TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

Jana Kubanová

Univerzita Pardubice

1999

OBSAH

1. KOMBINATORIKA ... 6

1.1. Kombinatorické pravidlo součinu : ... 6
1.2. Variace, permutace a kombinace ... 6

2. NÁHODNÉ JEVY ... 7

2.1. Základní pojmy ... 7
2.2. Operace s náhodnými jevy ... 8

3. PRAVDĚPODOBNOST ... 10

3.1. Axiomatická definice pravděpodobnosti ... 10
3.2. Vlastnosti pravděpodobnosti ... 10
3.3. Klasická definice pravděpodobnosti ... 11
3.4. Geometrická definice pravděpodobnosti ... 12
3.5. Statistická definice pravděpodobnosti ... 12

4. PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST ... 12

4.1. Definice podmíněné pravděpodobnosti ... 12
4.2. Nezávislost náhodných jevů ... 13
4.3. Věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta ... 14

5. OPAKOVANÉ POKUSY ... 15

5.1. Bernoulliho nezávislé opakované pokusy ... 15
5.2. Zevšeobecněné nezávislé opakované pokusy ... 16
5.3. Závislé pokusy ... 16

6. NÁHODNÁ VELIČINA ... 17

6.1. Náhodná veličina a její rozdělení pravděpodobností ... 17
6.2. Náhodná veličina diskrétního typu ... 19
6.3. Náhodná veličina spojitého typu ... 20

7. NĚKTERÉ DŮLEŽITÉ TYPY ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ ... 21

7.1. Rozdělení pravděpodobností diskrétních náhodných veličin ... 21
7.1.1. Alternativní rozdělení pravděpodobností ... 21
7.1.2. Geometrické rozdělení pravděpodobností ... 21
7.1.3. Binomické rozdělení pravděpodobností ... 21
7.1.4. Hypergeometrické rozdělení pravděpodobností ... 22
7.1.5. Poissonovo rozdělení pravděpodobností ... 22
7.2. Rozdělení pravděpodobností spojitých náhodných veličin ... 23
7.2.1. Rovnoměrné rozdělení pravděpodobností ... 23
7.2.2. Exponenciální rozdělení pravděpodobností ... 24
7.2.3. Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobností ... 25
7.2.4. χ^2 *- rozdělení pravděpodobností s n-stupni volnosti ... 28*
7.2.5. Studentovo t-rozložení pravděpodobností ... 29
7.2.6. F- rozdělení pravděpodobností (Fisher-Snedecorovo) ... 30
7.2.7. Erlangovo rozdělení pravděpodobností ... 31
7.2.8. Γ*- rozdělení pravděpodobností ... 32*
7.2.9. Beta rozdělení ... 33
7.2.10. Weibullovo rozdělení ... 33
7.2.11. Rayleighovo rozdělení ... 34

8. VÍCEROZMĚRNÁ NÁHODNÁ VELIČINA ... 35

8.1. Dvourozměrná náhodná veličina a její distribuční funkce ... 35
8.2. Nezávislost náhodných veličin ... 37
8.3. Dvourozměrná náhodná veličina diskrétního typu ... 38

8.4. DVOUROZMĚRNÁ NÁHODNÁ VELIČINA SPOJITÉHO TYPU 38
8.5. PODMÍNĚNÉ ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ 40

9. FUNKCE NÁHODNÝCH VELIČIN 42

9.1. FUNKCE JEDNOROZMĚRNÉ NÁHODNÉ VELIČINY 42
9.2. FUNKCE DVOUROZMĚRNÝCH NÁHODNÝCH VELIČIN 44

10. CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH VELIČIN 45

10.1. VŠEOBECNÉ MOMENTY 45
10.2. POČÁTEČNÍ MOMENTY 46
10.3. CENTRÁLNÍ MOMENTY 47
10.4. MOMENTY DVOUROZMĚRNÉ NÁHODNÉ VELIČINY 48
10.5. CHARAKTERISTIKY POLOHY 48
10.6. CHARAKTERISTIKY VARIABILITY 49
10.7. KVANTILY 50
10.8. CHARAKTERISTIKY ŠIKMOSTI A ŠPIČATOSTI (NORMOVANÉ MOMENTY) 50
10.9. STŘEDNÍ HODNOTA NÁHODNÉ VELIČINY 52
10.9.1. Vlastnosti střední hodnoty 52
10.10. DISPERZE NÁHODNÉ VELIČINY 54
10.10.1. Vlastnosti disperze 55
10.11. KOVARIANCE NÁHODNÝCH VELIČIN 56
10.12. KOEFICIENT KORELACE 58
10.13. PODMÍNĚNÉ STŘEDNÍ HODNOTY A DISPERZE 59

11. REGRESE 61

11.1. STOCHASTICKÁ ZÁVISLOST 61
11.2. LINEÁRNÍ REGRESNÍ FUNKCE A KORELAČNÍ KOEFICIENT 61

12. MOMENTOVÁ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE 63

12.1. MOMENTOVÁ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE, DEFINICE A VLASTNOSTI 63
12.2. MOMENTOVÁ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE SOUČTU NÁHODNÝCH VELIČIN 64

12. LIMITNÍ VĚTY 66

12.1. ČEBYŠEVOVA NEROVNOST 66
12.2. KONVERGENCE PODLE PRAVDĚPODOBNOSTI 67
12.3. ZÁKON VELKÝCH ČÍSEL 67
12.4. CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA 69

13. SLOVNÍK ANGLICKÝCH EKVIVALENTÙ 72

14. LITERATURA 74

Skripta Teorie pravděpodobnosti jsou určena posluchačům denního, bakalářského i dálkového studia Univerzity Pardubice jako první část učebního textu k přednáškám z předmětu teorie pravděpodobnosti a matematická statistika.

Skriptum seznamuje se základy počtu pravděpodobnosti, které jsou nezbytné pro pochopení a uplatňování běžných i moderních metod statistické indukce.

Skriptum je členěno do dvanácti základních kapitol. Jsou zde definovány základní pojmy z teorie pravděpodobnosti a formou vět vyjádřeny základní vlastnosti jednotlivých pojmů. Důkazy vět jsou uvedeny pouze v případě, že mají velkou pedagogickou hodnotu, že slouží zároveň k procvičení látky předešlých částí textu a matematický aparát, který se v nich používá, je známý ze základního kurzu matematiky. Konec důkazu je v textu obvykle označen □.

K jednotlivým tématům nejsou uvedeny vzorové příklady, proto doporučuji při studiu použít jako doplněk k tomuto textu skriptum Sbírka příkladů z teorie pravděpodobnosti, které obsahuje mnoho řešených i neřešených příkladů k jednotlivým kapitolám.

Na závěr bych chtěla poděkovat recenzentům Doc. RNDr. Bohdanu Lindovi, CSc. a RNDr. Janu Luhovi, CSc. za pečlivé přečtení těchto skript i za cenné připomínky a náměty, které podstatnou měrou přispěly ke zkvalitnění textu.

Autorka

1. KOMBINATORIKA

Kombinatorika, čili nauka o skupinách, řeší problémy spojené s určováním počtu skupin, sestavených podle určitých pravidel z prvků dané konečné množiny.

Znalosti z této oblasti matematiky jsou důležité pro řešení řady problémů v matematice i jejích aplikacích. Poznatky nalézají uplatnění při řešení úloh v pravděpodobnosti, která tvoří teoretický základ statistiky. Všechny tyto matematické disciplíny nacházejí uplatnění ve fyzice, biologii i dalších přírodních vědách, v mnoha odvětvích technických věd i věd společenských.

Vznik kombinatoriky i pravděpodobnosti je datován do 17. století a byl podmíněn potřebami hazardních hráčů, holdujících karetním hrám a hrám s kostkami. Cílem bylo především předpovědět pravděpodobnosti výhry v různých situacích.

Jedním ze základních pojmů kombinatoriky je pojem k-tice prvků, kde k-ticí rozumíme výběr k prvků z jisté, blíže určené skupiny prvků. Vybrané prvky se v k-tici buď mohou, nebo nemohou opakovat. Dále rozlišujeme, zda jsou k-tice uspořádané či nikoliv. Uspořádané jsou, když v nich rozlišujeme pořadí prvků a záměnou prvků vzniká další možná k-tice. Například záměnou cifer 2 a 3 v čísle 123 vznikne nové číslo 132.

1.1. Kombinatorické pravidlo součinu :

Počet všech uspořádaných k-tic z n prvků, jejichž první člen lze vybrat právě n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu právě n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru (k-1)-ho členu právě n_k způsoby, je roven součinu $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

1.2. Variace, permutace a kombinace

Variací k-té třídy bez opakování z n-prvkové množiny rozumíme každou uspořádanou k-tici, sestavenou z těchto prvků tak, že každý je v ní obsažen nejvýše jednou. Jejich počet je dán vztahem:

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Variací k-té třídy s opakováním z n-prvkové množiny rozumíme každou uspořádanou k-tici, sestavenou pouze z těchto n prvků (prvky se v ní mohou opakovat). Jejich počet je dán vztahem: $V'_k(n) = n^k$

Permutací bez opakování z n-prvkové množiny rozumíme každou uspořádanou n-tici prvků, vytvořenou z dané n-prvkové množiny tak, že každý prvek je v ní obsažen právě jednou. Jejich počet je dán vztahem: $P(n) = n!$

Permutací z m-prvkové množiny $M = \{ a_1, a_2, \ldots, a_m \}$ **s opakováním** prvku a_1 právě k_1 krát, prvku a_2 právě k_2, ..., prvku a_m právě k_m krát, kde $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, rozumíme takovou uspořádanou n-tici, vytvořenou ze všech m ($m \le n$) prvků množiny M, že se v této n-tici prvek a_1 vyskytuje právě k_1 krát, prvek a_2 právě k_2, . . ., prvek a_m právě k_m krát. Jejich počet je dán vztahem: $P'_{k_1,k_2,\ldots k_m}(n) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$

Kombinací k-té třídy z n-prvkové množiny **bez opakování** rozumíme každou neuspořádanou k-tici, vytvořenou z n-prvkové množiny (každý prvek je v ní obsažen nejvýše jednou). Počet k-prvkových kombinací bez opakování je dán vztahem:

$$C_k(n) = \binom{n}{k}$$

Kombinací k-té třídy z n-prvkové množiny **s opakováním** rozumíme každou k-tici prvků této množiny takovou, že se v ní každý prvek může opakovat nejvýše k krát. Počet k-prvkových kombinací s opakováním je dán vztahem:

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Jednotlivé vztahy pro výpočet počtu skupin ukazuje přehledně následující tabulka:

	počet skupin bez opakování	***počet skupin s opakováním***
Variace	$V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$V'_k(n) = n^k$
Permutace	$P(n) = n!$	$P'_{k_1,k_2,\ldots k_m}(n) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$
Kombinace	$C_k(n) = \binom{n}{k}$	$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$

2. NÁHODNÉ JEVY

2.1. Základní pojmy

DEFINICE 2.1.1.: Pod **náhodným pokusem P** rozumíme takový pokus, jehož výsledek závisí na náhodě a který lze za stejných podmínek zopakovat libovolně mnohokrát.

Je zřejmé, že náhodný pokus má alespoň 2 různé výsledky, protože v opačném případě bychom nemohli tvrdit, že výsledek závisí na náhodě. Dále předpokládáme, že po vykonání náhodného pokusu může nastat jen jeden výsledek.

DEFINICE 2.1.2.: Výsledek náhodného pokusu nazýváme **elementární jev**.
DEFINICE 2.1.3.: Množinu S všech elementárních jevů nazýváme **základní prostor.**
DEFINICE 2.1.4.: Libovolnou podmnožinu A základního prostoru S nazýváme **náhodný jev**.

Poznámka: Náhodné jevy budeme značit velkými tiskacími písmeny (např. A, B...) nebo v případě velkého počtu náhodných jevů velkými tiskacími písmeny s indexy (např. $A_1, A_2, \ldots B_1, \ldots$). Systém náhodných jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ budeme označovat $\{A_i\}_{i=1}^n$.

Pokud nebude v dalším textu uvedeno jinak, budeme předpokládat, že jevy, se kterými budeme pracovat, jsou podmnožinami daného základního prostoru.

Zápis náhodných jevů

1) výčtem elementárních jevů $A = \{e_1, e_4, e_5\}$
2) slovním popisem A = slovní opis jevu
3) pomocí výroků $A = \{e;$ výrok $V\}$

Pojem „ ***Nastal náhodný jev A*** “ znamená, že výsledkem náhodného pokusu byl elementární jev e, patřící do množiny A ($e \in A$).

Z definice náhodného jevu dále plyne

a) Základní prostor S je náhodným jevem, neboť $S \subset S$. Tento náhodný jev nazýváme **jistý jev**. Jistý jev nastane vždy po vykonání náhodného pokusu.

b) Prázdná množina $\emptyset$ je náhodným jevem, neboť $\emptyset \subset S$ (prázdná množina je podmnožinou každé množiny). Tento náhodný jev nazýváme **jev nemožný**. Nemožný jev nemůže nastat nikdy.

c) Pokud elementární jev e zapíšeme jako množinu $\{e\}$, skládající se z jednoho prvku, pak $\{e\}$ je rovněž náhodný jev, neboť $\{e\} \subset S$.

Ekvivalentní jevy

Zápis $A \subset B$ znamená, že pokud nastane jev A, nastane současně i jev B. Je zřejmé, že jestliže současně platí $A \subset B$ a $B \subset A$, potom $A = B$. V tomto případě říkáme, že jevy A a B jsou ekvivalentní (že se rovnají).

$$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$$

2.2. Operace s náhodnými jevy

Náhodné jevy jsou množiny elementárních jevů, proto s nimi můžeme provádět stejné operace jako s množinami, tedy operace sjednocení, průnik, doplněk (komplement) a operaci rozdíl. Nyní probereme jednotlivé operace podrobněji.

Uvažujme dva náhodné jevy A a B. Náhodným jevem

a) $\mathbf{A \cup B}$ rozumíme takový náhodný jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů A, B. Nazýváme jej **sjednocení** jevů A a B. Náhodný jev $A \cup B$ zapíšeme pomocí výroků následovně:

$$A \cup B = \{e: e \in A \vee e \in B\}$$

b) $\mathbf{A \cap B}$ rozumíme takový náhodný jev, který nastane právě tehdy, když jevy A, B nastanou současně. Nazýváme jej **průnik** jevů A a B. Náhodný jev $A \cap B$ zapíšeme pomocí výroků následovně:

$$A \cap B = \{e: e \in A \wedge e \in B\}$$

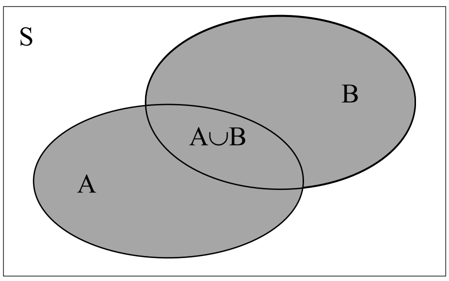
c) $\overline{\mathbf{A}}$ rozumíme takový náhodný jev, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A. Nazýváme jej **doplněk** jevu A. Náhodný jev $\overline{A}$ zapíšeme pomocí výroků následovně:

$$\overline{A} = \{e: e \notin A \wedge e \in S\}$$

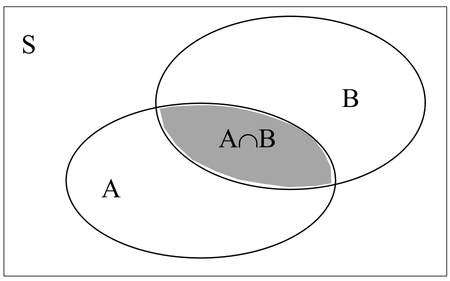
d) **A - B** rozumíme takový náhodný jev, který nastane právě tehdy, když nastane jev A a současně nenastane jev B. Nazýváme jej **rozdíl** jevů A a B. Náhodný jev A - B zapíšeme pomocí výroků následovně:

$$A - B = \{e: e \in A \wedge e \notin B\}$$

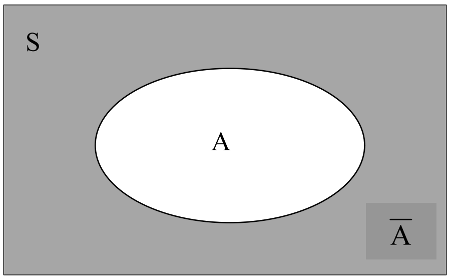
Operace s náhodnými jevy můžeme názorně zobrazit pomocí Vennových diagramů.(Obrázky 2.1. až 2.4.).



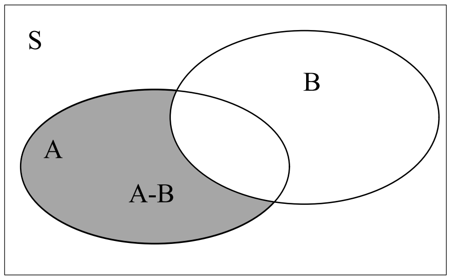
Obr. 2.1.



Obr. 2.2.



Obr. 2.3.



Obr. 2.4.

Sjednocení a průnik dvou náhodných jevů jsou opět náhodné jevy, je možné vytvořit i jejich doplňkové jevy. Platí pro ně tzv. de Morganova pravidla

Platí: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Tato pravidla můžeme zobecnit na libovolnou n-tici náhodných jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Platí: $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$; $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

DEFINICE 2.2.1.: Nechť A, B jsou dva náhodné jevy. Jestliže $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že jevy A, B jsou **disjunktní**.

DEFINICE 2.2.2.: Nechť $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ je systém náhodných jevů. Jestliže platí $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$ říkáme, že jevy $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ jsou **navzájem disjunktní**.

DEFINICE 2.2.3.: Nechť $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ je systém náhodných jevů. Jestliže platí $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1,2, \ldots, n$, říkáme, že jevy $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ jsou **po dvou disjunktní**.

VĚTA 2.2.1.: Jestliže jsou jevy $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ po dvou disjunktní, pak jsou i navzájem disjunktní.

Důkaz: Pokud jsou jevy po dvou disjunktní, neexistuje žádný elementární jev, který by patřil dvěma různým náhodným jevům. Potom nemůže existovat ani takový elementární jev, který by patřil všem A_i náhodným jevům. □

DEFINICE 2.2.4.: Nechť $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ je systém po dvou disjunktních náhodných jevů takových, že platí $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$. Potom říkáme, že daný systém náhodných jevů tvoří **rozklad základního prostoru S.**

DEFINICE 2.2.5.: Nechť φ je neprázdný systém náhodných jevů, patřících základnímu prostoru S. Systém φ nazveme **polem náhodných jevů**, jestliže platí :

1. $S \in \varphi$
2. $A \in \varphi \Rightarrow \overline{A} \in \varphi$
3. $A_i \in \varphi$, $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \varphi$

3. PRAVDĚPODOBNOST

3.1. Axiomatická definice pravděpodobnosti

DEFINICE 3.1.1.: Nechť φ je pole náhodných jevů. Libovolnou reálnou množinovou funkci P, definovanou na φ, nazveme **pravděpodobností**, jestliže platí:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. $P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i) \quad A_i \in \varphi, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\quad i, j = 1, 2, ...$

Tato definice nedává návod, jak vypočítat pravděpodobnosti jednotlivých náhodných jevů. Návod na konkrétní výpočet pravděpodobností dávají klasická, geometrická a statistická definice pravděpodobnosti, o kterých se zmíníme později.

3.2. Vlastnosti pravděpodobnosti

VĚTA 3.2.1.: Nechť φ je pole náhodných jevů, potom pro každý náhodný jev $A \in \varphi$ platí :

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Důkaz: První nerovnost je zřejmá na základě bodu 1 axiomatické definice pravděpodobnosti. Druhou nerovnost dokážeme následujícím způsobem:

Platí: $\quad A \cup \overline{A} = S \quad$ a $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$

Postupným využitím vlastností, vyjádřených axiomatickou definicí pravděpodobnosti, dostáváme:

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \geq P(A) \quad \square$$

VĚTA 3.2.2.: Nechť φ je pole náhodných jevů, potom pro každý náhodný jev $A \in \varphi$ platí :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Důkaz : Platí : $\quad A \cup \overline{A} = S \quad$ a $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$

I v tomto důkazu využijeme vlastností, vyjádřených axiomatickou definicí pravděpodobnosti.

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) \quad \square$$

VĚTA 3.2.3.: Nechť φ je pole náhodných jevů, potom platí : $P(\emptyset) = 0$

Důkaz: Je zřejmé, že $\quad S \cup \emptyset = S \quad$ a $\quad S \cap \emptyset = \emptyset$

Na základě vlastností, plynoucích z axiomatické definice pravděpodobnosti, platí:

$1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset) \quad \Rightarrow \quad P(\emptyset) = 0 \quad \square$

VĚTA 3.2.4.: Nechť φ je pole náhodných jevů. Pro každé dva náhodné jevy $A, B \in \varphi$ takové, že $A \subset B$ platí : $\quad P(A) \leq P(B)$

Důkaz: Náhodný jev B popíšeme jako sjednocení dvou disjunktních náhodných jevů.

$B = A \cup (B - A) \quad$ a $\quad A \cap (B - A) = \emptyset$

Pak platí: $\quad P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A) \geq P(A) \quad \square$

VĚTA 3.2.5.: Nechť φ je pole náhodných jevů. Potom pro každé dva náhodné jevy $A,B \in \varphi$ platí:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Důkaz : $A \cup B = A \cup [(B - (A \cap B)] \quad$ přičemž $\quad A \cap [(B - (A \cap B)] = \emptyset$

$B = (A \cap B) \cup [B - (A \cap B)] \quad$ přičemž $\quad (A \cap B) \cap [B - (A \cap B)] = \emptyset$

Podle třetího axiómu z axiomatické definice pravděpodobnosti můžeme psát:

$P(A \cup B) = P(A) + P[(B - (A \cap B)]$

$P(B) = P(A \cap B) + P[B - (A \cap B)]$

Dosazením výrazu $P[B - (A \cap B)]$ z druhé rovnice do první dostaneme:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \square$$

VĚTA 3.2.6.: Nechť φ je pole náhodných jevů. Nechť $\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $A_i \in \varphi$, i = 1, 2, ... , n je libovolný systém náhodných jevů. Pak platí:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - .... + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Důkaz: Důkaz provedeme metodou matematické indukce. Pro n = 2 bylo dokázáno, že platí věta 3.2.5. Proto předpokládáme, že věta 3.2.6. platí pro dané n a dokážeme, že platí i pro n+1 náhodných jevů.
Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ jsou libovolné náhodné jevy. Pak podle věty 3.2.5.

$$P(\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) \qquad (3.1.)$$

Můžeme psát: $P(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)$

Pro tuto pravděpodobnost platí věta 3.2.6. podle indukčního předpokladu. Věta 3.2.6. platí i pro $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$.

