^{n+2}}$ $[-24]$

j) $\lim \left(\frac{n-7}{n+2}\right)^{n+8}$ $[e^{-9}]$

Literatura k tématu:

[1] BRABEC, J., MARTAN, F. ROZENSKÝ, Z. *Matematická analýza I.* SNTL Praha, 1989. 488 stran. ISBN 04-013-89

[2] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. 459 stran. ISBN 80-7200-587-1

[3] MÁDROVÁ, V. *Matematická analýza I*. UP Olomouc, 2001. 217 stran. ISBN 80-244-0269-6 (skripta)

[4] MÁDROVÁ, V., MAREK, J. *Sborník úloh z diferenciálního počtu v* $\mathbb{R}$. UP Olomouc, 2013. 329 stran. ISBN 978-80-244-3410-0 (skripta)

[5] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza I.* UP Olomouc, 2002. 126 stran. ISBN 80-244-0464-8 (skripta).

Kapitola 12

Číselné řady

Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozlišovat číselnou řadu a číselnou posloupnost,
- definovat součet řady,
- definovat, kdy číselná řada konverguje, resp. Diverguje,
- identifikovat význačné řady,
- rozhodnout o konvergenci řady s nezápornými členy,
- rozhodnout o konvergenci řady s libovolnými členy,
- vyšetřit absolutní kovergenci řady.

Klíčová slova:

Číselná řada, součet řady, n-tý částečný součet, zbytek po n-tém členu, geometrická řada, konvergence řady, divergence řady, alternující řada, relativní konvergence, absolutní konvergence, srovnávací kritérum, podílové kritérium, odmocninové kritérium, Raabeovo kritérium, Leibnizovo kritérium.

Definice číselné řady a jejího součtu

Teorie číselných řad navazuje na teorii číselných posloupností, proto při studiu řad uplatníme mnohé poznatky o posloupnostech.

Definice 12.1 Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel. **Nekonečnou číselnou řadou** (stručně jen **řadou**) nazveme symbol $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ $(n \in \mathbb{N})$, který vznikne tak, že mezi každé dva sousední členy posloupnosti $\{a_n\}$ formálně vložíme znak $+$. Stručné označení řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,;\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Čísla $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nazýváme členy řady.

Číslo a_n nazýváme n-tý člen řady.

Součet prvních n členů $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ nazveme n-tým částečným součtem řady.

Rozdíl

$$R_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

je tzv. **zbytek po n-tém členu** řady.

Poznámka Místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ píšeme stručně $\sum a_n$, indexy připisujeme jen v případě potřeby.

Příklad Z posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ utvoříme řadu $\sum \frac{1}{n}$.

Řešení

Posloupnost $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ a zní utvořená řada $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

Vyvstává otázka: Jak sečíst nekonečně mnoho členů za konečně dlouhou dobu? Odpověď dává definice 12.2

Definice 12.2 Uvažujme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Posloupnost $\{s_n\}$, kde

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &\vdots \end{aligned}$$

nazveme **posloupnost částečných součtů** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje** a má součet s. Píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** (k plus nekonečnu) a má součet $s = +\infty$.

Jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje** (k mínus nekonečnu) a má součet $s = -\infty$.

Jestliže $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverguje (osciluje)** a nemá součet.

Poznámka U každé řady nastane právě jedna z výše uvedených možností, což vyplývá z vlastností limity posloupnosti. Symbolem $\sum a_n$ značíme nejen řadu, ale i její součet, pokud existuje.

Příklad Rozhodněte o konvergenci řady a pokud konverguje, stanovte její součet.

Řešení

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$

Sestavíme posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů řady.

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Při výpočtu limity $\{s_n\}$ využijeme vztahu $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje a její součet $s = 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ je geometrická řada. Součet jejích prvních n členů je

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} & \text{pro } q \neq 1 \\ na & \text{pro } q = 1 \end{cases}.$$

Protože $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $|q| < 1$ a $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$ pro $|q| > 1$, konverguje řada pouze v případě, že $|q| < 1$. Její součet je pak $s = \frac{a}{1-q}$.

c) Pro vybrané částečné součty řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ máme

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + \frac{1}{2}\,,$$

$$s_4 = s_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}\,,$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{3}{2}\,,$$

$$\vdots$$

$$s_{2n} > 1 + \frac{n}{2}\,.$$

Vidíme, že vybraná posloupnost $\{s_{2^n}\}_{n-1}^{\infty}$ je rostoucí a není shora omezená. Dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $s_{n+1} > s_n$. Je tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ a to znamená, že harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

d) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \cdots$ Protože $s_{2n-1} = 1$ a $s_{2n} = 0$, neexistuje limita posloupnosti částečných součtů, a tedy zadaná řada osciluje.

