PRAVDĚPODOBNOST

Paulína Jašková

Pravděpodobnost v reálném životě

- Jaká je pravděpodobnost, že … ?
- Pravděpodobnost se zabývá matematickými zákonitostmi, které se projevují v náhodných pokusech.

Pokus, náhodný pokus

- **Pokus -** uskutečnění určitého pevně daného systému podmínek

  - končí právě jedním výsledkem – pokus, při kterém zahříváme vodu na 100 stupňů má jeden výsledek: voda vře

- **Náhodný pokus**

  - takový pokus, jehož výsledek závisí na náhodě a který lze za stejných podmínek opakovat libovolně mnohokrát (dává rozdílné výsledky)

  - pokus končí nastoupením jednoho výsledku z množiny možných výsledků

  - Ex.: hod kostkou, hod mincí, výběr lístku z osudí, ruleta …

Náhodný jev, náhodný pokus

- Každý možný výsledek náhodného pokusu nazýváme **elementárním náhodným jevem** (značíme $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$) .
- Všechny elementární jevy tvoří tzv. **základní prostor elementárních jevů**; značí se Ω.
- Každá podmnožina základního prostoru Ω se nazývá **náhodný jev** (značíme *A*, *B*, …), přičemž prázdná podmnožina se nazývá **jev nemožný**, označujeme ∅ a celý základní prostor **jev jistý**, označujeme *I*.

Příklad

- Náhodný pokus – hod hrací kostkou.

Náhodný pokus	Hod hrací kostkou
Elementární jevy	„padne 1“ … ω_1 „padne 2“ … ω_2 … „padne 6“ … ω_n

- Jevy ω_1, ω_2, …, ω_n vymezují základní prostor Ω.
  V tomto základním prostoru mohou být například následující jevy:

náhodný jev *A* . . . "padne liché číslo" . . . $A = \omega_1 + \omega_3 + \omega_5$

náhodný jev *B* . . . "padne číslo ≥ 4" . . . $A = \omega_4 + \omega_5 + \omega_6$

jev nemožný . . . . ."padne číslo > 6"

jev jistý . . . ."padne číslo < 7"

neslučitelné jevy/disjunktné . . ."padne sudé číslo", "padne liché číslo“

Příklad

1. Pokuste se rozhodnout, kdy se jedná o náhodný pokus a kdy o náhodný jev:
   - házení hrací kostkou
   - padnutí sudého čísla na hrací kostce
   - tahání losů z osudí
   - vytažení černé kuličky z urny
   - střílení do terče
   - zasažení terče
   - vytažení červeného esa z balíku karet
   - tažení jedné karty