Do prvního upraveného vztahu (3.1.) dosadíme za $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ a za $P(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ a dostaneme

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \quad . \quad . \quad + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) -$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) + \quad . \quad . \quad + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n+1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{k=j+1}^{n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \quad . \quad . \quad + (-1)^{n} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) \qquad \square$$

Důsledek věty 3.2.6.: Je-li systém jevů $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ systémem po dvou disjunktních jevů, pak platí:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

VĚTA 3.2.7.: Nechť je φ pole náhodných jevů. Pak pro každý náhodný jev $A \in \varphi$ platí:

$$P(A) = \sum_{e_i \in A} P(\{e_i\})$$

Důkaz: Vyplývá z důsledku věty 3.2.6. Systém jevů $\{e_i\}_{e_i \in A}$ je systémem po dvou disjunktních jevů.

Potom platí: $P(A) = \sum_{e_i \in A} P(\{e_i\})$. $\square$

3.3. Klasická definice pravděpodobnosti

Předpokládejme, že základní prostor S je složen z n elementárních jevů. Nechť každý elementární jev má stejnou možnost nastat po vykonání náhodného pokusu

DEFINICE 3.3.1.: Nechť A je libovolný náhodný jev. Označme m počet elementárních jevů, tvořících náhodný jev A. Potom **pravděpodobnost P(A)** náhodného jevu A definujeme jako podíl :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{počet případů příznivých}}{\text{počet všech možných případů}}$$

Klasická definice pravděpodobnosti je nejstarší definicí pravděpodobnosti. Postupně vycházely najevo některé její nedostatky, jako například předpoklad konečnosti základního prostoru S. Nejpodstatnější nedostatek této definice spočívá v tom, že pojem pravděpodobnosti se zavádí pomocí stejného pojmu, neboť výraz “stejná možnost nastat“ je ekvivalentní výrazu pravděpodobnost.
I přes tyto výhrady je klasická definice s úspěchem využívána k výpočtu pravděpodobností.

3.4. Geometrická definice pravděpodobnosti

Klasickou definici pravděpodobnosti nemůžeme použít v případě, když má náhodný pokus nekonečně mnoho výsledků. Z tohoto důvodu byla později zavedena geometrická definice pravděpodobnosti. Základní prostor je znázorněn jako nějaký geometrický útvar S v n-rozměrném prostoru. Elementární jevy jsou reprezentovány body, které tvoří daný geometrický útvar. Přitom opět předpokládáme, že elementární jevy mají stejnou možnost nastat po vykonání náhodného pokusu

DEFINICE 3.4.1.: Pravděpodobnost jevu A, reprezentovaného oblastí $A \subset S$, se vypočítá jako podíl

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} ,$$

kde m(A) je míra množiny A a podobně m(S) je míra množiny S. Pro prostor dimenze 1 je m(A) délka, pro prostor dimenze 2 je m(A) obsah plochy a pro prostor dimenze 3 je m(A) objem tělesa.

3.5. Statistická definice pravděpodobnosti

Uvažujeme náhodný pokus P a sledujme náhodný jev A, který může nastat po provedení pokusu P. Zopakujme náhodný pokus P n-krát za stejných podmínek. Nechť m udává, kolikrát v dané sérii pokusů nastal jev A. Potom pravděpodobnost jevu A definujeme jako limitu podílu:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Tato definice je tzv. aposterioristická definice pravděpodobnosti, protože předpokládá nejdříve realizaci náhodného pokusu. Protože nemůžeme provést nekonečně mnoho pokusů, získáme podle této definice pouze odhad pravděpodobnosti. Tato definice však odstraňuje předpoklad, že každý elementární jev má stejnou možnost nastat.

4. PODMÍNĚNÁ PRAVDĚPODOBNOST

4.1. Definice podmíněné pravděpodobnosti

PŘÍKLAD 4.1.1.: Provedeme náhodný pokus hod kostkou. Ptáme-li se, jaká je pravděpodobnost, že na kostce padla šestka, je odpověď zřejmá. Podle klasické definice pravděpodobnosti víme, že pravděpodobnost náhodného jevu A (padnutí šestky) je rovna 1/6.
Nyní ale položíme jinou otázku. Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padla šestka, když víme, že určitě padlo sudé číslo ?

Řešení: Musíme nyní brát v úvahu ještě podmínku, která spočívá v informaci, že nastal náhodný jev B (padnutí sudého čísla na hrací kostce) a P(B) >0. Stojíme před problémem nově definovat pravděpodobnost pro tuto vzniklou situaci.
Vzhledem k tomu, že víme, že nastal jev B, zmenší se počet všech možných případů ze 6 na 3. Pak umíme podle klasické definice pravděpodobnosti vypočítat P*(A) = 1/3. P*(A) je pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal náhodný jev B. Abychom objasnili pojem podmíněné pravděpodobnosti, věnujme ještě před zavedením definice pozornost následující úvaze.
V příkladu 4.1.1. je dán základní prostor S = {1,2,3,4,5,6} a dva náhodné jevy A={6} a B={2,4,6}. Řešíme otázku, jak se změní pravděpodobnost náhodného jevu A, když víme, že po vykonání náhodného pokusu nastal jev B. Jestliže víme, že nastal jev B, můžeme ignorovat všechny ostatní elementární jevy, které nepatří do B (padnutí 1, 3, 5) a náhodný jev B považovat za nový základní prostor S*.
Podle věty 3.2.7 platí $P(B) = \sum_{e_i \in S^*} P(\{e_i\})$. Aby jev S* tvořil základní prostor, musí platit, že součet pravděpodobností všech elementárních jevů je roven 1. Toho dosáhneme tak, že v základním prostoru S* budeme místo pravděpodobnosti $P(\{e_i\})$ definovat pravděpodobnost

$$P^*(\{e_i\}) = \frac{P(\{e_i\})}{P(B)}$$

Pak platí: $P^*(S^*) = \sum\limits_{e_i \in S^*} P^*(\{e_i\}) = \dfrac{\sum\limits_{e_i \in B} P(\{e_i\})}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

Pravděpodobnost P*(A) náhodného jevu A za podmínky, že nastal náhodný jev B, vypočítáme podle věty 3.2.7. jako součet pravděpodobností těch elementárních e_i , které patří současně jevům A i B, tzn.

$$P^*(A) = \sum_{e_i \in A \cap B} P^*(\{e_i\}) = \frac{\sum\limits_{e_i \in A \cap B} P(\{e_i\})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Dále je nutné dokázat, že P* je pravděpodobnostní funkcí v duchu axiomatické definice pravděpodobnosti, tzn. že splňuje axiómy 1 až 3 této definice.

První axióm platí, protože $P^*(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$.

Platnost druhého axiómu byla již dokázána: $P^*(S^*) = 1$.

Nyní dokážeme platnost třetího axiómu. Předpokládejme, že A, C jsou dva disjunktní náhodné jevy, potom

$$P^*(A \cup C) = \sum_{e_i \in A \cup C} P^*(\{e_i\}) = \frac{\sum\limits_{e_i \in A \cup C} P(\{e_i\})}{P(B)} = \frac{\sum\limits_{e_i \in A} P(\{e_i\}) + \sum\limits_{e_i \in C} P(\{e_i\})}{P(B)} = P^*(A) + P^*(C)$$

Funkce P* splňuje všechny tři axiómy z definice 3.1.1., je tedy pravděpodobnostní funkcí. Budeme ji nazývat podmíněnou pravděpodobností. Pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B P*(A) budeme označovat $P(A|B)$.

DEFINICE 4.1.1.: Nechť A, B jsou 2 náhodné jevy, přičemž $P(B) > 0$. Pravděpodobnostní funkci $P(A|B)$, definovanou vztahem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

budeme nazývat **podmíněnou pravděpodobností** náhodného jevu A za podmínky, že nastal jev B.

4.2. Nezávislost náhodných jevů

Nechť A, B jsou dva náhodné jevy. Zajímá nás, jaký může být jejich vzájemný vztah. Mohou nastat dva případy: a) pravděpodobnost nastoupení jevu A je ovlivněna pravděpodobností nastoupení jevu B

b) pravděpodobnost nastoupení jevu A není ovlivněna pravděpodobností nastoupení jevu B

V prvním případě mluvíme o jevech závislých (vzájemně se ovlivňujících), ve druhém případě o jevech nezávislých.

Tento zatím intuitivně zavedený pojem vyjádříme přesně v následující definici.

DEFINICE 4.2.1.: Nechť A, B jsou dva náhodné jevy. Říkáme, že náhodné jevy A a B jsou nezávislé, když platí : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

O tom, jak se projevuje nezávislost náhodných jevů v podmíněné pravděpodobnosti, hovoří následující věta.

VĚTA 4.2.1.: Jestliže A, B jsou dva nezávislé náhodné jevy takové, že $P(B) \neq 0$, resp. $P(A) \neq 0$, potom platí:

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{resp.} \quad P(B|A) = P(B)$$

Důkaz : $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$ □

Druhý vztah dokážeme podobným způsobem.

Pro libovolné náhodné jevy A, B přímo z definice podmíněné pravděpodobnosti plyne:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Tyto vztahy nazýváme **pravidla pro násobení pravděpodobností**.

VĚTA 4.2.2.: Nechť A, B jsou nezávislé náhodné jevy. Pak i dvojice jevů $(\overline{A},\overline{B})$; $(\overline{A},B)$; $(A,\overline{B})$ jsou dvojice nezávislých náhodných jevů.

Důkaz: a) Dokážeme, že jevy $\overline{A},\overline{B}$ jsou nezávislé.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B) = 1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B) =$$

$$= [1-P(A)]\cdot[1-P(B)] = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$$

b) Dokážeme, že jevy $\overline{A},B$ jsou nezávislé.

Pro náhodné jevy A a B platí: $\overline{A}\cap B = [B - (A\cap B)]$

$B = (A\cap B)\cup[B-(A\cap B)]$ přičemž $(A\cap B)\cap[B-(A\cap B)] = \emptyset$

$P(\overline{A}\cap B) = P[B-(A\cap B)]$ a $P(B) = P(A\cap B) + P[B-(A\cap B)]$

$P(\overline{A}\cap B) = P[B-(A\cap B)] = P(B) - P(A\cap B) = P(B) - P(A)\cdot P(B) = P(B)\cdot(1-P(A)) = P(\overline{A})\cdot P(B)$ □

Nezávislost jevů $A,\overline{B}$ dokážeme obdobným způsobem.

VĚTA 4.2.3.: Nechť A je libovolný náhodný jev, S je jev jistý a $\emptyset$ je jev nemožný. Potom platí:

$$P(A\cap S) = P(A)\cdot P(S).$$
$$P(A\cap\emptyset) = P(A)\cdot P(\emptyset)$$

Důkaz : $P(A\cap S) = P(A) = P(A)\cdot 1 = P(A)\cdot P(S)$

$P(A\cap\emptyset) = P(\emptyset) = P(A)\cdot 0 = P(A)\cdot P(\emptyset))$ □

DEFINICE 4.2.2.: Říkáme, že jevy $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ jsou **nezávislé**, jestliže pro každou skupinu indexů $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k$,

$$2\le k\le n\text{, platí:}\quad P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P\left(A_{i_j}\right)$$

Poznámka.: Jestliže zjišťujeme nezávislost skupiny náhodných jevů (někdy hovoříme o tzv. skupinové nezávislosti), nestačí zjistit, že jsou po dvou nezávislé. Skupinová nezávislost a nezávislost po dvou nejsou shodné. Existují skupiny náhodných jevů, které jsou nezávislé po dvou a nejsou nezávislé skupinově. Naopak přímo z definice plyne, že jsou-li náhodné jevy $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ skupinově nezávislé, jsou nezávislé po dvou.

4.3. Věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta

Věta o úplné pravděpodobnosti se zabývá řešením speciálního typu úloh, kdy chceme znát pravděpodobnost určitého jevu A, jehož nastoupení je ale spojeno s nastoupením jevů $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Předpokládáme, že známe podmíněné pravděpodobnosti $P(A \mid C_i)$ a pravděpodobnosti jevů C_i, $i = 1,2, \ldots, n$.

VĚTA 4.3.1. (o úplné pravděpodobnosti): Nechť $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ je systém náhodných jevů, tvořících rozklad základního prostoru S a A je libovolný náhodný jev, $A\subset S$. Pak platí:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)\cdot P(C_i)$$

Důkaz : $A = A\cap S = A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(A\cap C_i)$

Protože jevy $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ jsou disjunktní, budou disjunktní i jevy $\{A\cap C_i\}_{i=1}^{n}$ a podle důsledku věty 3.2.6. můžeme psát $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap C_i)$. Použitím pravidla o násobení pravděpodobností dostáváme :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)\cdot P(C_i).$$ □

Jiné typy úloh je možné řešit pomocí Bayesovy věty. Předpokládáme, že známe pravděpodobnosti jevů C_i a podmíněné pravděpodobnosti $P(A \mid C_i)$, kde $i = 1,2, \ldots, n$. Cílem je pak stanovit pravděpodobnost některého z těchto jevů C_i, i = 1,2, ... ,n, po provedení náhodného pokusu, víme-li, že přitom nastal uvedený náhodný jev A. Tuto pravděpodobnost nazýváme někdy aposteriorní .

VĚTA 4.3.2.(Bayesova): Nechť $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ je systém náhodných jevů, tvořících rozklad základního prostoru S. Nechť A je libovolný náhodný jev takový, že $P(A) \neq 0$. Pak platí:

$$P\left(C_j|A\right) = \frac{P\left(A|C_j\right) \cdot P\left(C_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A|C_i\right) \cdot P\left(C_i\right)}$$

Důkaz : $P(C_j \mid A) = \dfrac{P(C_j \cap A)}{P(A)}$

Použitím pravidla o násobení pravděpodobností a na základě věty o úplné pravděpodobnosti dostáváme:

$$P\left(C_j|A\right) = \frac{P\left(A|C_j\right) \cdot P\left(C_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(A|C_i\right) \cdot P\left(C_i\right)} \qquad \square$$

5. OPAKOVANÉ POKUSY

Provedeme náhodný pokus P. Zopakujeme-li tento náhodný pokus několikrát, říkáme, že jsme vytvořili posloupnost opakovaných pokusů. Základní úlohou z této oblasti je nalezení pravděpodobnosti, že při n opakováních náhodného pokusu nastane náhodný jev A m-krát a v ostatních případech jev A nenastane.

5.1. Bernoulliho nezávislé opakované pokusy

Nyní se budeme zabývat jen takovými opakovanými pokusy, při nichž pravděpodobnost, že určitý výsledek nastane v k-tém pokusu, není ovlivněná výsledky předcházejících pokusů. To znamená, že budeme požadovat, aby jednotlivé pokusy byly nezávislé. Takové pokusy nazýváme nezávislé opakované pokusy.
Jednoduchým příkladem nezávislých opakovaných pokusů je opakované házení mincí, házení hrací kostkou, vybírání prvků z nějakého souboru, pokud vybraný prvek vrátíme vždy zpět atd.

Dále předpokládáme, že náhodný pokus P má pouze dva výsledky A a $\overline{A}$, přičemž náhodný jev A nastává s pravděpodobností p a náhodný jev $\overline{A}$ s pravděpodobností 1 - p = q. Náhodný jev A se obvykle nazývá úspěch, náhodný jev $\overline{A}$ neúspěch. Počítáme pravděpodobnost, že při n-násobném opakování náhodného pokusu nastane úspěch právě m-krát ($m \leq n$). Je-li určeno, jaké má být pořadí jevů A a $\overline{A}$ (např. v prvních m pokusech nastane jev A a v dalších n - m pokusech nastane jev $\overline{A}$, potom na základě pravidla o násobení pravděpodobností je tato pravděpodobnost rovna $p^m \cdot q^{n-m}$. Stejnou pravděpodobnost mají i všechna jiná pořadí jevů A a $\overline{A}$. Různá pořadí jsou disjunktními jevy a jejich počet je $\binom{n}{m}$. Označíme-li potom symbolem $P_n(m)$ pravděpodobnost, že při n nezávislých pokusech nastane jev A právě m-krát, platí:

$$P_n(m) = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Poznámka 1: Této posloupnosti náhodných jevů s odvozenými pravděpodobnostmi říkáme Bernoulliho schéma.
Poznámka 2: Výše uvedený vztah pro výpočet pravděpodobnosti nezávislých opakovaných pokusů nazýváme binomické rozdělení pravděpodobností.

Problém: Zajímá nás otázka, jaká bude pravděpodobnost náhodného jevu, že při n pokusech nastane úspěch minimálně m_1-krát, maximálně však m_2 -krát. Tuto pravděpodobnost budeme značit $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ a vypočítáme ji podle následujícího vztahu:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Tento vztah plyne z věty o sčítání pravděpodobností, protože se jedná o pravděpodobnost sjednocení disjunktních jevů.

5.2. Zevšeobecněné nezávislé opakované pokusy

Bernoulliho schéma můžeme zevšeobecnit dvěma způsoby.

A) Při prvním zevšeobecnění budeme uvažovat, že náhodný pokus má k po dvou různých disjunktních výsledků A_1 ,A_2, …, A_k, kterých nabývá s pravděpodobnostmi p_1, p_2, … , p_k. Budeme hledat pravděpodobnost jevu $A_{m_1,m_2,\dots,m_k}$, který znamená, že v sérii n nezávislých opakovaných pokusů nastane jev A_1 m_1-krát, jev A_2 m_2-krát atd. až jev A_k m_k-krát, přičemž $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

Platí: $$P_n(m_1, m_2, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot ... \cdot m_k!} \cdot p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$$

B) Při druhém zevšeobecnění budeme uvažovat, že náhodný pokus P má dva výsledky A a $\overline{A}$, přičemž pravděpodobnosti jejich nastání p a q se pokus od pokusu mění. To znamená, že při i-tém opakování náhodného pokusu P budou pravděpodobnosti jevů A a $\overline{A}$ rovny číslům p_i a q_i, přičemž zůstává v platnosti rovnost $p_i + q_i = 1$. Budeme opět hledat pravděpodobnost $P_n(m)$, to je pravděpodobnost, že při n nezávislých opakováních náhodného pokusu P nastane úspěch právě m-krát.

Pravděpodobnost $P_n(m)$ můžeme vyjádřit jako součet součinů:

$P_n(m) =(p_1 p_2 ... p_m q_{m+1} q_{m+2} ... q_n)+(p_1q_2 p_3 ...p_m q_{m+1}q_{m+2} ...q_{n-1} p_n)+... +(q_1 q_2 ... q_{n-m} p_{n-m+1} p_{n-m+2}...p_{n-1}p_n)$

Roznásobením se snadno přesvědčíme, že výše uvedený součet součinů dostaneme jako koeficient u m-té mocniny proměnné x funkce

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(q_i + x \cdot p_i \right)$$

kde x je proměnná. Funkci φ(x) nazýváme vytvořující funkce pravděpodobnosti $P_n(m)$.

5.3. Závislé pokusy

Závislými pokusy nazýváme takové opakované pokusy, při nichž je pravděpodobnost, že jev nastane v určitém pokusu, závislá na výsledcích pokusů předcházejících. Obvykle pod pojmem závislé pokusy rozumíme schéma výběru bez vracení, které můžeme obecně popsat následujícím způsobem:

Je dán soubor N prvků, z nichž M má sledovaný znak a N - M prvků tento znak nemá. Postupně vybíráme n prvků, přičemž žádný prvek nevracíme zpět. Pro dosud nevybrané prvky je stejná pravděpodobnost vybrání v každém tahu. Úkolem je zjistit pravděpodobnost, že bude vybráno m prvků se sledovaným znakem a n - m prvků, které tento znak nemají.

Podle klasické definice vypočítáme, že

$$P_n(m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$ za podmínek $m \le M$, $m \le n$, $n - m \le N - M$.

Poznámka 1: Toto rozdělení pravděpodobností se nazývá hypergeometrické.

6. NÁHODNÁ VELIČINA

6.1. Náhodná veličina a její rozdělení pravděpodobností

Problém objasnění pojmu náhodné veličiny se pokusíme vysvětlit na následujícím příkladu. Představme si situaci, že se mladí manželé rozhodnou mít tři děti. Otázka, kterou řešíme, je, jakého pohlaví budou tyto tři děti. Narození dítěte, jak je již známo, můžeme považovat za náhodný pokus. Budeme pro jednoduchost předpokládat, že pravděpodobnost narození děvčátka i chlapce je stejná a je rovna 0,5. Následující tabulka uvádí množinu všech elementárních jevů s příslušnými pravděpodobnostmi. Písmeno D znamená narození děvčátka, písmeno CH narození chlapce.

e_i	D,D,D	D,D,CH	D,CH,D	CH,D,D	CH,CH,D	CH,D,CH	D,CH,CH	CH,CH,CH
$P(e_i)$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Tento způsob zpracování výsledku náhodného pokusu “narození tří dětí“ má podstatnou nevýhodu. Uvedené výsledky náhodného pokusu nenabývají číselných hodnot a v této podobě jsou dále obtížně zpracovatelné.

Z tohoto důvodu položíme otázku jiným způsobem tak, abychom výsledky náhodného pokusu mohli vyjádřit v číselné formě. Nabízí se např. otázka, kolik chlapců bude v rodině se třemi dětmi? Výsledky náhodného pokusu budou pak nabývat hodnot 0, 1, 2, 3. V tabulce jsou pak uvedeny i příslušné pravděpodobnosti.

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Tímto postupem jsme vlastně zobrazili množinu všech elementárních jevů, tzn. celý základní prostor, do množiny reálných čísel. Každému z těchto reálných čísel jsme přiřadili pravděpodobnost, rovnou součtu pravděpodobností těch elementárních jevů, které se do tohoto čísla zobrazily. Toto zobrazení se nazývá náhodná veličina. Funkci $p(x_i)$, která každé hodnotě náhodné veličiny přiřadí pravděpodobnost, se kterou náhodná veličina této hodnoty nabude, nazýváme rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny. Náhodná veličina je tedy z hlediska pravděpodobnosti úplně popsána, známe-li její hodnoty nebo intervaly hodnot a pravděpodobnosti těchto hodnot, resp. intervalů.