Přehled význačných řad

(1) Geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

konverguje pro $|q| < 1$ a má součet $s = \dfrac{a}{1-q}$

diverguje pro $|q| \geq 1$

(2) „Užitečná“ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1;$$ konverguje a má součet $s = 1$

(3) Řada typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konverguje pro $k > 1$

diverguje pro $k \leq 1$

$(k \in \mathbb{R})$

(4) Harmonická řada (speciální případ řady (3))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ diverguje a má součet $s = +\infty$

(5) Leibnizova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$ konverguje relativně a má součet $s = \ln 2$

(6) Grandiho řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$ diverguje (osciluje) a nemá součet

(7) Aritmetická řada

$$\sum [a_1 + (n-1)d]$$ konverguje pouze pro $a_1 = d = 0$, pak má součet s=0.

Jinak diverguje.

Poznámky

1) Geometrickou a harmonickou řadu často užíváme ve srovnávacím kritériu k porovnávání řad.
2) U geometrické řady dovedeme ihned rozhodnout podle jejího kvocientu q, zda konverguje či diverguje.
3) Konvergentní geometrická řada je jednou z mála řad, které umíme sečíst.
4) Stejný konvergenční charakter mají i řady, které vzniknou z výše uvedených řad dosazením $n + l, l \in \mathbb{R}$, za n.

Příklad Řada $\sum \frac{1}{n}$ diverguje $\Rightarrow$ řada $\sum \frac{1}{n+3}$ také diverguje.

Řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje $\Rightarrow$ řada $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ také konverguje.

Vlastnosti libovolných řad

Věta 12.1. (Nutná podmínka konvergence.) Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámka Není-li tato podmínka splněna, tj. $\lim a_n \neq 0$ nebo neexistuje, pak řada nemůže konvergovat, tedy diverguje.

Poznámka Věta 12.1 udává pouze nutnou, nikoliv postačující podmínku pro konvergenci řady.

Příklad U harmonické řady $\sum \frac{1}{n}$ je splněna nutná podmínka konvergence, tj. $\lim \frac{1}{n} = 0$ a přitom tato řada diverguje.

U „užitečné" řady $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ je splněna nutná podmínka konvergence, tj. $\lim \frac{1}{n(n+1)} = 0$ a tato řada skutečně konverguje.

Příklad Užitím nutné podmínky konvergence rozhodněte o divergenci řady.

a) $\displaystyle\sum \frac{2n^2 - 4}{n^2 + 6}$ b) $\displaystyle\sum \frac{n^2 + 18}{3n^3}$

Řešení

a) $\displaystyle\lim \frac{2n^2 - 4}{n^2 + 6} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{2 - \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{6}{n^2}} = 2 \neq 0$

Nutná podmínka konvergence není splněna, řada diverguje.

b) $\displaystyle\lim \frac{n^2 + 18}{3n^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{18}{n^3}}{3} = 0$

O divergenci této řady nelze rozhodnout. (Řada může konvergovat, ale může i divergovat.)

Věta 12.2 *Konvergence nebo divergence řady se nezmění, když konečný počet jejích členů vynecháme, přidáme nebo zaměníme.*

Příklad Víme, že harmonická řada

$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \cdots$diverguje.

Zaměníme-li prvních 100 členů např.

$$\underbrace{10 + \frac{1}{10} + 10 + \frac{1}{10} + \cdots + 10 + + \frac{1}{10}}_{100\ \text{členů}} + \frac{1}{101} + \cdots,$$

pak tato řada také diverguje.

Obdobně: Řada $\sum \frac{1}{n(1+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{51\cdot 52} + \frac{1}{52\cdot 53} + \cdots$ konverguje. Vynecháme-li prvních 50 členů této řady, pak řada $\frac{1}{51\cdot 52} + \frac{1}{52\cdot 53} + \cdots$ také konverguje.