3. Rozhodněte, zda tvoří následující náhodné jevy základní prostor.

a) Pokus: hod dvěma mincemi

Jevy: A - padnutí dvou orlů

B - padnutí dvou panen

b) Pokus: dva výstřely do terče

Jevy: A - žádný zásah

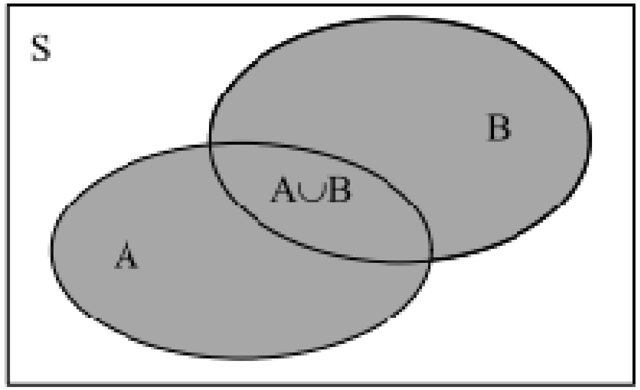
B - jeden zásah

C - dva zásahy

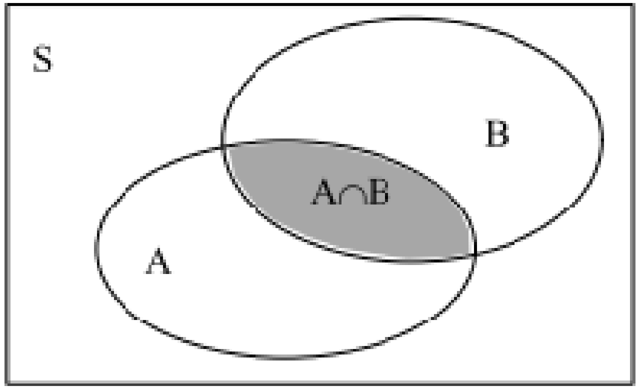
Operace s jevy

- **Sjednocení jevů A, B** – jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů *A*, *B*. Zavádíme označení $A \cup B$
- **Průnik jevů A, B** – jev, který nastane právě tehdy, když nastanou oba jevy současně. Zavádíme označení $A \cap B$
- **Rozdíl jevů A, B** – jev, který nastane právě tehdy, když nastane jev *A* a nenastane jev *B*. Zavádíme označení $A - B$.
- **Jev $\boldsymbol{A^c}$** nazýváme **jevem opačným** k jevu A, je-li $A^C = \Omega - A$. Jev opačný nastává právě tehdy, když jev A nenastává. Zn. A\B
- Je-li $A \cap B = \emptyset$ říkáme, že se jevy A a B vzájemně vylučují, resp. jsou neslučitelné (disjunktní).
- Jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tvoří **systém neslučitelných jevů**, je-li $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$.

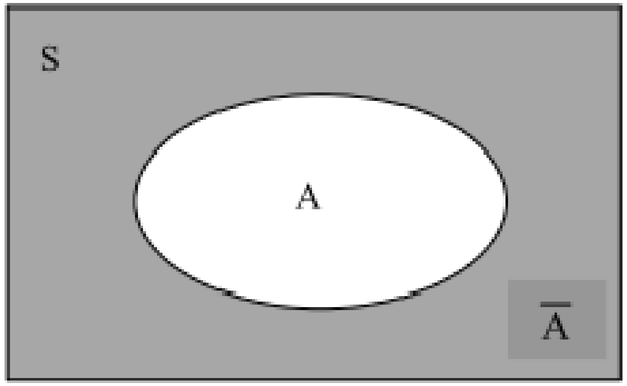
Operace s jevy

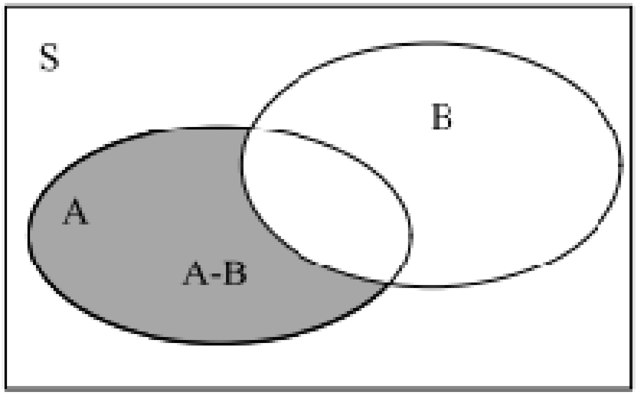


Obr. 2.1.



Obr. 2.2.





Operace s náhodnými jevy

4. Najděte opačné jevy k jevům:

Pokus: hod třemi mincemi

a) Jev A - padnutí alespoň 2 líců
b) Jev B - padnutí nejvýše 2 rubů

Pokus: 5 výstřelů do terče

c) Jev C - alespoň 3 zásahy
d) Jev D - nejvýše 3 zásahy
e) Jev E - právě 1 zásah

5. Rozhodněte, zda jsou následující náhodné jevy navzájem disjunktní.

a) Pokus: hod mincí
   Jevy: A - padnutí orla
   B - padnutí panny
b) Pokus: hod dvěma mincemi
   Jevy: A - padnutí orla na první minci
   B - padnutí panny na druhé minci
c) Pokus: dva výstřely do terče
   Jevy: A - žádný zásah
   B - jeden zásah
   C - dva zásahy

Axiomatické zavedení pravděpodobnosti

-
- **Jevové pole** *a* je množina všech různých podmnožin základního prostoru Ω, která vyhovuje těmto podmínkám:
- - *I* leží v *a*
- - Leží-li jevy *A*, *B* v *a*, pak $A \cap B$, $A \cup B$ leží v *a*
- Na jevové pole a se můžeme dívat jako na množinu jevů, ve které každý výsledek definovaných operací náleží opět do této množiny.