Druhý uvedený přístup k předloženému problému má dvě podstatné výhody. Jednak je možné výsledky, vyjádřené v číselné formě, dále zpracovávat. Druhou výhodou je, že můžeme nalézt řadu dalších náhodných pokusů, které se sice svojí podstatou liší, nicméně vedou na stejnou tabulku rozdělení pravděpodobností. Čili vlastnosti, odvozené z naší druhé tabulky, platí nejen pro pokus narození tří dětí, ale i např. pro hod třemi mincemi. Dále nás tedy nezajímá fyzikální podstata náhodného pokusu, ale pouze číselné hodnoty, kterých může nabývat jakási “fiktivní “ veličina a pravděpodobnosti, s kterými těchto hodnot nabývá. Jinými slovy, zajímá nás náhodná veličina a její rozdělení pravděpodobností.
Nyní přistoupíme k definování pojmu náhodná veličina. Z toho, co bylo řečeno, čtenář již asi tuší, že náhodnou veličinou by mělo být zobrazení základního prostoru do množiny reálných čísel. Vzhledem k tomu, že nepředpokládáme, že by čtenář tohoto textu byl seznámen s pojmem měřitelné funkce, nelze zavést přesnou definici náhodné veličiny.

DEFINICE 6.1.1. : **Náhodnou veličinou** budeme nazývat takovou veličinu, která nabývá své hodnoty v závislosti na výsledku náhodného pokusu. Hodnoty náhodné veličiny jsou reálná čísla.

Poznámka 1. : Přesně je náhodná veličina definována jako libovolné, borelovsky měřitelné zobrazení X základního prostoru S do množiny reálných čísel R.
Protože prakticky každé zobrazení, se kterým se běžně setkáváme, je borelovsky měřitelné, můžeme definici zjednodušit tímto způsobem:
Náhodnou veličinou nazýváme libovolné **zobrazení X** základního prostoru do množiny reálných čísel.

Poznámka 2. : Elementární jevy jsou nyní reálná čísla. Základní prostor S je množina reálných čísel. Náhodné jevy jsou podmnožiny reálné přímky ve tvaru intervalů nebo útvarů, které z nich mohou vzniknout jejich vzájemnými průniky, sjednoceními nebo doplňky, přičemž tvoří pole náhodných jevů.

Poznámka 3.: Náhodné veličiny budeme označovat velkými tiskacími písmeny (X, Y apod.), v případě velkého počtu náhodných veličin písmeny s indexy (X_1, X_2 apod.). Malým písmenem (x, y atd.) značíme hodnoty, kterých může náhodná veličina nabývat.

K poznání pravděpodobnostních zákonitostí, kterými se řídí náhodná veličina, je nutné vymezit její pole náhodných jevů a pravděpodobnostní funkci P, definovanou na tomto poli. Pravděpodobnostní funkci P, příslušející náhodné veličině X, budeme nazývat rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X. Zamyslíme-li se nad tím, jak složitě může pole náhodných jevů vypadat (mohou to být různé podmnožiny reálné přímky), je zřejmé, že by mohlo být obtížné vyjádřit funkci P v explicitním tvaru. Proto se hledaly jednodušší způsoby vyjádření rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny. Jedním z nich je distribuční funkce. Tento pojem můžeme zavést díky tomu, že náhodné jevy jsou nyní reprezentovány podmnožinami reálné přímky.

DEFINICE 6.1.2. : **Distribuční funkcí** náhodné veličiny X budeme nazývat reálnou funkci F, definovanou na množině všech reálných čísel R vztahem $F(x) = P(X < x)$.

Zápis $P(X < x)$ znamená $P(-\infty < X < x)$ neboli $P(X \in (-\infty, x))$.

Mezi distribuční funkcí a rozdělením pravděpodobností náhodné veličiny existuje vzájemně jednoznačný vztah. Různé náhodné veličiny mají různé distribuční funkce. Existují ale vlastnosti, které jsou společné všem distribučním funkcím. Tyto vlastnosti jsou vyjádřeny v následující větě.

VĚTA 6.1.1. : Nechť F je distribuční funkce náhodné veličiny X .
Pak platí:
a) $F(x) \geq 0$ pro každé $x \in R$ (distribuční funkce je nezáporná)
b) $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ (distribuční funkce je neklesající)
c) $\lim_{x \to x_0^-} F(x) = F(x_0)$ pro každé $x_0 \in R$ (distribuční funkce je spojitá zleva)
d) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
e) Distribuční funkce má nejvýše spočetně bodů nespojitosti

Důkaz:
a) Podle definice distribuční funkce platí: $F(x) = P(X < x)$. Podle prvního axiómu z axiomatické definice pravděpodobnosti platí: $P(A) \geq 0$. Pak $F(x) = P(X < x) \geq 0$.
b) Pro každé $x_1 < x_2$ platí $(-\infty, x_1) \subset (-\infty, x_2)$. Podle věty 3.2.4. můžeme psát:
$F(x_1) = P(X \in (-\infty, x_1) \leq P(X \in (-\infty, x_2) = F(x_2)$.
c) Důkaz této vlastnosti vynecháme, protože nemáme dostatečný matematický aparát.
d) Protože nerovnost $X < \infty$ je jev jistý, je pak $P(X < \infty) = F(\infty) = 1$
Nerovnost $X < -\infty$ je jev nemožný, pak $P(X < -\infty) = F(-\infty) = 0$
e) Označme A množinu bodů nespojitosti dané distribuční funkce. Pak $A = \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n$, kde A_n je množina bodů nespojitosti se skokem větším než 1/n, kde n = 2, 3, ...
Z vlastností a), b), d) distribuční funkce vyplývá, že A_n obsahuje nejvýše n - 1 bodů. Množina A je tedy nejvýše spočetná jako sjednocení spočetně mnoho konečných množin.

Poznámka 4: Místo limity $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ budeme někdy používat stručného označení

$$F(-\infty) = 0 \text{ a } F(\infty) = 1.$$

VĚTA 6.1.2. : Každá reálná funkce F, definovaná na množině všech reálných čísel, splňující podmínky věty 6.1.1., je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny X.
Důkaz : Neprovádíme, neboť nemáme vybudovaný dostatečný matematický aparát.

Další vlastnosti distribuční funkce popisuje následující věta. Uvádíme ji opět bez důkazu.

VĚTA 6.1.3. : Nechť F je distribuční funkcí náhodné veličiny X. Potom pro každé a < b (a,b∈R) platí:

$$P\left(X \in \langle a,b)\right) = F(b) - F(a)$$

$$P\left(X = a\right) = \lim_{x\to a^+} F(x) - F(a)$$

$$P\left(X \in (a,b)\right) = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

$$P\left(X \in \langle a,b\rangle\right) = \lim_{x\to b^+} F(x) - F(a)$$

$$P\left(X \in (a,b\rangle\right) = \lim_{x\to b^+} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

Poznámka 5: Pravděpodobnost P(X = a) nazýváme skok distribuční funkce v bodě a. Jestliže P(X = a) ≠ 0, pak bod a je bodem nespojitosti distribuční funkce F.

V další části se budeme zabývat dvěma speciálními typy náhodných veličin, které mají pro aplikace zvláště velký význam. V praxi se snažíme aproximovat každou náhodnou veličinu právě jedním z těchto typů. Jsou to náhodné veličiny diskrétního nebo spojitého typu.

Kromě těchto základních typů existují i náhodné veličiny, které nelze zařadit ani mezi nespojité, ani mezi spojité. Význam těchto náhodných veličin v praxi je malý, a proto jim nebudeme věnovat pozornost.

6.2. Náhodná veličina diskrétního typu

DEFINICE 6.2.1. : Říkáme, že náhodná veličina X je **diskrétní**, jestliže nabývá jen spočetně mnoha hodnot.

Rozdělení pravděpodobností diskrétní náhodné veličiny je možné popsat buď výčtem pravděpodobností jejích hodnot nebo distribuční funkcí F.

Náhodná veličina nabývá při jednom pokusu právě jedné hodnoty, takže všechny její hodnoty tvoří rozklad základního prostoru a tedy součet pravděpodobností všech možných hodnot x_i je roven jedné. Proto pro pravděpodobnosti $p(x_i)$ všech hodnot diskrétní náhodné veličiny X platí vztah

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

Víme, že náhodné jevy jsou intervaly nebo útvary z nich složené. Na základě věty 3.2.7. vypočítáme pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty z intervalu $\langle a,b)$.

$$P\left(X \in \langle a,b)\right) = \sum_{a\le x_i<b} p(x_i)$$

Pravděpodobnostní funkci P je možné vyjádřit dvěma způsoby:

a) Matematickou formulí, tzn. funkcí p(x) = P(X = x)

b) Tabulkou, ve které jsou všem možným hodnotám x_i náhodné veličiny X přiřazeny pravděpodobnosti $p(x_i)$.

$\mathbf{x_i}$	x_1	x_2	...	x_n	...	$\sum$
$\mathbf{p(x_i)}$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...	$p(x_n)$	...	1

Distribuční funkce F náhodné veličiny X je pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny X bude ležet v intervalu $(-\infty, x)$. Pro libovolnou hodnotu x∈(-∞; ∞) ji vypočítáme podle vztahu

$$F(x) = \sum_{x_i<x} p(x_i)$$

Z uvedeného vyplývá, že distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny mění své hodnoty skoky. Místa skoků jsou určena hodnotami x_1, x_2,.... , přičemž velikost skoku v bodě x_i se rovná pravděpodobnosti $p(x_i)$. Mezi dvěma následujícími body skoků x_i a x_{i+1} je distribuční funkce konstantní. Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny je schodovitá funkce.

6.3. Náhodná veličina spojitého typu

DEFINICE 6.3.1. : Náhodná veličina X je **spojitá**, jestliže existuje taková nezáporná funkce f, že pro každé $a \le b$, $(a,b \in R)$, platí : $P\left(X \in \langle a,b\rangle\right) = P\left(X \in (a,b)\right) = \int_a^b f(x)\,dx$

Funkci f nazýváme hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

Poznámka 1: Integrál $\int_a^b f(x)dx$ by měl být chápán jako Lebesgueův integrál. Vzhledem k tomu, že u čtenáře nepředpokládáme znalost pojmů měřitelné množiny, míry a měřitelné funkce, nemůžeme operovat s funkcemi integrovatelnými v Lebesguově smyslu. Proto integrál $\int_a^b f(x)dx$ budeme chápat jako Riemannův integrál. Od funkce f pak musíme požadovat, aby byla integrace schopná. Tím zúžíme třídu spojitých náhodných veličin, protože Riemannovsky integrovatelná funkce nemusí existovat pro každou náhodnou veličinu.
Poznámka 2: Je nutné rozlišovat pravděpodobnost a funkci f, kterou nazýváme hustota pravděpodobnosti. Hustota pravděpodobnosti může nabývat i hodnot větších než 1.

Distribuční funkce je definována jako pravděpodobnost intervalu $(-\infty, x)$, proto ji můžeme ve spojitém případě vyjádřit jako integrál z hustoty pravděpodobnosti

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

Z výše uvedeného vztahu vyplývá, že v bodech spojitosti funkce F platí:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Vlastnosti hustoty pravděpodobnosti jsou formulovány v následujících větách:
VĚTA 6.3.1. : Nechť funkce f je hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X. Pak platí :

$$\text{a)}\, f(x) \ge 0$$

$$\text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Důkaz: a) Důkaz plyne přímo z definice, neboť předpokládáme existenci nezáporné funkce f.
b) Na základě vztahů $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ platí: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P\left(X \in (-\infty,\infty)\right) = 1$

VĚTA 6.3.2.: Každá spojitá (až na konečně mnoho bodů), reálná funkce f reálné proměnné x, splňující vlastnosti předchozí věty, je hustotou pravděpodobnosti některé náhodné veličiny X.
Důkaz: Pro provedení důkazu není vybudován dostatečný matematický aparát.

VĚTA 6.3.3.: Nechť X je spojitá náhodná veličina. Potom platí: $P(X = x_0) = 0$
(Pravděpodobnost, že spojitá náhodná veličina nabyde jen jedné hodnoty, je rovna nule.)
Důkaz: Na základě dříve uvedeného vztahu $P\left(X = a\right) = \lim_{x\to a^+} F(x) - F(a)$ a definice distribuční funkce spojité náhodné veličiny $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$ můžeme dokázat, že:

$$P\left(X = x\right) = \lim_{x\to x_0^+} F(x) - F(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du - \int_{-\infty}^{x_0} f(u)\,du = 0 \qquad \square$$

7. NĚKTERÉ DŮLEŽITÉ TYPY ROZDĚLENÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ

Rozdělení pravděpodobností náhodných veličin je v literatuře zřídka uvedeno ve formě distribuční funkce. Diskrétní rozdělení pravděpodobností se uvádějí většinou pomocí vzorců, ze kterých dosazením hodnoty náhodné veličiny x_i dostaneme její pravděpodobnost $p(x_i)$. Spojitá rozdělení pravděpodobnosti se vyjadřují pomocí hustoty pravděpodobnosti.

V této kapitole je uveden přehled vybraných diskrétních i spojitých rozdělení pravděpodobností včetně jejich popisu, základních vlastností, střední hodnoty a disperze. Je zřejmé, že uvedením střední hodnoty (EX) a disperze (DX) pro jednotlivá rozdělení pravděpodobností nelogicky předbíháme posloupnost jednotlivých témat a že čtenář není s těmito pojmy dosud seznámen. Snažili jsme se ale uvést kompletní a ucelený přehled jednotlivých rozdělení pravděpodobností a očekáváme, že se čtenář bude během studia k této kapitole vracet.

7.1. Rozdělení pravděpodobností diskrétních náhodných veličin

7.1.1. Alternativní rozdělení pravděpodobností

Toto rozdělení je charakterizováno jediným parametrem $p \in (0;1)$. Náhodná veličina X nabývá jen dvou hodnot, 0, nenastane-li sledovaný jev, nebo 1, jestliže jev nastane. Potom

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = q \qquad \text{kde } q = 1 - p$$

Pravděpodobnostní funkce P je definována: $P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}$ pro $k = 0,1$

$EX = p$, $DX = pq$

Alternativní rozdělení pravděpodobností je zvláštním případem binomického rozdělení pro n=1.

7.1.2. Geometrické rozdělení pravděpodobností

Je charakterizováno jediným parametrem $p \in (0;1)$. Náhodná veličina X nabývá celých nezáporných hodnot, pravděpodobnostní funkce P je definována vztahem

$$P(X = k) = p^k q \qquad k = 0, 1, 2, ... \qquad q = 1 - p$$

$$EX = \frac{p}{q} \qquad DX = \frac{p}{q^2}$$

Typické použití : Pravděpodobnost úspěšnosti pokusu je p. Ptáme se, kolik úspěšných pokusů bude předcházet prvnímu neúspěšnému pokusu.

7.1.3. Binomické rozdělení pravděpodobností

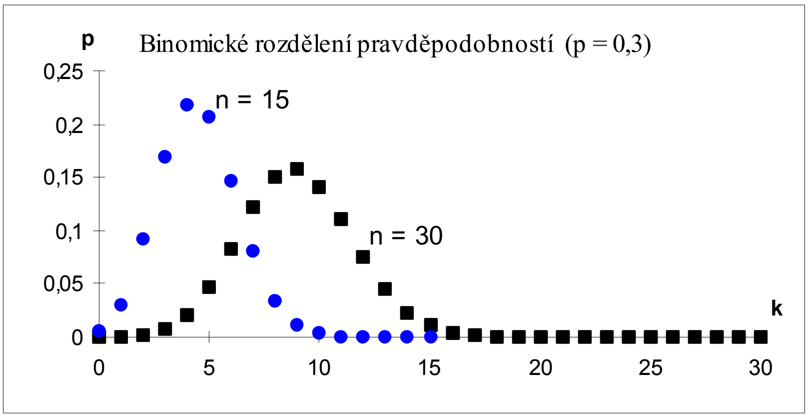
Je charakterizováno dvěma parametry p, n, kde $p \in (0;1)$ a $n \in N$. Náhodná veličina X nabývá celých nezáporných hodnot až do n. Pravděpodobnostní funkce P je definována vztahem

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2,...,n \qquad q = 1 - p$$

$EX = np$, $DX = npq$

Typické použití : Pravděpodobnost, že pokus bude úspěšný, je p. Ptáme se, kolik bude úspěšných pokusů při n nezávislých opakováních pokusu.

Binomické rozdělení pravděpodobností je rozdělením součtu n nezávislých náhodných veličin, řídících se stejným alternativním rozdělením.



Obr.č.7.1.

7.1.4. Hypergeometrické rozdělení pravděpodobností

Je charakterizováno třemi parametry N, M, n, kde M, N, n jsou přirozená čísla, splňující následující podmínky: N > M, N > n, M > m, N - M > n - m. Náhodná veličina X nabývá celých nezáporných hodnot až po n (X = 0, 1, 2,....,n). Pravděpodobnostní funkce je definována vztahem:

$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \qquad m = 0, 1, 2, ..., n$$

$$EX = n \cdot \frac{M}{N} \qquad DX = n \cdot \frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Typické použití : Celkový rozsah souboru je N prvků, z nichž M má námi sledovanou vlastnost. Provedeme výběr n prvků, přičemž vybraný prvek zpět do souboru nevracíme. Ptáme se, kolik vybraných prvků bude mít sledovanou vlastnost.

7.1.5. Poissonovo rozdělení pravděpodobností

Je charakterizováno jedním parametrem $\lambda > 0$. Náhodná veličina X nabývá všech celých nezáporných hodnot (X = 0,1,2,...). Pravděpodobnostní funkce P je definovaná vztahem:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2,.....$$

$EX = \lambda$ $\qquad$ $DX = \lambda$

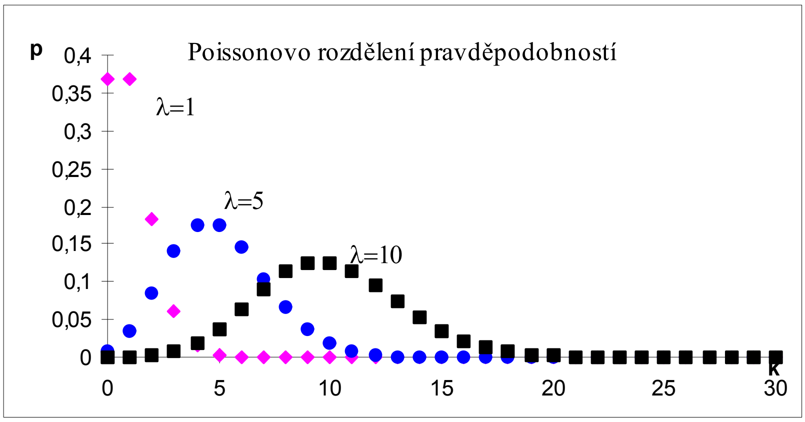
Typické použití :

Poissonovo rozdělení pravděpodobností udává pravděpodobnost, že při velkém počtu nezávislých pokusů se sledovaný jev vyskytne k-krát, když pravděpodobnost, že tento jev nastane v jednom pokusu, je velmi malá.

Poissonovo rozdělení dobře aproximuje rozdělení binomické za podmínek, že $p \le 0{,}1$ a $n > 30$.

Tímto rozdělením lze vyjádřit rozdělení počtu výskytu jevu v časovém intervalu, kde λ je střední hodnota počtu výskytů jevu ze jednotku času (např. počet poruch zařízení za 500 hodin provozu, počet zákazníků, vstupujících do určité stanice obsluhy za 1 hodinu, počet částic v jednotce plochy nebo objemu, počet telefonních hovorů, spojovaných operátorkou v telefonní ústředně za 15 minut apod.).

Lze dokázat, že rozdělení pravděpodobností součtu nezávislých náhodných veličin, majících Poissonovo rozdělení, je též Poissonovým rozdělením.



Obr.č.7.2.

7.2. Rozdělení pravděpodobností spojitých náhodných veličin

Dříve, než se budeme zabývat konkrétními rozděleními pravděpodobností, zopakujeme dvě důležité funkce.

Gama funkce je definována vztahem:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \qquad \text{pro každé } p > 0$$

Uvedeme bez důkazu některé její nejdůležitější vlastnosti :

$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ $\quad$ $p>0$

$\Gamma(p) = (p-1)!$ $\quad$ p je celé kladné číslo

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Beta funkce je definována vztahem

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx \qquad a > 0, \quad b > 0$$

Lze dokázat, že platí : $\quad B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

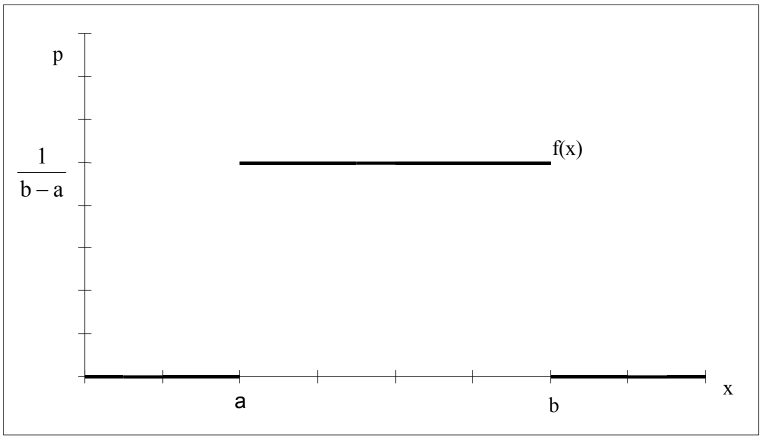
7.2.1. Rovnoměrné rozdělení pravděpodobností

Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení pravděpodobností, má-li konstantní hustotu pravděpodobnosti v intervalu hodnot, kterých může nabývat.