Věta 12.3 (O součtu a násobku řad.) *Jestliže* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady a* $k \in \mathbb{R}$ *je libovolná konstanta, pak řady* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ *konvergují a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Poznámka Z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ neplyne ještě konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Např. $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n + (-1)^{n-1}] = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ sice konverguje, ale řady $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ oscilují.

Poznámka Konstantu můžeme vytknout před sumační znak.

Příklad Dokažte konvergenci a stanovte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\cdot 4^{n-1} - 3^n}{6^{n-1}}.$$

Řešení Upravíme n-tý člen dané řady.

$$\sum \frac{5\cdot 4^{n-1} - 3^n}{6^{n-1}} = \sum\left[5\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}\right] = \sum\left[5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$$

Řada $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots$ je geometrická řada, v níž $a = 1$ a $q = \frac{2}{3}$, $|q| < 1$, řada konverguje a má součet $s_1 = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

Obdobně řada $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$ je geometrická řada, v níž $a = 1$ a $q = \frac{1}{2}$, $|q| < 1$, řada konverguje a má součet $s_2 = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Podle věty 12.3: $\sum\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ konverguje $\Rightarrow \sum 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ konverguje a má součet $5s_1 = 5 \cdot 3 = 15$

Dále $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ konverguje $\Rightarrow \sum 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ konverguje a má součet $3s_2 = 3 \cdot 2 = 6$

Závěrem podle věty 12.3 obdržíme, že řada $\sum \frac{5\cdot 4^{n-1} - 3^n}{6^{n-1}}$ konverguje a má součet $s = 5s_1 - 3s_2 = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 9$. Lze také psát $\sum \frac{5\cdot 4^{n-1} - 3^n}{6^{n-1}} = 9$.

Kritéria konvergence a divergence řad

Stanovení součtu řady bývá zpravidla obtížný úkol. Vzhledem k tomu, že součet číselné řady lze snadno vypočítat pouze u řady geometrické a několika málo dalších řad, soustředíme se především na zkoumání, zda řada konverguje nebo diverguje. K tomu nám slouží kritéria. Kritéria udávají jednak postačující podmínky pro konvergenci a jednak postačující podmínky pro divergenci řady. Není-li postačující podmínka stanovená kritériem splněna, nedává kritérium výsledek a je nutné užít jiné kritérium. Kritéria totiž nejsou stejně silná, účinná.

Kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy

Definice 12.3 Řada $\sum a_n$ se nazývá **řadou se nezápornými (kladnými) členy**, platí-li $a_n \geq 0$ $(a_n > 0)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Věta 12.4 (Srovnávací kritérium.) *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy takové, že pro skoro všechna n platí $a_n \leq b_n$.*

- *Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- *Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Poznámka *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z věty 12.4 se nazývá **minorantou** řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je **majoranta** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Předchozí větu lze proto vyslovit takto: S každou majorantou konverguje i její minoranta a s každou minorantou diverguje její majoranta.

Příklad Rozhodněte o konvergenci řady $\sum \frac{1}{n2^n}$.

Řešení Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Protože majorantní řada $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ konverguje (je to geometrická řada, jejíž kvocient je $q = \frac{1}{2}$) a obě uvažované řady mají nezáporné členy, konverguje také minoranta $\sum \frac{1}{n2^n}$.

Věta 12.5 (D'Alembertovo podílové kritérium.) *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.*

1) *Jestliže existují čísla $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (0,1)$, že pro všechna $n > n_0$ platí*
   - $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, *pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*
   - $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*
2) *Nechť existuje konečná nebo nevlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.*
   - *Je-li $L < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*
   - *je-li $L > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,*
   - *je-li $L = 1$ pak o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze prostřednictvím limitního podílového kritéria rozhodnout.*

Příklad *Rozhodněte* o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\, n!}{(n+1)!\, 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

Řada podle věty 12.5 konverguje.

Věta 12.6 (Cauchyovo odmocninové kritérium.) *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.*

1) *Jestliže existují čísla $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in (0,1)$ tak, že*
   - *pro všechna $n > n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.*
   - *Pokud ale pro všechna $n > n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.*
2) *Nechť existuje konečná nebo nevlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.*
   - *Je-li $L < 1$ pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,*
   - *je-li $L > 1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,*
   - *je-li L =1 nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ prostřednictvím limitního podílového kritéria rozhodnout.*

Příklad *Rozhodněte* o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot 1^3 = \frac{1}{2} < 1.$$

Řada konverguje.