Pravděpodobnost

- Nechť *a* je jevové pole. **Pravděpodobnost jevu** *A* je reálné číslo *P*(*A*), pro něž platí:
- 1. $P(A) \geq 0$ . . . axiom nezápornosti
- 2. $P(I) = 1$ . . . axiom jednotky
- 3. Pro libovolnou postupnost $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *neslučitelných náhodných jevů platí*

$$P\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{1}^{\infty} P(A_n)$$

Pravděpodobnost – jiná definice

- Nechť je dáno *n* elementárních jevů $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, které tvoří úplný systém neslučitelných jevů a jsou **stejně možné**. Rozkládá-li se jev *A* na *m* ($m \leq n$) elementárních jevů z tohoto systému, pak pravděpodobnost jevu *A* je reálné číslo

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{počet\ případů\ příznivých\ jevu\ A}{počet\ všech\ možných\ případů}$$

Pravděpodobnost

- pravděpodobnost nemožného jevu je 0
$$P(\emptyset) = 0$$
- pravděpodobnost jistého jevu je rovna 1
$$P(I) = 1$$
- pro pravděpodobnost libovolného jevu A platí
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
- $P(A^C) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

Pravděpodobnost

- Při hodu kostkou určete pravděpodobnost jevů:

  a) jev A: „padne číslo 5“

  b) jev B: „padne číslo ≤ 2“

ad a) $P(A) = 1/6$

ad b) $P(B) = 2/6 = 1/3$

Pravděpodobnost

- S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet šest

Riešenie:

Stejně pravděpodobné jevy jsou dvojice výsledků hodů jednotlivými kostkami. Těch je 6^2 (každá ze dvou kostek má 6 stran). Součtu 6 odpovídají dvojice

A = {[2, 4], [4, 2], [5, 1], [1, 5], [3, 3]}, kterých je 5.

Hledaná p-st tedy $\mathrm{P} = \frac{|A|}{6^2} = \frac{5}{36}$.

Pravděpodobnost

Do výtahu osmipatrového domu nastoupilo 5 osob. Každá z nich vystoupí nezávisle na ostatních v libovolném poschodí. Jaká je pravdepodobnost, že všechny osoby vystoupí

1. v šestém poschodí,
2. v témže poschodí,
3. každá v jiném poschodí.

Četnost výsledku, relativní četnost

- Mějme nějaký pokus s množinou výsledků Ω. Proveďme tento pokus celkem n-krát a pro každý možný výsledek ω zaznamenejme, kolik pokusů skončilo právě tímto výsledkem.
- **Číslo n(ω)** nazveme **četností výsledků ω**.
- **Podíl** $\frac{n(\omega)}{n}$ nazveme **relativní četností výsledků ω.**

Četnost výsledku, relativní četnost výsledku – příklad

- Hodíme 10x hrací kostkou s výsledky 1, 6, 4, 1, 5, 5, 3, 1, 2, 4.

- četnosti výsledků:
  - n(1) = 3
  - n(2) = 1
  - n(3) = 1
  - n(4) = 2
  - n(5) = 2
  - n(6) = 1.
- nejvyšší četnost má jev, kdy padlo číslo 1. Relativní četnost tohoto jevu je 3/10.

Příklad

- Vojenskou kolonu tvoří dva terénní vozy Land Rover Defender, tři obrňená vozidla Iveco LMV a čtyři Tatry 810. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodném seřazení kolony pojedou stejná vozidla za sebou?

Příklad

- Jaká je pravděpodobnost, že slovem náhodně sestaveným z písmen

  A, A, A, E, I, K, M, M, T, T bude MATEMATIKA?

Sčítání pravděpodobností

- Nechť jevy A a B se navzájem vylučují. Pravděpodobnost sjednocení dvou navzájem se vylučujících jevů je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Platí i pro více než dva jevy.

- Obecně

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

kde P(AB) je průnik jevů.