Toto rozdělení je charakterizováno dvěma parametry a, b, pro které platí $-\infty < a < b < \infty$. Hustota pravděpodobnosti f je definována:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & x \notin \langle a, b \rangle \end{cases}$$

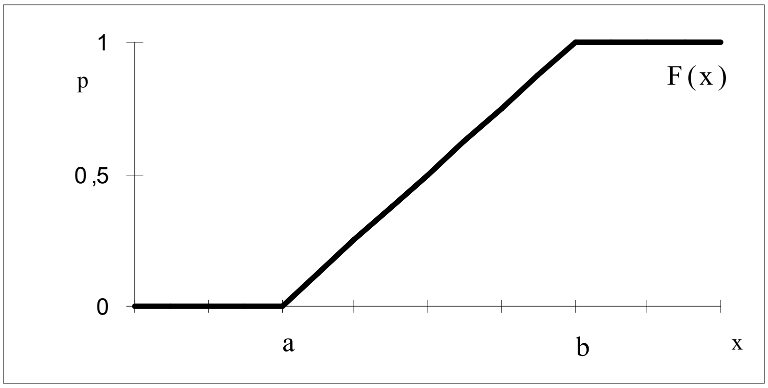
Její průběh vypadá následovně:



Obr.č.7.3. Hustota pravděpodobnosti rovnoměrného rozložení pravděpodobností

Distribuční funkce má tvar: $$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in \langle a, b \rangle \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Její průběh je znázorněný na obrázku :



Obr.č.7.4. Distribuční funkce rovnoměrného rozložení pravděpodobností

$EX = \dfrac{a+b}{2}$ $\qquad DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

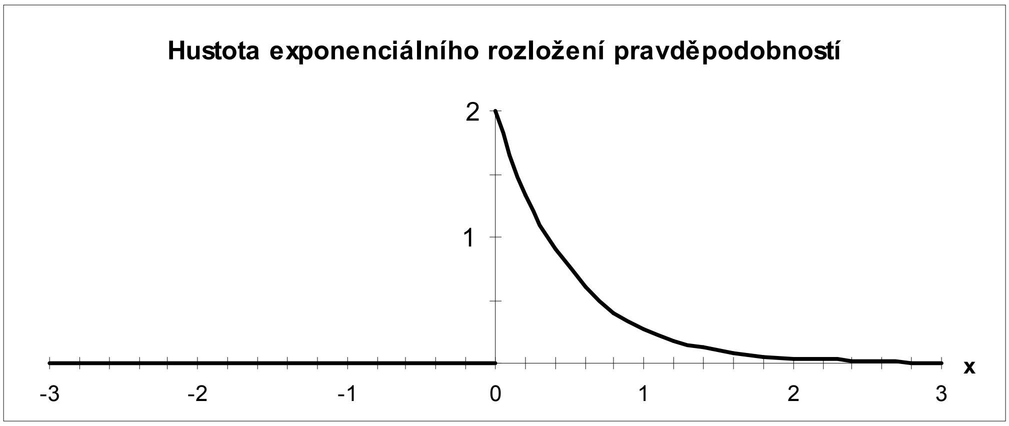
Rovnoměrným rozdělením se řídí náhodné veličiny, které mají stejnou možnost nabýt libovolné hodnoty z nějakého konečného intervalu (chyby při zaokrouhlování čísel, doby čekání na to, že nastane pravidelně se opakujícího jev, apod.).

7.2.2. Exponenciální rozdělení pravděpodobností

Je charakterizováno jedním parametrem μ. Parametr μ je libovolné kladné číslo. Hustota pravděpodobnosti je definována vztahem:

$$f(x) = \begin{cases} \mu \cdot e^{-\mu x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Její graf pro parametr $\mu = 2$ vypadá následovně:

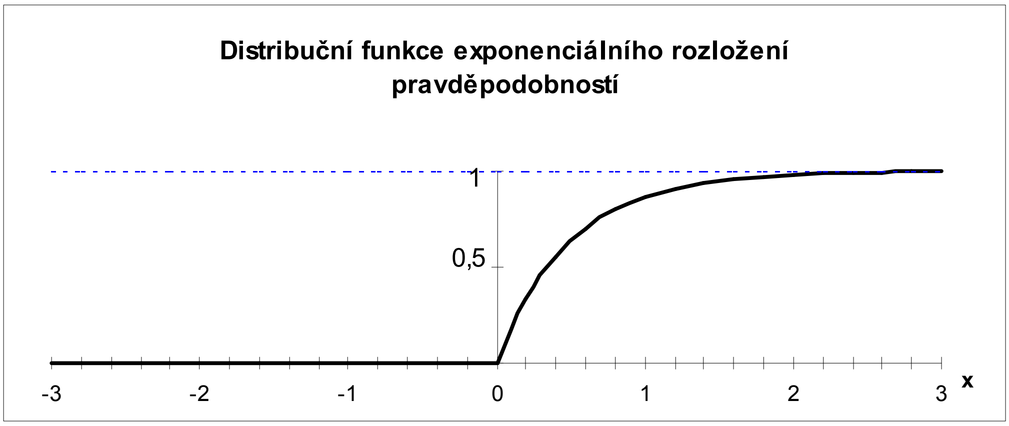


Obr.č.7.5.

Distribuční funkce je potom dána vztahem:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Její průběh pro parametr $\mu = 2$ je znázorněn na následujícím obrázku.



Obr.č.7.6.

$$EX = \frac{1}{\mu} \qquad DX = \frac{1}{\mu^2}$$

Typické použití : Exponenciálním rozdělením se řídí životnost zařízení, která nepodléhají opotřebení a k jejichž destrukci dochází náhle. Dále tomuto rozdělení podléhá doba obsluhy nebo doby mezi příchody dvou prvků k obsluze v systémech hromadné obsluhy. Lze dokázat, že má-li počet prvků, které přijdou k obsluze za určitou dobu, Poissonovo rozdělení, pak doba mezi jejich příchody k obsluze se řídí exponenciálním rozložením pravděpodobností.

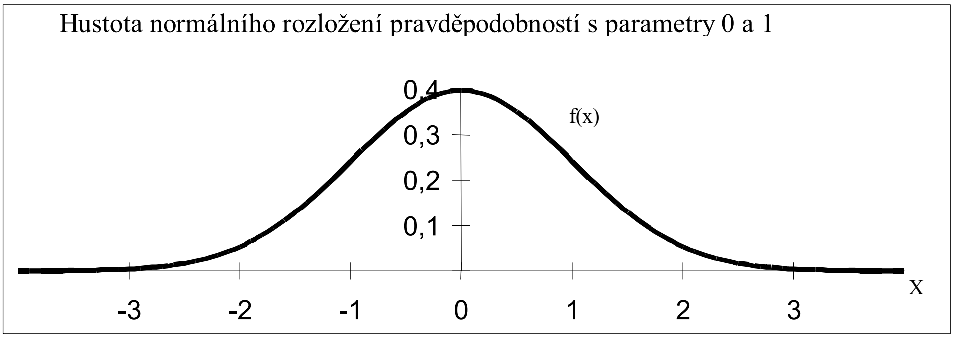
7.2.3. Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobností

Normální rozdělení je považováno za nejdůležitější rozdělení spojité náhodné veličiny. Za určitých podmínek můžeme tímto rozdělením aproximovat některá diskrétní rozdělení.

Normální rozdělení je charakterizováno dvěma parametry μ, σ , kde $-\infty < \mu < \infty$ a $0 < \sigma < \infty$. Hustota pravděpodobnosti je dána vztahem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty , \infty)$$

Její průběh pro parametry $\mu = 0$ a $\sigma = 1$ je znázorněný na obrázku:

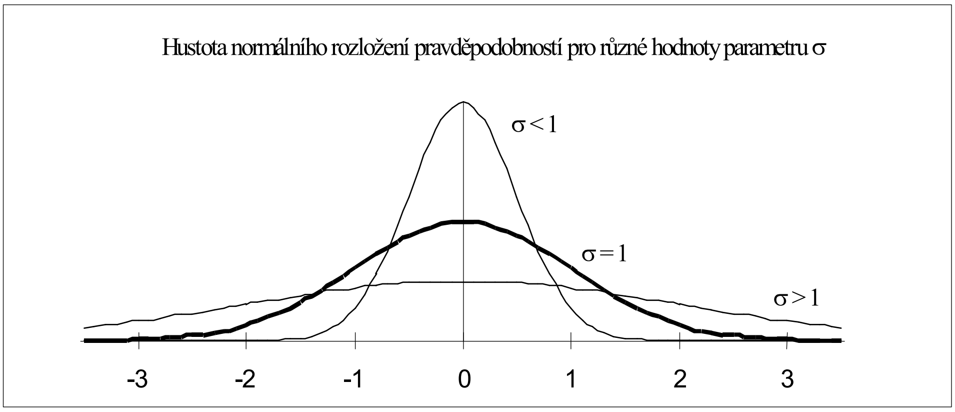


Obr.č.7.7.

Z analytického vyjádření hustoty pravděpodobnosti můžeme vyvodit její následující vlastnosti:

- je symetrická vzhledem k parametru μ
- v bodě μ nabývá maxima pro dané σ
- velikost maxima je nepřímo úměrná velikosti parametru σ
- inflexní body jsou $\mu - \sigma$ a $\mu + \sigma$

Z výše uvedeného vyplývá, že parametr μ posouvá graf hustoty pravděpodobnosti ve směru osy x, parametr σ určuje jeho průběh. Čím je σ menší, tím je graf "užší a vyšší", čím je σ větší, tím je graf "širší a nižší". Tuto závislost znázorňuje následující obrázek.



Obr.č.7.8.

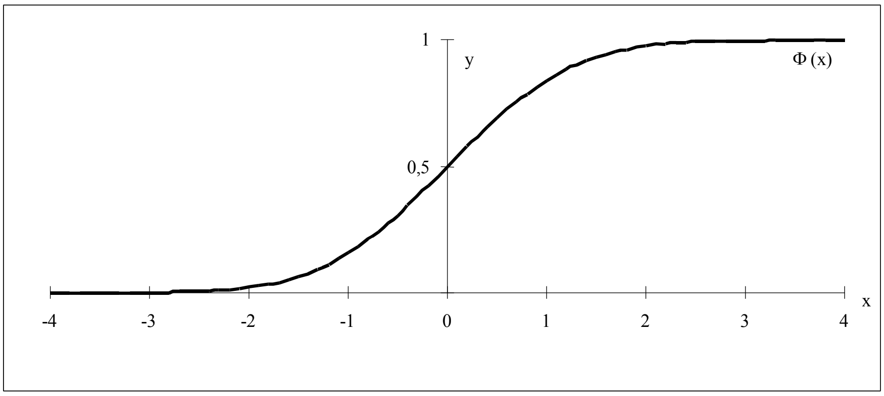
Distribuční funkce $F_{\mu,\sigma}$ normálního rozdělení pravděpodobností s parametry μ a σ je definována vztahem:

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dy$$

Integrál na pravé straně neumíme vypočítat analyticky, distribuční funkci $F_{\mu,\sigma}$ nemůžeme vyjádřit pomocí vzorce, jak jsme učinili například u exponenciálního rozdělení pravděpodobností. Její hodnoty jsou proto počítány numericky a jsou tabelované. Pro libovolné parametry μ a σ by bylo nutné sestavit velké množství tabulek. Tento problém je řešen tak, že se za základ bere normální rozdělení pravděpodobností s parametry $\mu = 0$ a $\sigma = 1$ a tabeluje se jen jeho distribuční funkce. Toto rozdělení pravděpodobností se nazývá **normální normované rozdělení pravděpodobnosti** a značí se N(0,1). Hustota pravděpodobnosti má tvar:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Distribuční funkci normovaného rozdělení pravděpodobností budeme značit $\Phi(x)$.



Obr.č.7.9. Distribuční funkce N(0,1) rozložení pravděpodobností

Nyní ukážeme, že hodnotu distribuční funkce normálního rozdělení pravděpodobností s libovolnými parametry μ a σ můžeme vyjádřit pomocí distribuční funkce normálního normovaného rozdělení pravděpodobností na základě vztahu

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Důkaz: $F_{\mu,\sigma}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy =$ [zavedeme tzv. normovací substituci $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$]

$$= \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad = \quad \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

protože $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$ je hustota pravděpodobnosti normálního normovaného rozdělení pravděpodobnosti, o čem se snadno přesvědčíme, když ve funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ dosadíme $\mu = 0$ a $\sigma = 1$.

<u>Poznámka:</u> Normální rozdělení pravděpodobností s parametry μ a σ budeme značit symbolem $N(\mu,\sigma)$.

Při sestavování tabulek N(0,1) rozdělení pravděpodobností se využívá toho, že hustota pravděpodobnosti je sudá funkce, tedy že platí $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Pro distribuční funkci potom platí:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Důkaz: $\Phi(-x) = \int\limits_{-\infty}^{-x} f(u)du =$ [zavedeme substituci $y = -u$]

$$= -\int_{\infty}^{x} f(-y)dy = \int_{x}^{\infty} f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy - \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = 1 - \Phi(y)$$

V tabulkách N(0,1) rozdělení pravděpodobností jsou tabelované hodnoty distribuční funkce jen pro nezáporný argument. Hodnoty distribuční funkce pro záporné argumenty najdeme v těchto tabulkách na základě výše uvedeného vztahu.

Stanovme nyní pravděpodobnost, že náhodná veličina X, mající rozdělení $N(\mu,\sigma)$, nabyde hodnoty z intervalu (a, b), $a,b\in R$. Platí:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

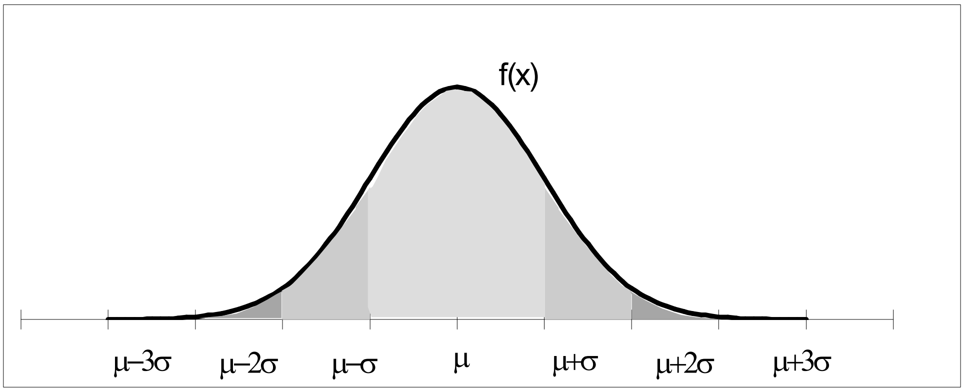
Odtud pro speciální hodnoty a a b dostaneme:

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = 0{,}6827$ (pravidlo jednoho σ)

$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0{,}9545$ (pravidlo dvou σ)

$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0{,}9973$ (pravidlo tří σ)

Jednotlivé pravděpodobnosti jsou znázorněny na následujícím obrázku.



Obr.č.7.10. Pravděpodobnosti intervalů $\mu\pm k\sigma$, k = 1, 2, 3

$EX = \mu$ $DX = \sigma^2$

Typické použití : Normálním rozdělením pravděpodobností se v praxi řídí náhodné veličiny, které nabývají své hodnoty v důsledku součtu velkého množství nezávislých vlivů, z nichž žádný nemá dominující význam. Používá se v technice, přírodních vědách, ekonomii a zvláště ve statistice.

7.2.4. χ^2 - rozdělení pravděpodobností s n-stupni volnosti

Toto rozdělení je charakterizováno jediným parametrem n. Hodnota n je celé kladné číslo.

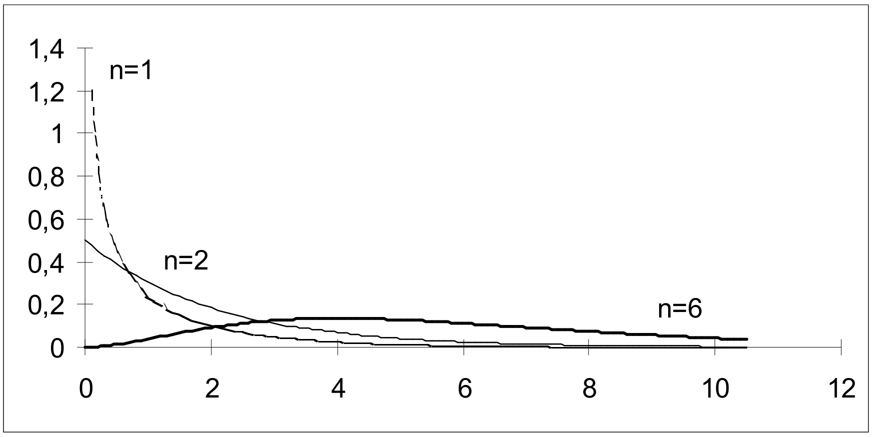
Hustota pravděpodobnosti má tvar:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n-2}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \end{cases}$$

Parametr n nazýváme počet stupňů volnosti. Toto rozdělení pravděpodobností se někdy též nazývá Pearsonovo rozdělení pravděpodobností s n stupni volnosti.

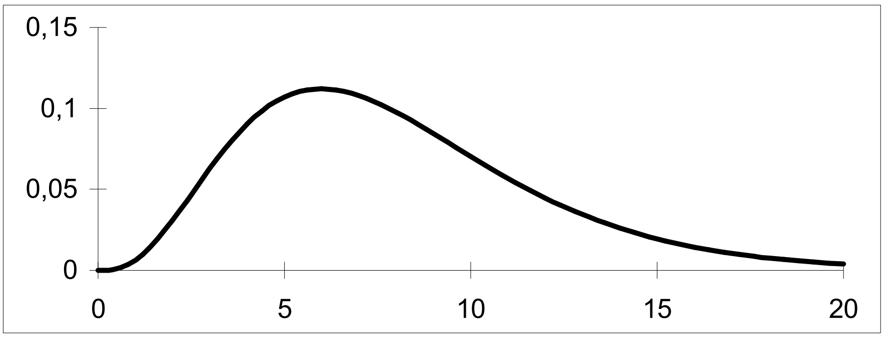
Průběh hustoty pravděpodobnosti závisí na parametru n. Hustota pravděpodobnosti χ^2 rozdělení pravděpodobností nabývá maxima v bodě x = n - 2 pro n > 2.

Následující dva obrázky ukazují hustotu pravděpodobnosti χ^2 rozdělení. Na prvním z obrázků je možno vidět, jak se mění průběh funkce v závislosti na počtu stupňů volnosti, jednotlivé křivky odpovídají jednomu, dvěma a šesti stupňům volnosti.



Obr.č.7.11. Hustota χ^2 rozložení pravděpodobností pro 1, 2 a 6 stupňů volnosti

Druhý obrázek ukazuje podrobněji na průběh hustoty pravděpodobnosti tohoto rozdělení pravděpodobností s osmi stupni volnosti.



Obr.č.7.12. Hustota χ^2 rozložení pravděpodobností pro 8 stupňů volnosti

Hodnoty distribuční funkce jsou počítány numericky a jsou tabelované.

EX = n DX = 2n

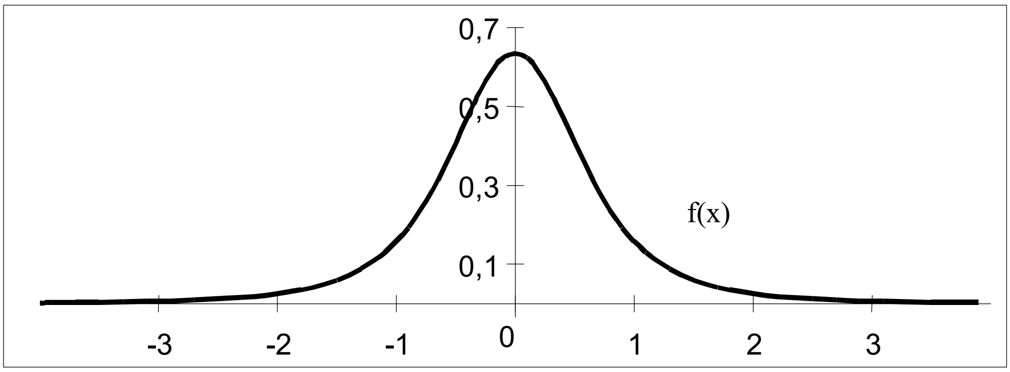
χ^2 - rozdělením pravděpodobností se řídí součet druhých mocnin nezávislých náhodných veličin, majících N(0,1) rozdělení pravděpodobností (tzn. Y = $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \dots\dots + X_n^2$). Počet stupňů volnosti značí počet nezávislých náhodných veličin ve výše uvedeném součtu. Tento součet je základem odhadů rozptylu základního souboru. Proto má toto rozdělení velký význam především v matematické statistice.

7.2.5. Studentovo t-rozložení pravděpodobností

Je charakterizováno jediným parametrem n, kde n je celé kladné číslo. Hustota pravděpodobnosti je definována vztahem :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{n}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad x \in (-\infty, \infty),\ n \in N$$

Toto rozdělení pravděpodobností má podobné vlastnosti jako normální rozdělení pravděpodobností. Je symetrické podle osy y.



Obr.č.7.13. Hustota pravděpodobnosti Studentova rozložení pravděpodobností s třemi stupni volnosti

Hustota pravděpodobnosti Studentova rozložení pravděpodobností je sudá funkce a pro distribuční funkci platí vztah :

$$F(-x) = 1 - F(x).$$

Hodnoty distribuční funkce jsou tabelované. Pro $n \to \infty$ konverguje toto rozdělení pravděpodobností k rozdělení N(0,1).

$EX = 0$ když $n > 0$, $DX = \frac{n}{n-2}$ když $n > 2$

Se Studentovým rozdělením pravděpodobností se setkáváme především v matematické statistice (při testování hypotéz, intervalových odhadech apod.). Studentovým rozdělením pravděpodobností se řídí náhodná veličina $T = \frac{X}{\sqrt{Y}}\cdot\sqrt{n}$, kde náhodná veličina X má N(0,1) rozdělení pravděpodobností a náhodná veličina Y má χ^2 - rozdělení pravděpodobností s n-stupni volnosti.

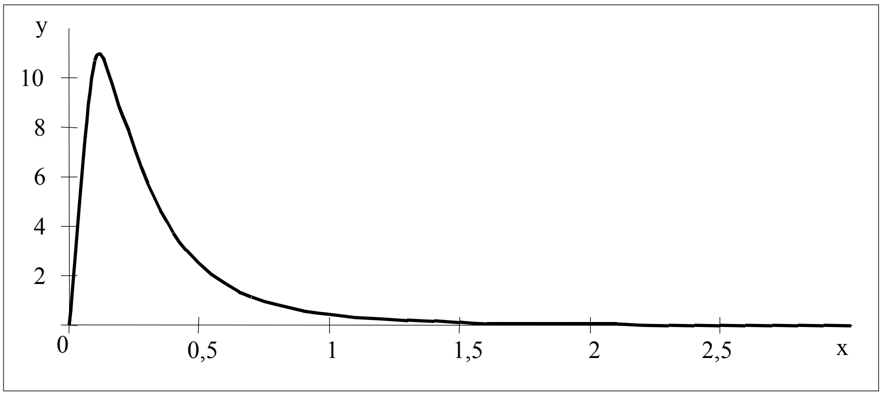
7.2.6. F- rozdělení pravděpodobností (Fisher-Snedecorovo)

F- rozdělení pravděpodobností charakterizují dva parametry n_1 a n_2, přičemž n_1, $n_2 \in N$.