Věta 12.7 (Raabeovo kritérium.) *Nechť* $\sum a_n$ *je řada s kladnými členy.*

1) *Jestliže existují čísla* $n_0 \in \mathbb{N}$ *a* $q \in (0,1)$ *tak, že pro všechna* $n > n_0$ *platí*
   - $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq q > 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje,*
   - $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*
2) *Nechť existuje konečná nebo nevlastní limita* $\lim \left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = L$.
   - *Je-li* $L > 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje,*
   - *je-li* $L < 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

Příklad Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady

$$\sum \frac{1}{n(2n+1)} .$$

Řešení Zkusíme užít limitní podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)[2(n+1)+1]}}{\frac{1}{n(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{2n^2+5n+3} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}} = 1$$

Podle limitního podílového kritéria nelze rozhodnout.

Zkusíme užít Raabeovo kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[n\left(1 - \frac{2n^2+n}{2n^2+5n+3}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[n \frac{2n^2+5n+3-2n^2-n}{2n^2+5n+3}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+3n}{2n^2+5n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{n}}{2+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}} = 2 = L, L > 2,$$

řada konverguje.

Poznámky

- Příklad dokládá, že kritéria nejsou stejně „silná“.
- Zdůrazňujeme, že u limitních kritérií nelze rozhodnout o konvergenci či divergenci řady v případě, že $L = 1$.
- Výčet kritérií není úplný. (Není např. uvedeno integrální kritérium, protože s integrálním počtem se seznámíte až v dalším semestru.)

Alternující řady

Dosud jsme se zabývali pouze řadami, které mají nezáporné členy. Nyní zaměříme pozornost na konvergenci řad, jejichž členy mění znaménko.

Definice 12.4 Řada $\sum a_n$ se nazývá **alternující**, platí-li pro její členy $\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka V alternující řadě se střídají znaménka. Alternující řadou rozumíme řadu $\sum(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$, resp. řadu $\sum(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots$.

Poznámka Symbol sgn je zkratka pro signum $=$ znaménko.

Příklad Známá alternující řada je především Leibnizova řada.

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Pro alternující řady uvádíme pouze jediné kritérium.

Věta 12.8 (Leibnizovo kritérium.) *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Alternující řada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ konverguje, právě když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Přitom součet s řady splňuje nerovnosti $a_1 - a_2 < s < a_1$.*

Poznámka Podmínka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ je pro alternující řady nutnou a zároveň postačující podmínkou pro konvergenci.

Příklad Rozhodněte, zda Leibnizova řada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konverguje.

Řešení

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Posloupnost členů je $\{a_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = \frac{1}{n} > 0$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, tzn., že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Jsou splněny všechny předpoklady Leibnizova kritéria, Leibnizova řada konverguje.

Poznámka Leibnizova řada konverguje pouze relativně.

Absolutní konvergence řad

Definice 12.5 Řekneme, že řada $\sum a_n$ konverguje **absolutně** (je absolutně konvergentní), konverguje-li řada $\sum|a_n|$. Řekneme, že řada $\sum a_n$ konverguje **neabsolutně (relativně)**, jestliže řada $\sum a_n$ konverguje, ale řada $\sum|a_n|$ diverguje.

Poznámka $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$.

$$\sum|a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \cdots$$

Příklad Dle Leibnizova kritéria jsme zjistili, že řada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ konverguje a také jsme dříve dokázali, že řada $\sum\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum\frac{1}{n}$ diverguje – je to harmonická řada.

Leibnizova řada konverguje relativně (neabsolutně).

Věta 12.9 Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Poznámka Z absolutní konvergence plyne „obyčejná“ konvergence řady.

Poznámka Pro řady s nezápornými členy platí $\sum|a_n| = \sum a_n$ a proto pojem absolutní konvergence nepřináší pro tyto řady nic nového.

Příklad Vyšetřete, zda konverguje absolutně řada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$.

Řešení Řada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \cdots$ je alternující řada.

Dle Leibnizova kritéria vyšetříme její konvergenci.

Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n^2} > 0$,

pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $n < n + 1 \Rightarrow n^2 < (n+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$, což znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Jsou splněny všechny podmínky Leibnizova kritéria, tzn., že řada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ konverguje.

Řada $\left|\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right| = \sum\frac{1}{n^2}$ je řada typu $\sum\frac{1}{n^k}$, kde $k = 2 > 1$, a tato řada konverguje.