Geometrická pravděpodobnost

- používáme ji v případech, které lze převést na toto schéma: V rovině (případně na přímce nebo v prostoru) je dána určitá oblast Ω a v ní další uzavřená oblast *A*. Pravděpodobnost jevu *A*, který spočívá v tom, že náhodně zvolený bod v oblasti Ω leží i v oblasti *A* je:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

, kde |*A*|, |Ω| jsou míry oblastí *A* a Ω

Geometrická pravděpodobnost - příklad

- Jak je pravděpodobné, že meteorit padne na pevninu, víme-li, že pevnina má rozlohu 149 milionů km^2 a moře 361 milionů km^2.

$$P(A) = \frac{149}{149 + 361} = 0{,}292$$

Nezávislé jevy

- Nezávislostí dvou jevů rozumíme to, že uskutečnění jednoho nemá vliv na uskutečnění nebo neuskutečnění druhého jevu.
- Řekneme, že jevy A a B jsou nezávislé, jestliže platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Nezávislé jevy

- Dvakrát hodíme mincí. Označme jevy A1, že v 1. hodu padne líc, A2, že ve 2. hodu padne líc a A3, že v obou hodech padne totéž. Jsou jevy A1, A2 a A3 nezávislé? Jsou tyto jevy nezávislé po dvou?
- P(A1)=0,5
- P(A2)=0,5
- P(A3)=$\frac{2}{4} = 0{,}5$
- 4 možné výsledky co na minci padne, z nich 2 jsou příznivé A3 (dvakrát líc nebo dvakrát rub)

- $P(A1 \cap A2) = P(A1 \cap A3) = P(A2 \cap A3) = \frac{1}{4}$

  pst že v obou hodech padl líc

- $P(A1 \cap A2) = P(A1) * P(A2)$ jevy jsou po dvou nezávislé
- Jev $(A1 \cap A2 \cap A3)$ ... v obou hodech padl líc
- $P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1) * P(A2) * P(A3) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Podmíněná pravděpodobnost

- Nechť A,B jsou náhodné jevy. Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B, je dána jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- $P(B) > 0$

Příklad

- V populaci je 5 % diabetiků, 2 % populace jsou diabetici kuřáci. Ukázalo se, že náhodně zvolená osoba je kuřák. Jaká je pravděpodobnost, že má diabetes?
- A … náhodně vybraná osoba je diabetik
- B … náhodně vybraná osoba je kuřák
- 5% diabetiků … P(A)=0,05
- 2% diabetici kuřáci … $P(A \cap B) = 0{,}02$
- hledáme pravděpodobnost, že náhodně zvolená osoba je kuřák, víme- li, že je diabetik
- $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}02}{0{,}05} = 0{,}4$

Věta o úplné pravděpodobnosti:

- Je daná posloupnost $\{B_n\}$ (konečná nebo nekonečná) disjunktních náhodných jevů, kde $P(B_n) > 0$, $P(\bigcup_n B_n) = 1$ (tzv. úplný systém hypotéz). Potom pro libovolný jev A platí

$$P(A) = \sum_n P(A|B_n) * P(B_n)$$

- Ve studijní skupině je 23 posluchačů. Pravděpodobnost složení zkoušky z teorie pravděpodobnosti a statistiky je pro 8 posluchačů 0,9; pro 12 posluchačů 0,6 a pro 3 posluchače 0,4. Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolený posluchač tuto zkoušku složí.
- A ... Náhodně zvolený posluchač složí zkoušku
- B1 ... Náhodně zvolený posluchač je výborný student
- B2 ... Náhodně zvolený posluchač je dobrý student
- B3 ... Náhodně zvolený posluchač je slabý student
- Disjunktné množiny

Bayesova věta

- Nechť platí předpoklady předchozí věty a navíc mějme A, pro který $\mathrm{P(A)} > 0$. Potom

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n) * P(B_n)}{\sum_j P(A|B_j) * P(B_j)}$$

- $P(B_n)$ … apriorní pravděpodobnost
- $P(B_n|A)$ … aposteriorní pravděpodobnost

- Máme tři šuplíky s ponožkami, v jednom máme červený pár, v druhém jednu ponožku červenou a druhou modrou, ve třetím jsou obě modré. Náhodně vyberu šuplík a vytáhnu modrou ponožku. Jaká je šance, že i druhá ponožka bude modrá?
- Pst, že druhá ponožka bude modrá=pst, že jsem vybral třetí šuplík
- M: vytáhl jsem modrou
- Š1: vybral jsem první šuplík; P(Š1)=1/3
- Š2: vybral jsem druhý šuplík; P(Š2)=1/3
- Š3: vybral jsem třetí šuplík; P(Š3)=1/3
- $P(Š3|M) = \frac{P(M|Š3) * P(Š3)}{P(M|Š1)P(Š1)+P(M|Š2)P(Š2)+P(M|Š2)P(Š2)} =$

$$= \frac{1 * \frac{1}{3}}{0 * \frac{1}{3} + 0.5 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$