Hustota pravděpodobnosti má tvar:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}\cdot n_1^{\frac{n_1}{2}}\cdot n_2^{\frac{n_2}{2}}\cdot x^{\frac{n_2-2}{2}}\cdot\left(n_1x+n_2\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} \qquad x \in (0,\infty)$$

Její graf pro $n_1 = 8$ a $n_2 = 4$ je znázorněný na obrázku:



Obr.č.7.14. Graf hustoty pravděpodobnosti F- rozdělení pravděpodobnosti

Hodnoty distribuční funkce jsou tabelované.

$$E(F) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad \text{pokud} \quad n_2 > 2 \qquad D(F) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2 \cdot (n_2 - 4)} \quad \text{pokud} \quad n_2 > 4$$

F- rozdělení pravděpodobností má význam pro matematickou statistiku. Řídí se jím podíl dvou náhodných veličin, majících $\chi^2_{n_1}$ a $\chi^2_{n_2}$ rozdělení pravděpodobností.

7.2.7. Erlangovo rozdělení pravděpodobností

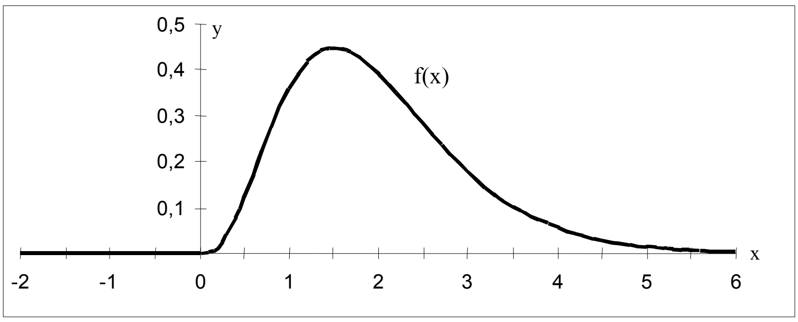
Je charakterizováno dvěma parametry λ a k, kde $0 < \lambda < \infty$ a k je celé kladné číslo.

Hustota pravděpodobnosti je definována vztahem:

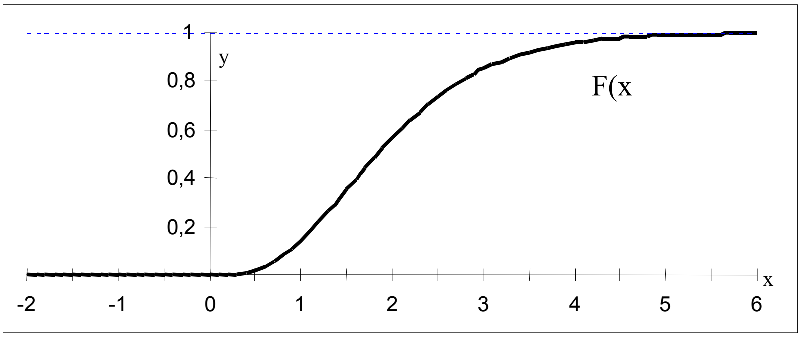
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \dfrac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} & x \geq 0 \end{cases}$$

Distribuční funkce má tvar:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} \cdot \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{(\lambda x)^j}{j!} & x \geq 0 \end{cases}$$



Obr.č.7.15. Hustota Erlangova rozdělení pravděpodobností s parametry k = 4 a λ = 2



Obr.č.7.16. Distribuční funkce Erlangova rozdělení pravděpodobností s parametry k = 4 a $\lambda = 2$

$$EX = \frac{k}{\lambda}\ ; \quad DX = \frac{k}{\lambda^2}$$

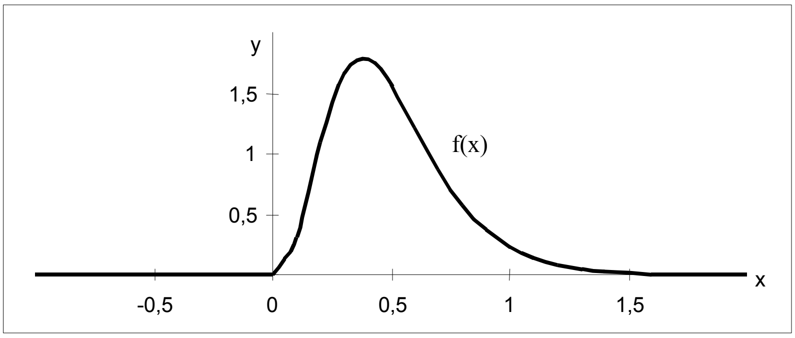
Pro k = 1 přechází Erlangovo rozdělení pravděpodobností v exponenciální rozdělení s parametrem λ. Tímto rozdělením pravděpodobností se řídí součet k nezávislých náhodných veličin, majících exponenciální rozdělení pravděpodobností se stejným parametrem λ.

Erlangovo rozdělení pravděpodobností se uplatňuje hlavně v teorii hromadné obsluhy.

7.2.8. Γ- rozdělení pravděpodobností

Je charakterizováno dvěma parametry a, b, kde $0 < a, b < \infty$. Jeho hustota pravděpodobnosti je dána vztahem:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot x^{a-1} \cdot e^{-bx} & x > 0 \end{cases}$$



Obr.č.7.17. Hustota Γ- rozdělení pravděpodobností s parametry a = 4 a b = 8

$$EX = \frac{a}{b}; \quad DX = \frac{a}{b^2}$$

Pro a = n/2 a b = 1/2 dostáváme χ^2 rozdělení pravděpodobností s n stupni volnosti.

Pro a = k (k je celé kladné číslo) dostáváme z tohoto rozdělení Erlangovo rozdělení pravděpodobností s parametry b a k.

Pro a = 1 dostáváme exponenciální rozdělení pravděpodobností s parametrem b.

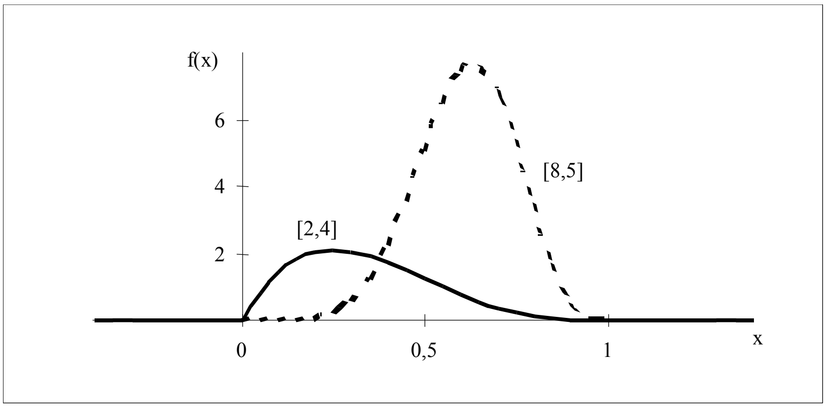
Γ- rozdělení pravděpodobností používáme při simulování rozdělení pravděpodobností jízdní doby dopravního prostředku.

7.2.9. Beta rozdělení

Rozdělení náhodné veličiny X s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(p,q)} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} & 0 < x < 1, \quad p > 0, \quad q > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá beta rozdělení s parametry p,q.



Obr.č.7.18. Hustota Beta rozdělení pravděpodobností s parametry p = 2, q = 4 (plná čára) a p = 8, q = 5 (čárkovaná čára)

$$EX = \frac{p}{p+q} \quad ; \qquad DX = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$$

Rozdělením beta se řídí variační rozpětí nezávislých veličin X_i , i = 1,2, ... , n. Má-li každá z těchto veličin rovnoměrné rozdělení pravděpodobností s parametry 0 a 1, pak jejich variační rozpětí má beta rozdělení s parametry n - 1 a 2.

Tímto rozdělením se také řídí mnoho náhodných veličin používaných v ekonomii, jejichž hodnoty jsou omezené shora i zdola a u nichž předpokládáme existenci jediného módu, ležícího uvnitř intervalu možných hodnot.

Pro parametr q, blížící se nekonečnu, přechází beta rozdělení v gama rozdělení. Pro p = q = 1 dostáváme rovnoměrné rozdělení na intervalu (0,1).

7.2.10. Weibullovo rozdělení

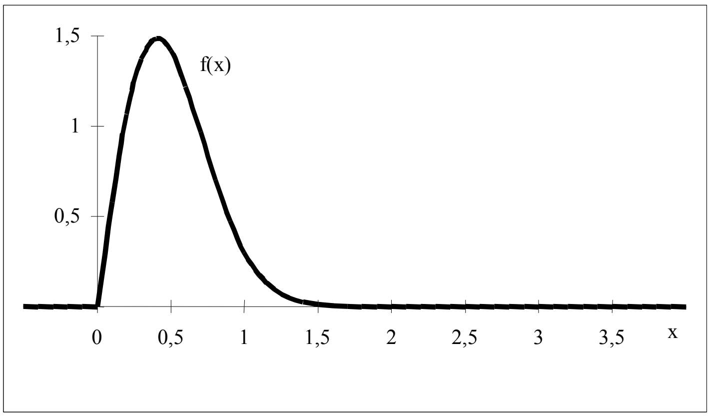
Weibullovo rozdělení je dáno hustotou

$$f(x) = c \cdot p \cdot x^{p-1} \cdot e^{-cx^p} \qquad p \geq 0,\ c > 0,\ x > 0$$

Weibullovo rozdělení je velmi důležité v technických aplikacích. Charakterizuje rozdělení života výrobků (např. pneumatik), doby do poruchy, doby na opravu i doby prostojů, doby bezporuchovosti a životnosti u mnoha neopravovaných výrobků, jako jsou valivá ložiska, elektrické prvky a přístroje, mechanické díly, podléhající únavovému poškození a korozi. Za určitých předpokladů lze tímto rozdělením vyjádřit rozdělení extrémních hodnot, mezi něž patří kritické úrovně vlastností, jejichž překročením dochází k destrukci (např. u pevnosti výrobků).

Pro p = 1 dostaneme exponenciální rozdělení.

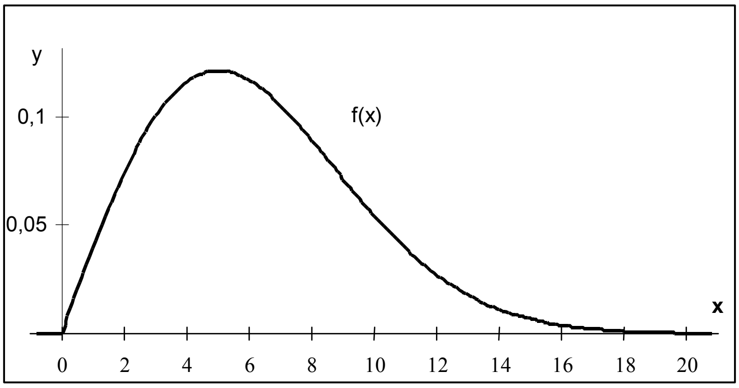
$$EX = \Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right) \cdot c^{-\frac{1}{p}} \qquad DX = \left[\Gamma\left(\frac{p+2}{p}\right) - \Gamma^2\left(\frac{p+1}{p}\right)\right] \cdot c^{-\frac{2}{p}}$$



Obr.č.7.19. Hustota Weibullova rozdělení pravděpodobností s parametry p = 2, c = 3

7.2.11. Rayleighovo rozdělení

Hustota Rayleighova rozdělení pravděpodobností je dána vztahem $f(x) = \frac{x}{b^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2b^2}}$ pro $b > 0$, $x > 0$



Obr.č.7.20. Hustota Rayleighova rozdělení pravděpodobností s parametrem b=5

Rayleighovo rozdělení je speciálním případem Weibullova rozdělení pravděpodobností pro p = 2 a $c = \frac{1}{2b^2}$.

$EX = b\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $DX = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot b^2$

S Rayleighovým rozdělením pravděpodobností se setkáváme v radiolokačních aplikacích statistické dynamiky a v statistické dynamice pružných soustav.

8. VÍCEROZMĚRNÁ NÁHODNÁ VELIČINA

V řadě praktických příkladů se nemůžeme omezit jen na jednu náhodnou veličinu, neboť některé náhodné jevy je možné popsat jedině pomocí dvou nebo více náhodných veličin. Pak zkoumáme celý systém náhodných veličin, neboli tzv. náhodný vektor a jeho rozdělení pravděpodobností.

Jako příklad může sloužit popis polohy částice, pohybující se náhodně v prostoru. K úplnému popisu musíme znát tři souřadnice, tedy hodnoty tří náhodných veličin (hodnoty na osách x, y a z).

Podrobněji si povšimneme dvourozměrné náhodné veličiny (náhodného vektoru) (X,Y), kdy k popisu náhodného jevu vystačíme se dvěma náhodnými veličinami.

8.1. Dvourozměrná náhodná veličina a její distribuční funkce

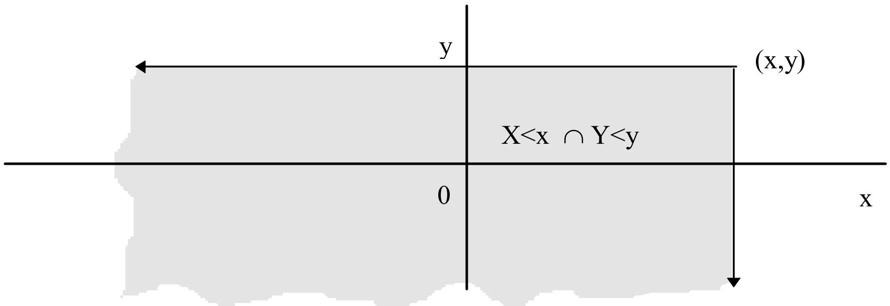
DEFINICE 8.1.1.: Nechť X a Y jsou dvě náhodné veličiny. Pak dvojici (X,Y) nazýváme **dvourozměrná náhodná veličina** (nebo též **dvourozměrný náhodný vektor**).

Poznámka 1. Podobným způsobem se definuje n-rozměrná náhodná veličina:
Nechť $X_1,X_2, \dots X_n$ je systém n náhodných veličin. Pak n-tici $(X_1,X_2, \dots, X_n)$ nazýváme **n-rozměrnou náhodnou veličinou** (nebo též n-rozměrný náhodný vektor).

DEFINICE 8.1.2.: **Distribuční funkcí** F dvourozměrné náhodné veličiny (X,Y) rozumíme reálnou funkci dvou reálných argumentů x, y, definovanou jako pravděpodobnost současného nastoupení dvou náhodných jevů: $X< x$ a $Y< y$.

$$F(x,y) = P\,(X< x,\ Y< y) \qquad \text{kde } x\in(-\infty, \infty) \text{ a } y\in(-\infty, \infty)$$

Poznámka 2. Distribuční funkce je definována jako pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší než x a náhodná veličina Y nabude hodnoty menší než y. Dvourozměrná distribuční funkce vyjadřuje pak pravděpodobnost, že náhodná veličina (X,Y) nabyde hodnoty, která leží uvnitř čtvrtroviny s vrcholem v bodě (x,y). Situaci znázorňuje následující obrázek.



Obr.č. 8.1.

Poznámka 3. Distribuční funkce n-rozměrné náhodné veličiny se definuje analogickým způsobem.
Nechť $(X_1,X_2, \dots X_n)$ je n-rozměrná náhodná veličina. **Distribuční funkcí** F této náhodné veličiny rozumíme reálnou funkci F n reálných argumentů $x_1,x_2, \dots ,x_n$, definovanou vztahem
$F(x_1,x_2, \dots ,x_n) = P\,(X_1< x_1,\ X_2< x_2, \dots ,X_n< x_n)$ kde $x_i\in(-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Distribuční funkce dvourozměrné náhodné veličiny má některé význačné vlastnosti, analogické vlastnostem distribuční funkce jednorozměrné náhodné veličiny. Tyto vlastnosti jsou shrnuty v následující větě, kterou uvádíme bez důkazu.

Věta 8.1.1.: Nechť F je distribuční funkce dvourozměrné náhodné veličiny (X,Y). Pak platí:

a) $F(x,y) \geq 0 \quad x \in (-\infty,\infty),\ y \in (-\infty,\infty)$

b) Je neklesající pro každou proměnnou.

$F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$ pro každé $x_1, x_2 : x_1 < x_2$

$F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$ pro každé $y_1, y_2 : y_1 < y_2$

c) Je zleva spojitá pro každou proměnnou:

$$\lim_{x \to x_0^-} F(x,y) = F(x_0,y) \quad \text{pro každé } x_0, x, y \in R$$

$$\lim_{y \to y_0^-} F(x,y) = F(x,y_0) \quad \text{pro každé } x, y, y_0 \in R$$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$ pro $x \in (-\infty,\infty),\ y \in (-\infty,\infty)$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x,y) = 1$$

Poznámka 4.: Místo limit budeme někdy používat stručnějšího značení: $F(-\infty;y)$, $F(x;-\infty)$, $F(\infty;\infty)$.

Věta 8.1.1.platí i opačným směrem:

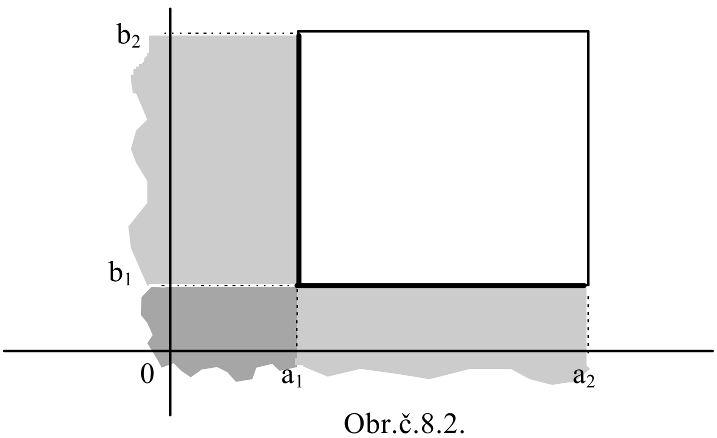
Věta 8.1.2.: Každá dvourozměrná reálná funkce, definovaná na celé rovině x,y a splňující vlastnosti a) až d) předcházející věty (8.1.1.) je distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny.

Z těchto vět plyne, že vlastnosti a) až d) jsou nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby nějaká dvourozměrná funkce byla distribuční funkcí nějaké náhodné veličiny.

Dvourozměrná distribuční funkce, resp. dvourozměrné rozdělení pravděpodobností se často nazývá společná (sdružená, simultánní) distribuční funkce, resp. společné (sdružené, simultánní) rozdělení pravděpodobností.

Základní prostor je nyní reprezentován celou rovinou, elementární jevy jsou body této roviny a náhodné jevy se zobrazí jako geometrické útvary v rovině.

Pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty z intervalu $\langle a_1, a_2 \rangle$ a současně náhodná veličina Y nabude hodnoty z intervalu $\langle b_1, b_2 \rangle$, což můžeme geometricky interpretovat jako pravděpodobnost padnutí náhodného bodu (X,Y) do obdélníku, vymezeného nerovnostmi $a_1 \leq X < a_2$ a $b_1 \leq Y < b_2$, stanovíme následujícím způsobem:

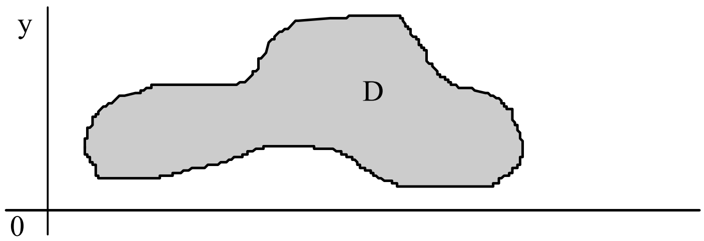


Obr.č.8.2.

$P(a_1 \leq X < a_2 \wedge b_1 \leq Y < b_2) = F(a_2,b_2) - F(a_2,b_1) - F(a_1,b_2) + F(a_1,b_1)$

Pravděpodobnost části roviny, vyznačené tmavým stínováním, se odčítá dvakrát, proto ji nakonec musíme jednou přičíst.

Jak již bylo řečeno, náhodné jevy jsou nyní reprezentovány geometrickými útvary v rovině. V případě, který jsme řešili, byl náhodný jev zobrazen jako obdélník s vrcholy v bodech (a_1,b_1), (a_2,b_1), (a_2,b_2), (a_1,b_2). Je ale zřejmé, že není každý náhodný jev tvaru obdélníku, ale obecně to může být libovolný rovinný útvar D, jako např. ukazuje následující obrázek.



Obr.č. 8.3.

Rovinný útvar D nelze sestavit ze čtvrtrovin, jak tomu bylo v předcházejícím případě u obdélníku. To znamená, že pravděpodobnost libovolného náhodného jevu nemůžeme vyjádřit pomocí distribuční funkce. Je to možné pouze v případě, kdy můžeme náhodný jev rozložit na konečný počet dvourozměrných intervalů.

8.2. Nezávislost náhodných veličin

K tomu, abychom mohli definovat v pravděpodobnosti důležitý pojem nezávislosti náhodných veličin, musíme nejprve vybudovat příslušný matematický aparát a definovat některé další pojmy.

Uvažujeme-li pouze pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší než x bez jakékoliv podmínky pro veličinu Y (čili pro jakoukoliv hodnotu náhodné veličiny Y), dostáváme:

$$P(X<x, Y<\infty) = F(x, \infty) = F_X(x).$$

Podobně pravděpodobnost, že náhodná veličina Y nabude hodnoty menší než y bez ohledu na veličinu X:

$$P(X<\infty, Y<y) = F(\infty, y) = F_Y(y).$$

DEFINICE 8.2.1.: Nechť (X,Y) je dvourozměrná náhodná veličina s distribuční funkcí F. Funkci $F_X = F(x, \infty)$, resp. $F_Y = F(\infty, y)$, budeme nazývat **marginální distribuční funkcí** náhodné veličiny X, resp. Y.

Z definice plyne, že marginální distribuční funkce je pravděpodobnost současného nastoupení dvou jevů $X< x$ a $Y< \infty$. Jev $Y< \infty$ nastává vždy, proto skutečnost, že současně nastanou jevy $X< x$ a $Y< \infty$ závisí jen na tom, zda nastane jev $X<x$. Proto můžeme psát: $P(X< x , Y< \infty) = P(X < x)$.
Pravděpodobnost $P(X < x)$ je ale distribuční funkcí náhodné veličiny X. Tímto jsme ukázali, že marginální distribuční funkce F_X náhodné veličiny X není ničím jiným, než distribuční funkcí náhodné veličiny X.

Stejným způsobem se dá ukázat, že marginální distribuční funkce F_Y náhodné veličiny Y je distribuční funkcí náhodné veličiny Y.