Konverguje řada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ i řada $\sum\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right|$, tedy řada $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně.

Poznámka Vzhledem k tomu, že $\sum|a_n|$ je řada s nezápornými členy, dávají věty 12.4 – 12.7 ihned kritéria pro absolutní konvergenci.

Poznámka Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, právě když je splněna některá z následujících podmínek:

- Existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tak, že $|a_n| \leq b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,
- existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,
- existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$,
- existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, existuje $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$.

Příklad Zjistěte, zda konverguje absolutně řada $\sum(-1)^n\frac{15^n}{n!}$.

Řešení Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}15^{n+1}}{(n+1)!}}{(-1)^n\frac{15^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-1\,\frac{15^{n+1}n!}{15^n(n+1)!}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{15}{n+1} = 0 = L \text{ a } L < 1$$

Daná řada konverguje absolutně.

Nekonečné číselné řady jsou důležitým početním nástrojem. Základní význam mají pro výpočet funkčních hodnot a jsou hlavním prostředkem ke zhotovení tabulek elementárních a vyšších funkcí. Součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme číselnou řadou. Řada konverguje, právě když konverguje posloupnost částečných součtů této řady.Pokud řada konverguje, je limita n-tého členu řady rovna nule.V přehledu význačných řad je uvedena konvergence a divergence těchto řad.Při vyšetřování konvergence řad s nezápornými členy užíváme srovnávací, podílové, odmocninové a Raabeovo kritérium, a to v nelimitní nebo limitní formě.O relativní konvergenci alternující řady se rozhodne pomocí Leibnizova kritéria. Alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ konverguje (relativně), právě když posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí a limita n-tého členu je rovna 0.

Řady s libovolnými členy mohou konvergovat absolutně. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje absolutně, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}a_n|$. O absolutní konvergenci rozhodujeme opět podle příslušných kritérií.

?

1. Jak je definována konvergence číselné řady a čemu je pak roven její součet?
2. Jak je to s konvergencí geometrické řady?
3. Formulujte nutnou podmínku pro konvergenci číselné řady.
4. Ověřte konvergenci geometrické řady a určete její součet
   a) $\sqrt{5}-2+(\sqrt{5}-2)^2+(\sqrt{5}-2)^3+\cdots$ $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$
   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ [diverguje]
   c) $\sum_{n=1}^{\infty}10^{-2n}$ $\left[\frac{1}{99}\right]$
5. Ověřte, zda je splněna nutná podmínka konvergence řady.
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)^2}$ [podmínka je splněna]
   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n+1}$ [podmínka není splněna; řada diverguje]
   c) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$ [podmínka je splněna]
6. Zformulujte kritéria, podle kterých můžeme rozhodnout o konvergenci či divergenci řady s nezápornými členy.
7. Srovnávacím kritériem rozhodněte o konvergenci řady
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n+\sqrt{n}}$ $\left[\text{konverguje }\left(\text{srovnáme s řadou } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\right)\right]$
   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$ $\left[\text{diverguje }\left(\text{srovnáme s řadou } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)\right]$
8. Rozhodněte o konvergenci řady pomocí limitního podílového kritéria
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$ [konverguje]
   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ [diverguje]
   c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ [konverguje]
   d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ [nelze rozhodnout]
9. Rozhodněte o konvergenci řady pomocí limitního odmocninového kritéria.
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ [konverguje]
   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$ [diverguje]

c) $2 + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \frac{2^4}{4^{10}} + \cdots$ [diverguje]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(3+\frac{1}{n}\right)}$ [konverguje]

10. Jaký je vztah mezi relativní a absolutní konvergencí?

11. Rozhodněte o konvergenci alternující řady

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$ [diverguje]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2}$ [konverguje absolutně]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ [konverguje neabsolutně]

Literatura k tématu:

[1] BUDINSKÝ, B., CHARVÁT, J. *Matematika I*. SNTL Praha, 1987. ISBN 04-011-87

[2] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment Praha, 2003. 459 stran. ISBN 80-7200-587-1

[3] KAŇKA, M., HENZLER, J. *Matematika pro ekonomy (2)*. Ekopress Praha, 1997. 373 stran. ISBN 80-86119-01-7

[4] MOŠOVÁ, V. *Matematická analýza II.* UP Olomouc, 2005. 134 stran. ISBN 80-244-1005-2 (skripta).