Poznámka 1. Pro n-rozměrnou náhodnou veličinu $(X_1,X_2, ... ,X_n)$ se marginální distribuční funkce F_{X_i} náhodné veličiny X_i definuje následujícím vztahem:

$$F_{X_i}(x_i) = F(\infty, ... , \infty, x_i, \infty, ... , \infty)$$

DEFINICE 8.2.2.: Nechť (X,Y) je dvourozměrná náhodná veličina s distribuční funkcí F. Říkáme, že náhodné veličiny X a Y jsou **nezávislé**, když platí:

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \qquad \text{pro } x\in(-\infty,\infty),\ y\in(-\infty,\infty),$$

kde $F_X(x)$ a $F_Y(y)$ jsou marginální distribuční funkce náhodných veličin X a Y.

Pojem nezávislosti můžeme rozšířit na libovolný počet náhodných veličin, což vyjadřuje následující definice.
DEFINICE 8.2.3.: Nechť $(X_1,X_2, ... ,X_n)$ je n-rozměrná náhodná veličina s distribuční funkcí F. Říkáme, že náhodné veličiny $X_1,X_2, ... ,X_n$ jsou **nezávislé**, když platí:

$$F(x_1,x_2, ... , x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot ... \cdot F_{X_n}(x_n) \qquad \text{pro } x_i\in R,\ i = 1, 2, ... , n$$

8.3. Dvourozměrná náhodná veličina diskrétního typu

DEFINICE 8.3.1.: Říkáme, že dvourozměrná náhodná veličina (X,Y) je **diskrétní**, jsou-li obě náhodné veličiny X a Y diskrétní.

Jestliže každá z veličin může nabýt pouze spočetně mnoha hodnot (obě veličiny jsou nespojité), vyjadřujeme jejich rozdělení také sdruženou pravděpodobnostní funkcí P, která dvojicím hodnot (x_i,y_j) přiřazuje odpovídající pravděpodobnosti, tzn.

$$P(X=x_i,\ Y=y_j) = p(x_i,y_j)$$

Sdružená pravděpodobnostní funkce splňuje kromě samozřejmého požadavku nezápornosti následující vztahy:

$$\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$$

Pro pravděpodobnost náhodného jevu, reprezentovaného oblastí D, můžeme psát:

$$P((X,Y) \in D = \sum_{(x_i, y_j) \in D} p(x_i, y_j)$$

Pro distribuční funkci platí: $F(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p(x_i, y_j)$

Marginální pravděpodobnostní funkce (pravděpodobnostní funkce jedné veličiny bez ohledu na hodnotu veličiny druhé) jsou součtem sdružených pravděpodobností přes všechny hodnoty druhé náhodné veličiny, tzn.

$$p_X(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j)$$

a podobně $$p_Y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j)$$

Pro marginální distribuční funkce F_X a F_Y dostáváme v případě diskrétních náhodných veličin vztahy:

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j} p(x_i, y_j)$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \sum_{x_i} \sum_{y_j < y} p(x_i, y_j)$$

VĚTA 8.3.1.: Nechť (X,Y) je dvourozměrná náhodná veličina. Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, jestliže platí: $p(x_i , y_j) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)$ pro každou dvojici (x_i , y_j).

Důkaz: Formou cvičení si může čtenář provést důkaz sám.

8.4. Dvourozměrná náhodná veličina spojitého typu

DEFINICE 8.4.1.: Říkáme, že dvourozměrná náhodná veličina (X,Y) je **spojitá**, jestliže existuje taková nezáporná funkce f, že pro libovolný náhodný jev D platí:

$$P((X,Y) \in D = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Funkce f se nazývá hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny (X,Y).

VĚTA 8.4.1.: Nechť funkce f je hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny (X,Y). Pak platí :

a) $f(x,y) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

Důkaz: a) V definici 8.4.1. požadujeme, aby funkce f byla nezáporná.

b) Z definice 8.4.1. plyne: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = P((X,Y) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)) =$

$= P(-\infty < X < \infty\ ;\ -\infty < Y < \infty) = 1$

VĚTA 8.4.2.: Každá reálná funkce f dvou reálných argumentů x, y, splňující vlastnosti a) a b) věty 8.4.1., je hustotou pravděpodobnosti nějaké náhodné veličiny (X,Y).

Na provedení důkazu není vybudován dostatečný matematický aparát.

Distribuční funkce dvourozměrné spojité náhodné veličiny se vypočítá následujícím způsobem:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

Jak ze sdružené hustoty pravděpodobnosti vypočítáme sdruženou distribuční funkci ukazuje předchozí vztah. Opačným způsobem lze stanovit ze známé distribuční funkce hustotu pravděpodobnosti v bodech x,y, ve kterých existuje derivace:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Poznámka 1. Pro n-rozměrný náhodný vektor platí: $f(x_1,x_2, \dots , x_n) = \dfrac{\partial^n F(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$

Pro marginální distribuční funkce platí následující vztahy:

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv$$

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

Distribuční funkcí náhodného vektoru jsou jednoznačně určeny distribuční funkce jednotlivých složek (tj. marginální distribuční funkce). Obrácené tvrzení obecně neplatí, marginálními distribučními funkcemi není jednoznačně určena distribuční funkce náhodného vektoru.

Marginální hustoty pravděpodobnosti :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

Tyto vztahy dokážeme odvodit ze vztahu pro marginální distribuční funkci následujícím způsobem:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)\,dv$$

Stejným způsobem se odvodí vztah pro marginální hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny Y.

VĚTA 8.4.3.: Nechť (X,Y) je dvourozměrný náhodný vektor s hustotou pravděpodobnosti f. Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, právě když platí:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Důkaz: Náhodné veličiny jsou nezávislé podle definice právě tehdy, když platí:

$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ pro $x \in (-\infty,\infty)$, $y \in (-\infty,\infty)$.

Vyjádřením distribučních funkcí pomocí hustot pravděpodobností dostáváme následující vztah:

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \cdot \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)\cdot f_Y(v)\,du\,dv$$

Tato rovnost platí pouze v případě, že $f(u,v) = f_X(u) \cdot f_Y(v)$ □

Větu 8.4.3. můžeme rozšířit na libovolný počet náhodných veličin.

VĚTA 8.4.4.: Nechť $(X_1,X_2, ...,X_n)$ je n-rozměrný náhodný vektor se sdruženou hustotou pravděpodobnosti f. Náhodné veličiny $X_1,X_2, ...,X_n$ jsou nezávislé právě tehdy, když pro každou n-tici $x_1, x_2, ..., x_n$ platí:

$$f(x_1,x_2, ...,x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot ... \cdot f_{X_n}(x_n)$$

8.5. Podmíněné rozdělení pravděpodobností

U vícerozměrných náhodných veličin nás vedle sdruženého a marginálních rozdělení pravděpodobností často zajímají ještě rozdělení podmíněná. Podmíněným rozdělením pravděpodobností náhodné veličiny X vzhledem k y se rozumí rozdělení náhodné veličiny X za podmínky, že náhodná veličina Y nabyla hodnoty y a podobně podmíněným rozdělením pravděpodobností náhodné veličiny Y vzhledem k x se rozumí rozdělení této veličiny za podmínky, že náhodná veličina X nabyla hodnoty x. Podmíněné rozdělení pravděpodobností vychází z definice podmíněné pravděpodobnosti a je definováno jako podíl sdruženého a marginálního rozdělení pravděpodobností.

Charakterizujeme-li rozdělení distribuční funkcí, potom podmíněná distribuční funkce, kterou budeme značit $F(x \mid y)$, udává pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší než x při dané hodnotě Y= y.

a) Předpokládejme, že náhodná veličina (X,Y) je diskrétní.

$$p(y_j|x_i) = P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(Y = y_j \cap X = x_i)}{P(X = x_i)} = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}$$

a podobně $p(x_i|y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}$ kde $p_X(x_i) \neq 0$ resp. $p_Y(y_j) \neq 0$

Úpravou těchto vztahů lze vyjádřit společnou pravděpodobnost hodnot (x_i, y_j):

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i) \cdot p(y_j \mid x_i)$$
$$p(x_i, y_j) = p_Y(y_j) \cdot p(x_i \mid y_j)$$

VĚTA 8.5.1.: Nechť X, Y jsou nezávislé diskrétní náhodné veličiny. Pak platí:

$$p(x_i \mid y_j) = p_X(x_i)$$
$$p(y_j \mid x_i) = p_Y(y_j)$$

Důkaz: Jsou-li náhodné veličiny X, Y nezávislé, pak podle věty 8.3.1.platí: $p(x_i , y_j) = p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)$.

Potom: $p(x_i|y_j) = \dfrac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)} = \dfrac{p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j)}{p_Y(y_j)} = p_X(x_i)$ □

Podobným způsobem lze dokázat i druhou rovnost.

VĚTA 8.5.2.: Nechť (X,Y) je diskrétní náhodný vektor. Pak platí:

$$\sum_{x_i} p(x_i|y_j) = 1$$
$$\sum_{y_j} p(y_j|x_i) = 1$$

Důkaz: Použitím výše uvedených vztahů dostaneme:

$$\sum_{x_i} p(x_i|y_j) = \frac{\sum_{x_i} p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)} = \frac{p_Y(y_j)}{p_Y(y_j)} = 1 \qquad \square$$

Podobně se dá dokázat i druhý vztah.

Podmíněná distribuční funkce diskrétních náhodných veličin X a Y má tvar:

$$F(x \mid y) = \frac{\sum_{x_i < x} p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)} \qquad \text{kde} \quad p_Y(y_j) \neq 0$$

$$F\left(y \middle| x\right) = \frac{\sum\limits_{y_j<y} p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)} \qquad \text{kde} \quad p_X(x_i) \neq 0$$

b) Předpokládejme, že náhodná veličina (X,Y) je spojitá.

Pak $f\left(y|x\right) = \dfrac{f\left(x,y\right)}{f_X(x)}$ a podobně $f\left(x|y\right) = \dfrac{f\left(x,y\right)}{f_Y(y)}$ kde $f_X(x) \neq 0$ resp. $f_Y(y) \neq 0$

Úpravou těchto vztahů lze vyjádřit společnou hustotu pravděpodobnosti

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f(y \mid x)$$
$$f(x, y) = f_Y(y) \cdot f(x \mid y)$$

VĚTA 8.5.3.: Nechť X, Y jsou nezávislé spojité náhodné veličiny. Pak platí:

$$f(x \mid y) = f_X(x)$$
$$f(y \mid x) = f_Y(y)$$

Důkaz: Jsou-li náhodné veličiny X, Y nezávislé, pak podle věty 8.4.3. platí:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Potom: $f(x \mid y) = \dfrac{f\left(x,y\right)}{f_Y(y)} = \dfrac{f_X\left(x\right) \cdot f_Y\left(y\right)}{f_Y(y))} = f_X\left(x\right)$

Podobným způsobem lze dokázat i druhou rovnost.

VĚTA 8.5.4.: Nechť (X,Y) je dvourozměrná spojitá náhodná veličina. Pak platí:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x \middle| y\right) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(y \middle| x\right) dy = 1$$

Důkaz: Použitím výše uvedených vztahů dostaneme:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x \middle| y\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \frac{1}{f_Y(y)} \cdot f_Y(y) = 1 \qquad \square$$

Podobně se dá dokázat i druhý vztah.

Podmíněná distribuční funkce spojitých náhodných veličin X a Y má tvar:

$$F\left(x \middle| y\right) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,y) du}{f_Y(y)} \qquad \text{kde} \ f_Y(y) \neq 0$$

$$F\left(x \middle| y\right) = \frac{\int_{-\infty}^{y} f(x,v) dv}{f_X(x)} \ \text{kde} \quad f_X(x) \neq 0$$

9. FUNKCE NÁHODNÝCH VELIČIN

9.1. Funkce jednorozměrné náhodné veličiny

Někdy se při řešení úloh v teorii pravděpodobnosti setkáváme s problémem, že známe rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X a hledáme, jaké je rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny Y, která je funkcí veličiny X, tzn. že Y = g(X).

Zavedeme označení: $g_{-1}(A) = \{x, g(x) \in A\}$
Potom můžeme psát: $F_Y(y) = P_X(X \in g_{-1}(-\infty, y))$ (9.1.1.)

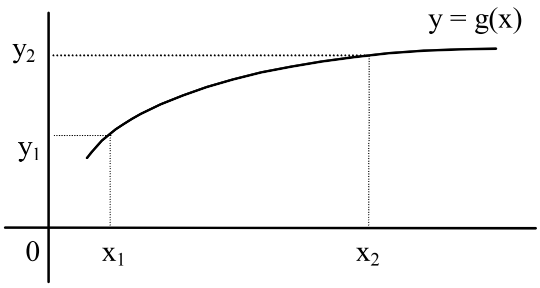
O funkci g předpokládáme, že pro každý náhodný jev A z pole náhodných jevů náhodné veličiny Y patří jev $g_{-1}(A)$ do pole náhodných jevů náhodné veličiny X.

a) Předpokládejme, že náhodná veličina X je diskrétní. Na základě vztahu 9.1.1. a věty 3.2.7. platí:

$$F_Y(y) = \sum_{g(x_i)<y} P_X(X = x_i)$$

b) Předpokládejme, že náhodná veličina X je spojitá s hustotou pravděpodobnosti f_X.
Budeme dále rozlišovat dva případy:
1. Funkce g je v intervalu možných hodnot náhodné veličiny X ryze monotónní a pro každé x existuje nenulová derivace ($g'(x) \neq 0$).
2. Funkce g není v intervalu možných hodnot náhodné veličiny X ryze monotónní (nemá jedinou inverzní funkci).

ad 1) Je-li funkce g rostoucí, to znamená, že pro všechny možné hodnoty náhodné veličiny X platí:
$x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$, pak můžeme psát:
$F_Y(y) = P_Y(Y < y) = P_X(X < g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$

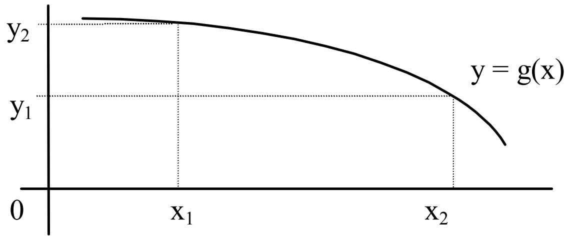


Obr.č. 9.1.

potom hustota pravděpodobnosti f_Y náhodné veličiny Y se vypočítá následujícím způsobem:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left[g^{-1}(y)\right]'$$

Je-li funkce g klesající, tzn., že pro všechny možné hodnoty náhodné veličiny X platí:
$x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$ můžeme psát:
$F_Y(y) = P_Y(Y < y) = P_X(X > g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$



Obr.č. 9.2.

potom hustota pravděpodobnosti f_Y náhodné veličiny Y se vypočítá následujícím způsobem:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[1 - F_X(g^{-1}(y))\right] = -f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left[g^{-1}(y)\right]'$$

Protože derivace $\left[g^{-1}(y)\right]'$ rostoucí funkce g je kladná a derivace klesající funkce g záporná, můžeme oba výsledky spojit v jeden a psát:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|$$

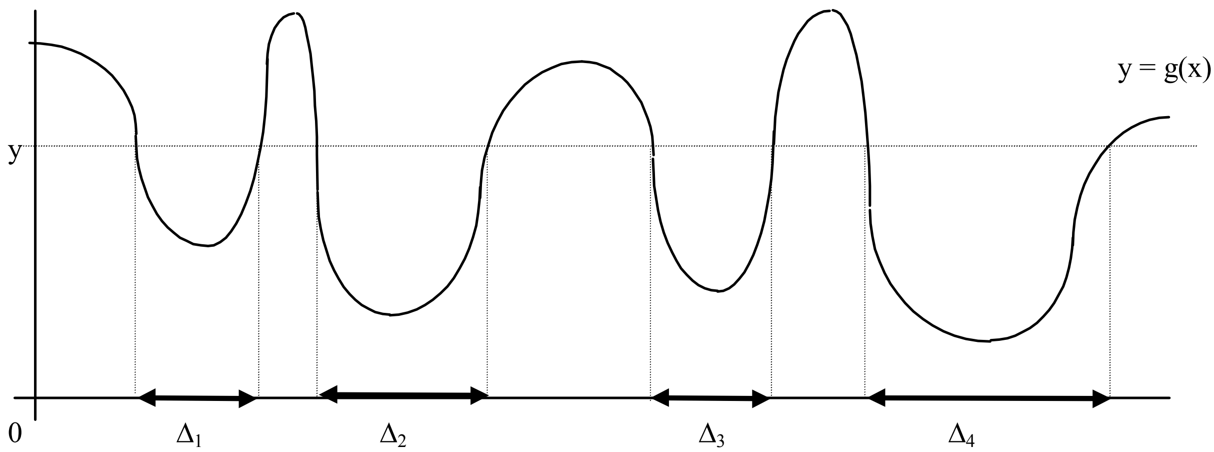
Na základě uvedených poznatků můžeme vyslovit následující větu:

VĚTA 9.1.1.: Nechť X je spojitá náhodná veličina s hustotou pravděpodobnosti f_X a nechť g je nějaká ryze monotónní funkce proměnné x, mající v každém bodě x_0 nenulovou derivaci. Potom hustotu pravděpodobnosti f_Y náhodné veličiny Y vypočítáme podle vztahu:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|$$

ad 2) Nyní se budeme zabývat situací, kdy funkce g není v oboru možných hodnot náhodné veličiny X ryze monotónní. Mezi náhodnými veličinami X a Y pak neexistuje vzájemně jednoznačný vztah a tedy ani inverzní funkce g^{-1}. Distribuční funkce $F_Y(y) = P(Y < y)$ pak vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabude hodnoty z kteréhokoliv intervalu, pro který je splněna podmínka $Y < y$. Označíme-li tyto intervaly Δ_i , kde i = 1, 2, ... , n, potom

$$F_Y(y) = P\left\{\left(X \in \Delta_1\right) \cup \left(X \in \Delta_2\right) \cup \ldots\right\} = \sum_i P\left(X \in \Delta_i\right) = \sum_i \int_{\Delta_i} f(x)dx$$



Obr.č. 9.3.

Hustotu pravděpodobnosti f_Y náhodné veličiny Y získáme derivací distribuční funkce

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

9.2. Funkce dvourozměrných náhodných veličin

Předpokládejme, že (X,Y) je dvourozměrný náhodný vektor s distribuční funkcí F. Hledáme rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny Z = h(X,Y), která je funkcí obou náhodných veličin X a Y.
Pro distribuční funkci náhodné veličiny Z platí: $F_Z(z) = P(Z < z) = P[h(X,Y) < z]$

a) Předpokládejme, že náhodná veličina (X,Y) je diskrétní. Na základě věty 3.2.7. vypočítáme distribuční funkci F_Z náhodné veličiny Z:

$$F_Z(z) = \sum_{h(x_i, y_j) < z} p(x_i, y_j)$$

b) Předpokládejme, že náhodná veličina (X,Y) je spojitá s hustotou pravděpodobnosti f. Pro distribuční funkci pak platí vztah:

$$F_Z(z) = \iint_{h(x,y)<z} f(x,y)\,dxdy \qquad (9.1.1.)$$

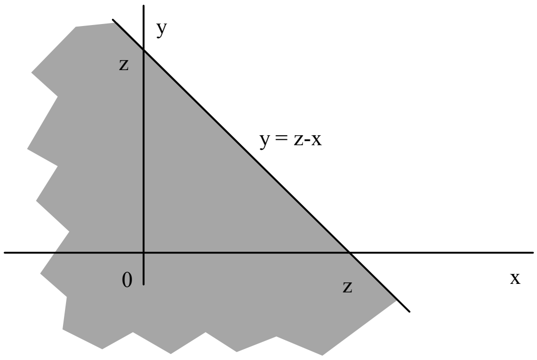
Hustotu pravděpodobnosti dostaneme derivací distribuční funkce F_Z.

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z)$$

Obdobného postupu bychom použili při hledání rozdělení pravděpodobností funkce $Y=h(X_1, X_2,...,X_n)$ n-rozměrného náhodného vektoru $X= (X_1, X_2, ... , X_n)$. Distribuční funkci F_Y bychom ale získali integrací sdružené hustoty $f(x_1,x_2, ... , x_n)$ přes n-rozměrnou oblast, ve které $h(x_1,x_2, ... , x_n) < y$.

PŘÍKLAD 9.2.1.: Dvourozměrná náhodná veličina (X,Y) má sdruženou hustotu pravděpodobnosti f, přičemž $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. Najděte hustotu pravděpodobnosti f_Z náhodné veličiny Z, která je s náhodnou veličinou (X,Y) vázána funkčním vztahem Z= h(X,Y) = X + Y.
Řešení: Ze vztahu 9.2.1. plyne: $F_Z(z) = \iint_{x+y<z} f(x,y)\,dxdy$

V následující fázi výpočtu musíme převést dvojný integrál na dvojnásobný. Integrační oblast dvojného integrálu je vymezena nerovností x + y < z, což znamená, že buď
$-\infty < x < \infty$ a $-\infty < y < z - x$ nebo $-\infty < x < z - y$ a $-\infty < y < \infty$.



Obr.č. 9.4.

Uvedený dvojný integrál můžeme nyní převést na dvojnásobný a vypočítat distribuční funkci F_Z náhodné veličiny Z: $F_Z(z) = \iint_{x+y<z} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dxdy$

Hustotu pravděpodobnosti f_Z dostaneme derivací distribuční funkce:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx$$

Ukázali jsme, že platí: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx$

Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak podle věty 8.4.3. platí vztah

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,dx$, který symbolicky zapisujeme $f_Z = f_X \cdot f_Y$.

Tento vztah se často nazývá **konvoluce** rozdělení pravděpodobností náhodných veličin X a Y.

10. CHARAKTERISTIKY NÁHODNÝCH VELIČIN

Znalost rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny, to znamená znalost pravděpodobností, s nimiž náhodná veličina nabude jednotlivých hodnot nebo hodnot z jednotlivých intervalů a stejně tak vymezení hodnot, jichž může náhodná veličina nabývat, nám poskytuje úplný obraz o náhodné veličině.

V případě, že náhodná veličina nabývá příliš mnoha hodnot nebo má složitou funkci rozdělení pravděpodobností, ztrácíme přehled o jejích jednotlivých vlastnostech. Proto je často účelné shrnout informaci o náhodné veličině do jednoho nebo několika čísel, která veličinu dobře charakterizují a jejichž způsob výpočtu je přesně definován.

Taková čísla, která vyjadřují určité vlastnosti náhodné veličiny, nazýváme **charakteristiky** dané náhodné veličiny.
Mezi nejpoužívanější charakteristiky náhodných veličin patří jejich momenty.
Rozeznáváme momenty - všeobecné
- počáteční (kolem počátku)
- centrální (kolem střední hodnoty)

Poznámka: Ve všech definicích a větách, které jsou uvedeny v této kapitole, předpokládáme existenci součtů nebo integrálů, které se v nich vyskytují, tzn. absolutní konvergenci uvedených řad resp. integrálů.

10.1. Všeobecné momenty

DEFINICE 10.1.1.: Nechť X je libovolná náhodná veličina, b je libovolné reálné číslo a k přirozené číslo. Pak **všeobecným momentem** k-tého řádu náhodné veličiny X v bodě b rozumíme číslo m_k (b), definované vztahem:

$$m_k(b) = \sum_i (x_i - b)^k p(x_i) \qquad \text{když je náhodná veličina X diskrétní}$$

$$m_k(b) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^k f(x)\,dx \qquad \text{když je náhodná veličina X spojitá}$$

Mezi momenty náhodné veličiny X v bodě b a v bodě c platí vztah, který je vyjádřen následující větou:

VĚTA 10.1.1.: Nechť X je libovolná náhodná veličina a nechť b a c jsou libovolná dvě reálná čísla. Pak platí:

$$m_k(b) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot m_i(c) \cdot (c-b)^{k-i}$$

Důkaz:
a) Předpokládejme, že náhodná veličina X je diskrétní.

$$m_k(b) = \sum_j (x_j - b)^k p(x_j) = \sum_j (x_j - c + c - b)^k p(x_j) = \sum_j \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x_j - c)^i \cdot (c-b)^{k-i} p(x_j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (c-b)^{k-i} \cdot \sum_j (x_j - c)^i p(x_j) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (c-b)^{k-i} \cdot m_i(c)$$

b) Předpokládejme, že náhodná veličina X je spojitá.

$$m_k(b) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^k f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c+c-b)^k f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (x-c)^i \cdot (c-b)^{k-i} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot (c-b)^{k-i} \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^i f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot (c-b)^{k-i} \cdot m_i(c)$$

Známe-li momenty náhodné veličiny v bodě c, můžeme pomocí nich vyjádřit momenty v jiném bodě b. Podmínkou je ale znalost všech momentů v bodě c od nultého až po řád momentu, který chceme v bodě b vyjádřit právě pomocí momentů v bodě c.

VĚTA 10.1.2.: Nechť X je libovolná náhodná veličina. Pak vždy platí: $m_0(b) = 1$, $b \in R$.

Důkaz: a) Nechť X je diskrétní náhodná veličina. Pak $m_0(b) = \sum_i (x_i - b)^0 p(x_i) = \sum_i p(x_i) = 1$

b) Je-li X spojitá náhodná veličina, potom $m_0(b) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^0 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)\,dx = 1$ □

Nejvýznamnější postavení mezi momenty zaujímají tzv. počáteční a centrální momenty.

10.2. Počáteční momenty

DEFINICE 10.2.1.: **Počátečním momentem** k-tého řádu náhodné veličiny X rozumíme její všeobecný moment k-tého řádu v bodě b = 0. Počáteční momenty označíme symbolem ν_k.
Z definice vyplývá:

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p(x_i) \qquad \text{když je náhodná veličina X diskrétní}$$

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx \qquad \text{když je náhodná veličina X spojitá}$$

Nejvýznamnější z počátečních momentů je první počáteční moment, který se nazývá **střední hodnota** náhodné veličiny X a značí se EX. Podrobněji se střední hodnotou budeme zabývat v další kapitole.

PŘÍKLAD 10.2.1.: Na základě definice vypočítejte střední hodnotu náhodné veličiny X, která má normální rozložení pravděpodobností N(μ, σ).

Řešení:

Hustota pravděpodobnosti této náhodné veličiny X je definována vztahem:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

Střední hodnota spojité náhodné veličiny se na základě definice prvního počátečního momentu počítá podle vztahu: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$.

Potom:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\,dx = \qquad \text{zavedeme substituci } y = \frac{x-\mu}{\sigma}\,, \quad dy = \frac{1}{\sigma}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (y\sigma+\mu)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy + \int_{-\infty}^{\infty} \mu\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy =$$

$$= \sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy + \mu\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy = 0 + \mu\cdot 1 = \mu$$

Ukázali jsme, že parametr μ normálního rozložení pravděpodobností je jeho střední hodnotou.

10.3. Centrální momenty

DEFINICE 10.3.1.: **Centrálním momentem** k-tého řádu náhodné veličiny X rozumíme její všeobecný moment k-tého řádu v bodě b = EX. Centrální momenty označíme symbolem μ_k.

Z definice plyne:

$$\mu_k = \sum_i (x_i - EX)^k p(x_i) \qquad \text{když je náhodná veličina X diskrétní}$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^k f(x)\,dx \qquad \text{když je náhodná veličina X spojitá}$$

Nejvýznamnější z centrálních momentů je centrální moment druhého řádu μ_2, který se nazývá **disperze (rozptyl)** náhodné veličiny X a značí se DX.
Od disperze je odvozena další charakteristika, která se nazývá **směrodatná odchylka** náhodné veličiny X a značí se σ. Je definována jako druhá odmocnina z disperze:

$$\sigma = \sqrt{DX}$$

VĚTA 10.3.1.: Nechť X je libovolná náhodná veličina. Pak platí: $\mu_1 = 0$

Důkaz: a) Nechť X je diskrétní náhodná veličina. Pak

$$\mu_1 = \sum_i (x_i - EX)\cdot p(x_i) = \sum_i x_i p(x_i) - \sum_i EX\cdot p(x_i) = EX - EX\sum_i p(x_i) = EX - EX = 0$$

b) Je-li X spojitá náhodná veličina potom

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)\ f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} EX\cdot f(x)\,dx = EX - EX\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = EX - EX = 0$$

PŘÍKLAD 10.3.1.: Na základě definice vypočítejte disperzi náhodné veličiny X, která má normální rozložení pravděpodobností N(μ, σ).

Řešení:

Hustota pravděpodobnosti této náhodné veličiny s normálním rozložením pravděpodobností je definována vztahem: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$

Disperze spojité náhodné veličiny se vypočítá jako druhý centrální moment:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 \cdot f(x)dx\,.$$

Pak pro náhodnou veličinu X s normálním rozložením pravděpodobností pak platí:

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\,dx = \qquad \text{zavedeme substituci } y = \frac{x-\mu}{\sigma}\,,\ dy = \frac{1}{\sigma}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (y\sigma)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \qquad \text{zavedeme substituci } z = \frac{y^2}{2}\,,\ dz = y\,dy$$

$$= 2\int_0^{\infty} \sqrt{2z}\cdot\sigma^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-z}dz = 2\cdot\sigma^2\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} z^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-z}dz = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = \sigma^2$$

Poznámka: Funkce Γ je definována vztahem $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}\cdot e^{-x}dx$ pro $p > 0$.

Při výpočtu jsme využívali vlastností funkce Γ: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$; $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Zjistili jsme, že parametr σ normálního rozložení pravděpodobností je současně směrodatnou odchylkou.

10.4. Momenty dvourozměrné náhodné veličiny

DEFINICE 10.4.1.: Nechť (X,Y) je dvourozměrná náhodná veličina, nechť b, c jsou libovolná reálná čísla a k, r libovolná přirozená čísla. Pod **všeobecným momentem** k+r-tého řádu v bodech b a c budeme rozumět číslo $m_{k,r}(b,c)$, definované vztahem

$m_{k,r}(b,c) = \sum_i \sum_j (x_i - b)^k (y_j - c)^r p(x_i, y_j)$, když je náhodná veličina (X,Y) diskrétní,

$m_{k,r}(b,c) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^k (y-c)^r f(x,y)\,dxdy$, když je náhodná veličina (X,Y) spojitá.

Pro b = c = 0 dostaneme **počáteční moment** k+r-tého řádu. Značíme ho symbolem $\nu_{k,r}$.

$\nu_{k,r} = \sum_i \sum_j x_i^k y_j^r p(x_i, y_j)$, když je náhodná veličina (X,Y) diskrétní,

$\nu_{k,r} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^r f(x,y)\,dxdy$, když je náhodná veličina (X,Y) spojitá

Pro b = EX a c = EY dostaneme **centrální moment** k+r-tého řádu. Značíme ho symbolem $\mu_{k,r}$.
Platí vztahy:

$\mu_{k,r} = \sum_i \sum_j (x_i - EX)^k (y_j - EY)^r p(x_i, y_j)$, když je náhodná veličina (X,Y) diskrétní,

$\mu_{k,r} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-EX)^k (y-EY)^r f(x,y)\,dxdy$, když je náhodná veličina (X,Y) spojitá.

Z momentů dvourozměrné náhodné veličiny se nejčastěji používá a za nejdůležitější je považován druhý smíšený centrální moment $\mu_{1,1}$. Tento moment se nazývá **kovariance** a označuje se symbolem cov(X,Y). Kovarianci vypočítáme podle vztahu:

$cov(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - EX)\cdot(y_j - EY)\cdot p(x_i, y_j)$, když je náhodná veličina (X,Y) diskrétní,

$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-EX)\cdot(y-EY)\cdot f(x,y)\,dxdy$, když je náhodná veličina (X,Y) spojitá.

Podrobněji se budeme zabývat kovariancí v kapitole 10.11.

10.5. Charakteristiky polohy

Charakteristiky polohy jsou čísla, která poskytují informaci o tom, kde jsou na číselné ose rozložené hodnoty náhodné veličiny, přičemž jsou v úvahu brány jejich pravděpodobnosti. Mezi nejběžnější a nejčastěji používané charakteristiky polohy patří:

a) **Střední hodnota EX** náhodné veličiny X. Podrobněji se čtenář seznámí s touto charakteristikou v kapitole 10.9.

b) **Modus** $\hat{\mu}$ náhodné veličiny X je taková hodnota této náhodné veličiny, která má největší pravděpodobnost (když je náhodná veličina X diskrétní), nebo hodnota, v níž hustota pravděpodobnosti nabývá maxima (když je náhodná veličina X spojitá).

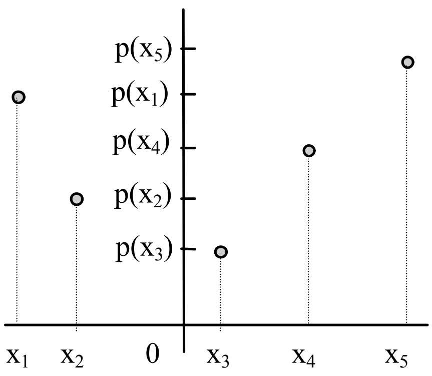
Některá rozdělení pravděpodobností nemusí mít modus. Jedná se o taková rozdělení pravděpodobností, kdy krajní hodnoty mají největší pravděpodobnosti nebo největší hustotu pravděpodobnosti. Taková rozdělení nazýváme antimodální rozdělení pravděpodobností. (Obr. 10.1.,10. 2.)

Na druhé straně existují rozdělení pravděpodobností, která mají více než jeden modus. Taková rozdělení nazýváme vícemodální rozdělení pravděpodobností.(Obr.10.3.)

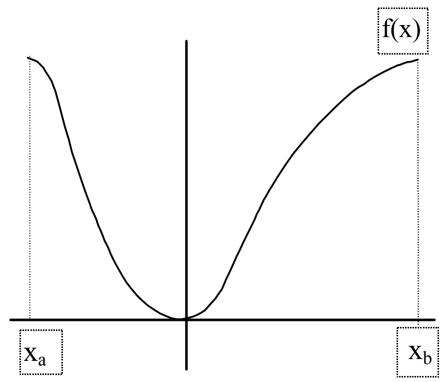
c) **Medián** $\tilde{\mu}$ náhodné veličiny X je taková hodnota náhodné veličiny, pro kterou platí :

$F(\tilde{\mu}) = 0{,}5$

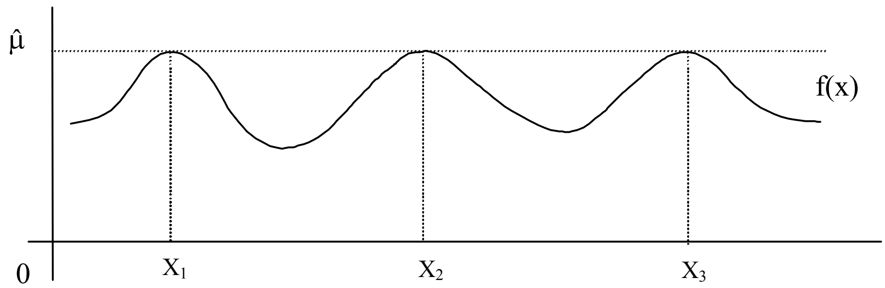
Medián dělí obor hodnot náhodné veličiny na dvě stejně pravděpodobné části. Pro diskrétní náhodnou veličinu nemusí medián vždy existovat. V porovnání se střední hodnotou bývá však výpočet mediánu jednodušší a je přirozeněji interpretovatelný, u extrémně asymetrických rozdělení lépe vystihuje střed rozdělení, nežli ho vystihuje střední hodnota.



Obr. 10.1.



Obr. 10.2.



Obr.10.3.

10.6. Charakteristiky variability

Charakteristiky variability podávají informaci, jak jsou hodnoty náhodné veličiny rozptýlené na reálné přímce. Z nich považujeme za nejdůležitější ty, které charakterizují rozptýlení hodnot náhodné veličiny okolo její střední hodnoty. Jsou to především:

a) **Disperze DX** náhodné veličiny X a s ní související **směrodatná odchylka**.

b) **Střední absolutní odchylka MX** náhodné veličiny X je číslo, definované vztahem:

$MX = \sum_i |x_i - EX| \, p(x_i)$ pro diskrétní náhodnou veličinu

$MX = \int_{-\infty}^{\infty} |x - EX| \, f(x)\,dx$ pro spojitou náhodnou veličinu

c) **Kvartilová odchylka KX** náhodné veličiny X je číslo, definované vztahem:

$KX = (x_{0,75} - x_{0,25})\cdot 0,5$;

kde pojem kvartilu je definován v kapitole 10.7.

d) **Variační koeficient VX** je relativní mírou variability náhodných veličin s nenulovou střední hodnotou. Je definován vztahem:

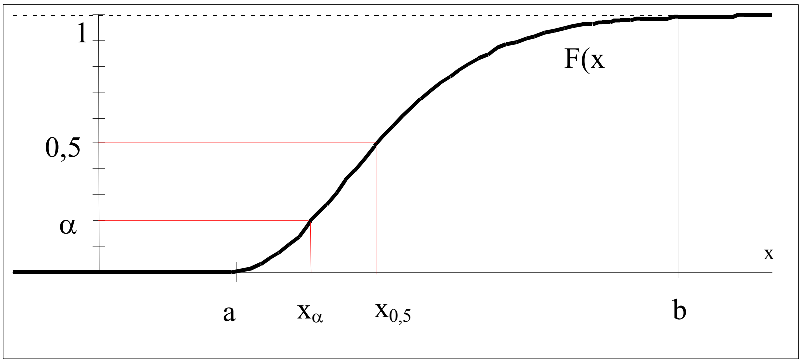
$$VK = \frac{\sigma}{EX}$$

Variační koeficient je bezrozměrná charakteristika a používá se pro porovnání variability náhodných veličin, lišících se jednotkou měření.

10.7. Kvantily

Kvantily si můžeme představit jako body, které rozdělují prostor hodnot náhodné veličiny v určitém pravděpodobnostním poměru.

DEFINICE 10.7.1.: Nechť F je distribuční funkce náhodné veličiny X. Nechť $a = \sup\{x: F(x) = 0\}$ a podobně $b = \inf\{x: F(x) = 1\}$. Nechť F(x) je v intervalu (a, b) rostoucí a α je libovolné číslo z intervalu (0,1). Potom číslo x_α, dané rovnicí $F(x_\alpha) = \alpha$, budeme nazývat α **kvantilem** náhodné veličiny X.



Obr.10.4. Kvantily náhodné veličiny X

Stanovené podmínky mohou být přesně splněny jen u spojité náhodné veličiny. Proto se kvantily používají častěji pro spojité náhodné veličiny. Kvantily jsou považovány za důležitý prostředek popisu celého rozdělení a jejich znalost umožňuje konstruovat intervaly, do nichž hodnota náhodné veličiny padne s předem zvolenou pravděpodobností. Vybrané kvantily některých důležitých rozdělení pravděpodobností bývají tabelovány.

Volba kvantilů závisí na tom, jak podrobné informace o rozdělení pravděpodobností jsou požadovány. Hrubší členění poskytují kvantily $x_{0,25}$, $x_{0,50}$, $x_{0,75}$, nazývané kvartily, které rozdělují prostor hodnot náhodné veličiny na čtyři stejně pravděpodobné části. Tyto kvartily nesou specifické názvy, a to:
$x_{0,25}$ - dolní kvartil, $x_{0,75}$ - horní kvartil , $x_{0,50}$ - medián.

Podrobnější informace o rozdělení poskytují decily $x_{0,10}$, $x_{0,20}$, ... , $x_{0,90}$, vymezující 10 částí se stejnou pravděpodobností a percentily $x_{0,01}$, $x_{0,02}$, ... , $x_{0,99}$, vymezující 100 částí se stejnou pravděpodobností.

10.8. Charakteristiky šikmosti a špičatosti (normované momenty)

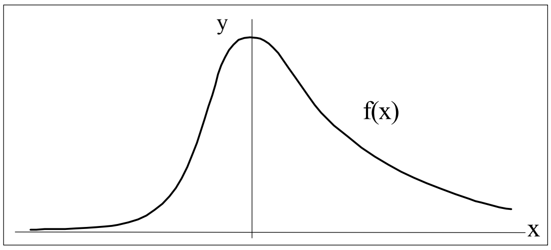
Pro porovnání průběhu sledovaného rozdělení pravděpodobností s průběhem normálního rozdělení pravděpodobností N(0,1) jsou používány koeficient asymetrie a koeficient excesu.

a) **Koeficient asymetrie (šikmosti) S_k** se někdy nazývá míra šikmosti. Je definován jako podíl třetího centrálního momentu a třetí mocniny směrodatné odchylky:

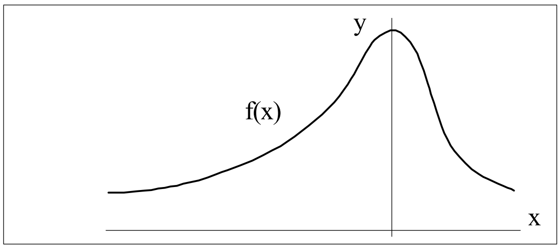
$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Koeficient asymetrie udává míru bočného odchýlení sledovaného rozdělení pravděpodobností od N(0,1) rozdělení pravděpodobností. Pro normální rozdělení pravděpodobností se střední hodnotou v bodě 0 a pro každé jiné rozdělení pravděpodobností, symetrické podle osy y, je tento koeficient roven 0.

Koeficient asymetrie nabývá kladných hodnot, když strměji stoupá hustota pravděpodobnosti v levé části grafu a pozvolna klesá v pravé části grafu (Obr.10.5.). Důvodem je, že vážený součet třetích mocnin velkých kladných odchylek hodnot náhodné veličiny od její střední hodnoty je větší než součet třetích mocnin záporných odchylek, proto třetí centrální moment bude kladný a pak nabývá kladné hodnoty i koeficient asymetrie.



Obr.10.5.



Obr.10.6.

V opačném případě, kdy pozvolna stoupá hustota pravděpodobnosti v levé části grafu a strmě klesá v pravé části grafu, je vážený součet třetích mocnin záporných odchylek hodnot náhodné veličiny od její střední hodnoty větší než součet třetích mocnin kladných odchylek, proto třetí centrální moment bude záporný a stejně tak i koeficient asymetrie bude záporný (Obr.10.6.).

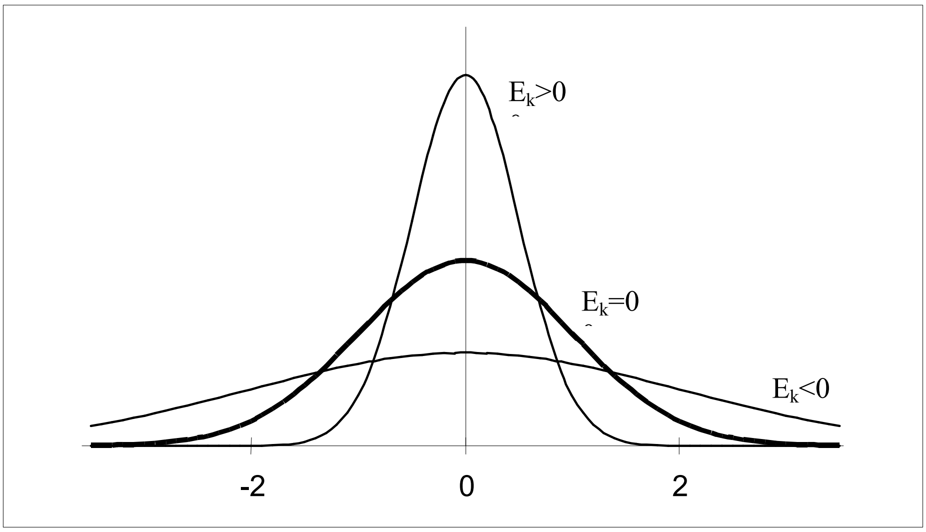
Poznámka 1.: Výpočet třetího centrálního momentu se zjednoduší použitím výpočtového tvaru:
$\mu_3 = E[(X - EX)^3] = EX^3 - 3EX^2EX + 2(EX)^3$

b) **Koeficient excesu (špičatosti) E_k** se někdy také nazývá míra strmosti. Je definován jako podíl čtvrtého centrálního momentu a čtvrté mocniny směrodatné odchylky, zmenšený o tři:

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Koeficient excesu udává míru špičatosti sledovaného rozdělení pravděpodobností vzhledem k N(0,1) rozdělení pravděpodobností. Pro toto rozdělení pravděpodobností je koeficient excesu roven 0.
Koeficient excesu nabývá kladných hodnot pro rozdělení pravděpodobností, která jsou špičatější, nežli normální rozdělení pravděpodobností s parametry 0 a 1. Pro plošší rozdělení pravděpodobností je koeficient excesu naopak záporný.

Poznámka 2.: Výpočet čtvrtého centrálního momentu se zjednoduší použitím výpočtového tvaru:
$\mu_4 = E[(X - EX)^4] = EX^4 - 4EX^3EX + 6EX^2(EX)^2 - 3(EX)^4$



Obr.č.10.7. Koeficient excesu

10.9. Střední hodnota náhodné veličiny

DEFINICE 10.9.1.: Nechť X je libovolná náhodná veličina. **Střední hodnotou náhodné veličiny X** budeme nazývat číslo EX, definované vztahem:

$$EX = \sum_i x_i\, p(x_i) \qquad \text{pro diskrétní náhodnou veličinu}$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \qquad \text{pro spojitou náhodnou veličinu}$$

Střední hodnota charakterizuje polohu hodnot náhodné veličiny na reálné přímce. Většinou leží v okolí hodnot náhodné veličiny s největšími pravděpodobnostmi resp. hustotou pravděpodobností.

Pojem střední hodnota zobecníme pro funkci g(X) náhodné veličiny X.
Nechť X je náhodná veličina. Utvoříme novou náhodnou veličinu Y = g (X). Jestliže známe rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny Y, vypočítáme její střední hodnotu podle vztahu z definice 10.9.1 . Střední hodnotu náhodné veličiny Y můžeme vypočítat jenom na základě znalosti rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X podle následujících vztahů:

$$EY = \sum_i g(x_i) p(x_i) \qquad \text{v diskrétním případě,}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx \qquad \text{ve spojitém případě.}$$

Analogicky můžeme vypočítat střední hodnotu funkce dvourozměrné náhodné veličiny.
Nechť (X,Y) je dvourozměrná náhodná veličina. Utvořme novou náhodnou veličinu
Z = h(X,Y). Pro její střední hodnotu pak platí :

$$EZ = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j) \cdot p(x_i, y_j) \qquad \text{v diskrétním případě,}$$

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \cdot f(x, y)\, dx \qquad \text{ve spojitém případě.}$$

Na základě uvedených vztahů můžeme momenty náhodných veličin vyjádřit jako střední hodnoty určitých funkcí těchto náhodných veličin následujícím způsobem :

$$m_k(b) = E\,[(X - b)^k\,]$$
$$\nu_k = E\,[X^k\,]$$
$$\mu_k = E\,[(X - EX)^k\,]$$

Speciálně disperzi, tedy druhý centrální moment, můžeme vyjádřit následujícím způsobem :

$$DX = E\,[(X - EX)^2\,]$$

Podobně pro momenty dvourozměrných náhodných veličin platí:

$$m_{k,r}(a,b) = E\,[(X - a)^k\,(Y - b)^r]$$
$$\nu_{k,r} = E\,[X^k\,Y^r]$$
$$\mu_{k,r} = E\,[(X - EX)^k\,(Y - EY)^r]$$

Pro smíšený moment druhého řádu (kovarianci náhodných veličin X,Y) platí:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\,[(X - EX)\,(Y - EY)]$$

10.9.1. Vlastnosti střední hodnoty

VLASTNOST 1.: Nechť k je libovolná konstanta, pak platí:

$$Ek = k$$

Důkaz: Konstantu k můžeme považovat za náhodnou veličinu, která nabývá jediné hodnoty k s pravděpodobností 1. Rozdělení pravděpodobností konstanty má tvar P(X=k) = 1. Podle definice střední hodnoty platí: EX = k · 1 = k. □

VLASTNOST 2.: Nechť X je náhodná veličina a k libovolná konstanta. Pak platí:

$$E(kX) = k \cdot EX$$

Důkaz: Nechť X je náhodná veličina diskrétního typu. Pak platí:

$$E(kX) = \sum_i kx_i\ p(x_i) = k\sum_i x_i\ p(x_i) = k \cdot EX$$

Nechť X je náhodná veličina spojitého typu. Pak platí:

$$E(kX) = \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot x\ f(x)\ dx\ = k\ \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx\ = k \cdot EX \qquad \square$$

VLASTNOST 3.: Nechť X,Y jsou dvě náhodné veličiny, pak platí:

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y)$$

Důkaz: Předpokládejme, že náhodné veličiny X a Y jsou diskrétního typu:

$$E(X + Y) = \sum_i\sum_j (x_i + y_j)\ p(x_i,y_j) = \sum_i\sum_j\ x_i \cdot p(x_i,y_j) + \sum_i\sum_j\ y_j \cdot p(x_i,y_j) =$$

$$= \sum_i x_i \sum_j\ p(x_i,y_j) + \sum_j y_j \sum_i\ p(x_i,y_j) = \sum_i x_i p_X(x_i) + \sum_j y_j p_Y(y_j) = EX + EY$$

Pro spojité náhodné veličiny X a Y platí:

$$E(X + Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x + y)\ f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x,y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\ f(x,y)\,dydx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dydx + \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\,dy = EX + EY \qquad \square$$

VLASTNOST 4.: Nechť $X_1, X_2, ..., X_n$ je libovolný systém náhodných veličin. Pak platí:

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n$$

Důkaz: Důkaz provedeme metodou matematické indukce.
Ve vlastnosti 3 jsme dokázali platnost tohoto tvrzení pro dvě náhodné veličiny X_1, X_2 :
Ukázali jsme, že $E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2$
Předpokládejme, že vlastnost 4 platí pro k náhodných veličin ($k \geq 2$) a pokusíme se dokázat, že vlastnost 4 platí i pro k+1 náhodných veličin.

Předpokládáme, že $E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} EX_i$

S využitím vlastnosti 3 dostáváme:

$$E\left(\sum_{i=1}^{k+1} X_i\right) = E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1}\right) = E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) + EX_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} EX_i + EX_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} EX_i \qquad \square$$

VLASTNOST 5.: Nechť $X_1, X_2, ...X_n$ je libovolná n-tice náhodných veličin, nechť $k_1, k_2, ...k_n$, b jsou libovolné konstanty a nechť n je přirozené číslo. Pak platí:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} k_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i EX_i + b$$

Důkaz: Postupným použitím vlastností 3, 1, 4, 2 dostaneme:

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} k_i X_i + b\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} k_i X_i\right) + b = \sum_{i=1}^{n} k_i EX_i + b$$

Poznámka 1.: Vlastnost 5 říká, že střední hodnota lineární kombinace náhodných veličin je stejnou lineární kombinací jejich středních hodnot.

VLASTNOST 6.: Nechť X,Y jsou dvě libovolné náhodné veličiny. Pak platí:

$$E(XY) = EX \cdot EY + cov(X,Y)$$

Důkaz: Podle vztahu uvedeného v kapitole 10.9. můžeme kovarianci vyjádřit pomocí střední hodnoty. Platí:
$cov(X,Y) = E[(X-EX)\cdot(Y - EY)] = E(XY - XEY - XEY + EXEY) =$

$= E(XY) - E(YEX) - E(XEY) + E(EXEY) = E(XY) - EXEY - EXEY + EXEY = E(XY) - EXEY$

Další úpravou dostaneme: $E(XY) = EXEY + cov(X,Y)$ □

VLASTNOST 7.: Nechť X,Y jsou dvě nezávislé náhodné veličiny. Pak platí:

$$E(XY) = EX \cdot EY$$

Důkaz: Předpokládejme, že náhodné veličiny X a Y jsou diskrétní. Pak

$$E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j \, p(x_i, y_j)$$

Jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, můžeme na základě věty 8.3.1. psát:

$$\sum_i \sum_j x_i y_j \, p(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot p_X(x_i) p_Y(y_j) \cdot = \sum_i x_i \cdot p_X(x_i) \sum_j y_j \cdot p_Y(y_j) = EXEY$$

Analogickým způsobem dokážeme vlastnost 7 i pro spojité náhodné veličiny.

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \, f(x,y) \, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \, f_X(x) f_Y(y) \, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} y \, f_Y(y) \, dy = EXEY$$

Poznámka 2.: Vlastnost 7 se dá rozšířit i na libovolnou n-tici nezávislých náhodných veličin. Toto rozšíření vyjadřuje vlastnost 8.

VLASTNOST 8.: Nechť $X_1, X_2, ..., X_n$ je n-tice **nezávislých** náhodných veličin a nechť n je nějaké přirozené číslo. Pak platí :

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} EX_i$$

Důkaz: Důkaz vlastnosti 8 provedeme metodou matematické indukce. Platnost vlastnosti 8 pro dvě nezávislé náhodné veličiny je dokázána (vlastnost 7). Předpokládáme, že tvrzení vlastnosti 8 platí pro k nezávislých náhodných veličin ($k \geq 2$) a budeme dokazovat, že platí i pro k+1 nezávislých náhodných veličin.

Předpokládáme, že platí $E\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) = \prod_{i=1}^{k} EX_i$

S využitím vlastnosti 7 dokážeme:

$$E\left(\prod_{i=1}^{k+1} X_i\right) = E\left(\prod_{i=1}^{k} X_i \cdot X_{k+1}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{k} X_i\right) \cdot EX_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} EX_i \cdot EX_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} EX_i$$ □

Poznámka 3.: Střední hodnotu n-rozměrné náhodné veličiny $X = (X_1, X_2, ...X_n)$ zapisujeme ve formě vektoru středních hodnot $EX = (EX_1, EX_2, ..., EX_n)$.

10.10. Disperze náhodné veličiny

Disperze (rozptyl, variance) charakterizuje rozptýlení hodnot náhodné veličiny okolo její střední hodnoty, přičemž jsou brány v úvahu pravděpodobnosti těchto hodnot.

DEFINICE 10.10.1.: Nechť X je libovolná náhodná veličina. **Disperzí** náhodné veličiny X budeme rozumět číslo DX, definované vztahem:

$$DX = \sum_i (x_i - EX)^2 p(x_i) \qquad \text{pro diskrétní náhodnou veličinu X,}$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) \, dx \qquad \text{pro spojitou náhodnou veličinu X.}$$

Poznámka 1.: Na základě vztahů uvedených v paragrafu 10.9. můžeme disperzi vyjádřit pomocí střední hodnoty funkce $g = X - EX$:

$$DX = E[(X - EX)^2]$$

Místo disperze se někdy používá charakteristika σ, nazvaná **směrodatná odchylka,** definovaná vztahem :

$$\sigma = \sqrt{DX}$$

VĚTA 10.10.1.: Nechť X je náhodná veličina s disperzí DX. Pak platí:

$$DX = EX^2 - (EX)^2$$

Důkaz: $DX = E[(X - EX)^2] = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = EX^2 - E(2XEX) + E(EX)^2 = EX^2 - 2(EX)^2 + E(EX)^2 =$
$= EX^2 - (EX)^2$ □

10.10.1. Vlastnosti disperze

VLASTNOST 1. Nechť k je libovolná konstanta, pak platí:

$$Dk = 0$$

Důkaz: Konstantu k si můžeme představit jako náhodnou veličinu, nabývající jen jedné hodnoty k s pravděpodobností 1. Počítejme :

$$Dk = (k - Ek)^2\ 1 = (k - k)^2 = 0 \quad \square$$

VLASTNOST 2. Nechť k je libovolná konstanta a X libovolná náhodná veličina. Pak platí :

$$D(kX) = k^2\ DX$$

Důkaz:

$$D(kX) = E[(kX - E(kX)^2] = E[(kX - kEX)^2] = E[k^2\ (X-EX)^2] = k^2\ E[(X-EX)^2] = k^2\ DX \quad \square$$

VLASTNOST 3. Nechť X,Y jsou dvě libovolné náhodné veličiny, pak platí:

$$D(X \pm Y) = DX + DY \pm 2cov(X,Y)$$

Důkaz: $D(X \pm Y) = E[((X \pm Y) - E(X \pm Y))^2] = E[((X \pm Y) - (EX \pm EY))^2] =$
$= E[((X - EX) \pm (Y-EY))^2] = E[(X - EX)^2 \pm 2(X - EX)(Y - EY) + (Y - EY)^2] =$
$=E((X - EX)^2) + E((Y - EY)^2) \pm 2E((X - EX)(Y - EY)) = DX + DY \pm 2cov(X,Y)$ □

VLASTNOST 4. Rozptyl součtu i rozdílu dvou nezávislých náhodných veličin je roven součtu rozptylů těchto veličin: $D(X \pm Y) = DX + DY$

Důkaz: Vyjdeme z důkazu předchozí vlastnosti. Počítejme, čemu je rovna střední hodnota $E[(X - EX)(Y - EY)]$ pro nezávislé náhodné veličiny X, Y:

$E[(X - EX)(Y - EY)] = E(XY - YEX - XEY + EXEY) = EXEY - EYEX - EXEY + EXEY=0$

Pak tedy : $D(X \pm Y) = DX + DY$ □

VLASTNOST 5. Nechť $X_1,X_2.....X_n$ je libovolný systém náhodných veličin a n je libovolné přirozené číslo. Pak platí :

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{i<j} cov\left(X_i, X_j\right)$$

Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro dvě náhodné veličiny platí vlastnost 3.
Předpokládáme, že vlastnost 5 bude platit pro k (k≥2) náhodných veličin, tzn.

$$D\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} DX_i + 2\sum_{i<j} cov\left(X_i, X_j\right)$$

a budeme dokazovat její platnost i pro k + 1 náhodných veličin. Pak platí:

$$D\left(\sum_{i=1}^{k+1} X_i\right) = D\left(\sum_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1}\right) = D\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) + DX_{k+1} + 2cov\left[\left(\sum_{i=1}^{k} X_i, X_{k+1}\right)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} DX_i + DX_{k+1} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} cov(X_i, X_j) + 2\sum_{i=1}^{k} cov(X_i, X_{k+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} DX_i + 2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k+1} cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{k+1} DX_i + 2\sum_{i<j} cov\left(X_i, X_j\right)$$

Poznámka2.: Uvědomíme-li si, že DX_i = cov (X_i,X_i) a dále že cov (X_i,X_j) = cov (X_j,X_i), můžeme vztah vyjádřený vlastností 5 přepsat následujícím způsobem:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

DŮSLEDEK : Jsou-li náhodné veličiny $X_1, X_2, ..., X_n$ nezávislé, pak platí :

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} DX_i$$

Důkaz: Důkaz vyplývá přímo z vlastnosti 5. Platí, že kovariance nezávislých náhodných veličin je rovna 0. S touto vlastností kovariance se čtenář seznámí v následující kapitole.

VLASTNOST 6. Nechť $X_1, X_2, ..., X_n$ je libovolná n-tice náhodných veličin, nechť $c_1, c_2, ..., c_n$, b jsou libovolné konstanty a nechť n je přirozené číslo. Pak platí:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n}(c_i^2 DX_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} c_i c_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

Důkaz: S postupným využitím vlastností 3, 1, 5, 2 můžeme psát:

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} D(c_i X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \operatorname{cov}(c_i X_i, c_j X_j) + Db + \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i, b\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(c_i^2 DX_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} c_i c_j \operatorname{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n}(c_i^2 DX_i) + 2\sum_{i<j} c_i c_j \operatorname{cov}(X_i, X_j) \quad \square$$

V důkazu byly využity následující vlastnosti kovariance, se kterými se setkáme v následujícím paragrafu: cov(X,b) = 0 a cov(cX, Y) = c cov(X,Y)

VLASTNOST 7. Nechť X,Y jsou dvě nezávislé náhodné veličiny, pak platí:

$$D(XY) = DX\,DY + (EX)^2 DY + (EY)^2 DX$$

Důkaz: Na základě dříve uvedených vztahů platí:
$D(XY) = E[(XY - EXEY)^2] = E(XY)^2 - 2E(XY)EXEY + (EXEY)^2 = EX^2EY^2 - (EXEY)^2 =$
$=[DX+(EX)^2]\cdot[DY+(EY)^2]-(EXEY)^2 = DXDY+(EX)^2DY+ (EY)^2DX + (EXEY)^2- (EXEY)^2= = DXDY + (EX)^2DY + (EY)^2DX$ $\square$

10.11. Kovariance náhodných veličin

Kovariance patří mezi nejjednodušší charakteristiky závislosti (těsnosti vztahu) mezi náhodnými veličinami X a Y.

DEFINICE 10.11.1.: Nechť X,Y jsou libovolné dvě náhodné veličiny s konečnými druhými momenty. Číslo **cov(X,Y)** definované vztahem

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i\sum_j (x_i - EX)\cdot(y_j - EY)\cdot p(x_i, y_j) \quad \text{v diskrétním případě,}$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)\cdot(y - EY)\cdot f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{ve spojitém případě.}$$

budeme nazývat **kovariancí** náhodných veličin X a Y.

Na základě vztahu pro střední hodnotu funkce náhodných veličin (paragraf 10.9.) můžeme kovarianci vyjádřit jako střední hodnotu součinu odchylek obou veličin od jejich středních hodnot, tzn.

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X - EX)\cdot(Y - EY)]$$

V praxi se častěji využívá výpočtový tvar výše uvedeného vztahu, což vyjadřuje následující věta:
VĚTA 10.11.1.: Nechť X,Y jsou libovolné dvě náhodné veličiny. Pak platí:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY$$

Důkaz: cov(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E[XY - XEY -YEX + EXEY]=E(XY)-E(XEY)-E(YEX)+ EXEY= = E(XY) - EXEY - EYEX + EXEY = E(XY) - EXEY $\square$

Dále jsou uvedeny některé důležité vlastnosti kovariance:

VLASTNOST 1. Nechť X,Y jsou libovolné náhodné veličiny. Pak platí:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$$

Důkaz: $\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X - E X)(Y - EY)] = E[(Y - EY)(X - EX)] = \mathrm{cov}(Y,X)$ □

VLASTNOST 2. Nechť X je libovolná náhodná veličina a k reálné číslo. Pak platí:

$$\mathrm{cov}(X,k) = 0$$

Důkaz: $\mathrm{cov}(X,k) = E(Xk) - EXEk = kEX - kEX = 0$ □

VLASTNOST 3. Nechť X,Y jsou libovolné dvě náhodné veličiny a k reálné číslo. Pak platí:

$$\mathrm{cov}(kX,Y) = k\cdot\mathrm{cov}(X, Y)$$

Důkaz: $\mathrm{cov}(kX,Y) = E(kXY) - E(kX)EY = kE(XY) - kEXEY = k[E(XY) - EXEY] = k\mathrm{cov}(XY)$ □

VLASTNOST 4. Nechť X,Y,Z jsou libovolné tři náhodné veličiny. Pak platí:

$$\mathrm{cov}(X+Y, Z) = \mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z)$$

Důkaz:

$\mathrm{cov}(X+Y, Z) = E[(X+Y - (EX + EY))(Z-EZ)] = E[(X - EX + Y - EY)(Z - EZ)] =$

$= E[(X - EX)(Z - EZ) + (Y - EY)(Z - EZ)] = E[(X - EX)(Z - EZ)] + E[(Y - EY)(Z - EZ)] =$

$= \mathrm{cov}(X, Z) + \mathrm{cov}(Y, Z)$ □

Vlastnost 4 můžeme rozšířit na libovolný počet náhodných veličin. Pak platí následující tvrzení:

VLASTNOST 5. Nechť $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$, Z jsou libovolné náhodné veličiny. Pak platí:

$$\mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, Z\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, Z)$$

Důkaz: matematickou indukcí.

Mezi nezávislostí náhodných veličin X, Y a jejich kovariancí existuje souvislost, kterou vyjadřuje následující věta :

VĚTA 10.11.2: Nechť X,Y je dvojice nezávislých náhodných veličin. Pak platí:

$$\mathrm{cov}(X,Y) = 0$$

Důkaz: Jestliže náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, potom i náhodné veličiny (X-EX) a (Y - EY) jsou nezávislé a na základě vlastnosti 7 střední hodnoty můžeme psát :

$\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(X - EX)\,E(Y - EY) = (EX - EX)(EY - EY) = 0$

OBRÁCENÁ VĚTA NEPLATÍ !

Jestliže $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, nemusí to znamenat, že náhodné veličiny jsou nezávislé. O tomto tvrzení se můžeme přesvědčit následujícím příkladem:

PŘÍKLAD 10.11.1.: Předpokládejme, že náhodná veličina X má normální rozložení pravděpodobností N(0,1). Utvoříme novou náhodnou veličinu Y, která je s náhodnou veličinou X ve vztahu $Y = X^2$. Je zřejmé, že náhodné veličiny X a Y nejsou nezávislé. Je možné ukázat, že jejich kovariance je rovna 0.

Platí:

$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY = E(X\cdot X^2) - 0\cdot EY = EX^3$

Vzhledem k tomu, že N(0,1) rozdělení pravděpodobností je symetrické podle osy y, je střední hodnota náhodné veličiny X^3 rovna 0 a pak i $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Z uvedeného příkladu plyne, že rovnost $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ ještě neznamená nezávislost těchto náhodných veličin.

Značnou nevýhodou kovariance, jakožto míry závislosti náhodných veličin, je to, že její hodnota je dána nejen velikostí závislosti těchto náhodných veličin, ale závisí i na jednotkách, ve kterých jsou měřeny hodnoty jednotlivých náhodných veličin. Proto se místo kovariance používá jiná charakteristika těsnosti závislosti náhodných veličin, a to koeficient korelace.

10.12. Koeficient korelace

DEFINICE 10.12.1.: Nechť X,Y jsou dvě libovolné náhodné veličiny s konečnými druhými momenty a nenulovými směrodatnými odchylkami σ_X a σ_Y . Číslo ρ definované vztahem

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

budeme nazývat **koeficientem korelace** náhodných veličin X a Y.

Je-li X nebo Y konstanta, pak $\rho = 0$.

Koeficient korelace je bezrozměrná veličina, jejíž hodnota nezávisí na jednotkách, ve kterých jsou vyjádřeny hodnoty náhodných veličin X a Y. Proto je koeficient korelace považován za objektivnější míru lineární závislosti dvou náhodných veličin, nežli kovariance.

VĚTA 10.12.1.: Nechť X,Y jsou dvě libovolné náhodné veličiny. Koeficient korelace těchto náhodných veličin je roven nule tehdy a jen tehdy, když cov(X,Y) = 0.
Důkaz: Vyplývá z definice koeficientu korelace. □

Poznámka 1 : Z předcházející věty bezprostředně plyne, že pro nezávislé náhodné veličiny X a Y je koeficient korelace $\rho = 0$, a že tato rovnost ještě neznamená nezávislost náhodných veličin X, Y.
Poznámka 2 : Nechť X,Y jsou dvě náhodné veličiny s koeficientem korelace $\rho = 0$.
Potom říkáme, že náhodné veličiny X a Y jsou **nekorelované**.

VĚTA 10.12.2.: Nechť ρ je koeficient korelace libovolných náhodných veličin X,Y.
Pak platí: $-1 \le \rho \le 1$

Důkaz: Nechť Z je náhodná veličina tvaru $Z = \left[t \cdot \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} - \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}}\right]^2$, kde t je reálný parametr. Náhodná veličina Z může nabývat jen nezáporných hodnot, proto i pro její střední hodnotu platí $EZ \ge 0$.
Počítejme nyní, čemu se rovná tato střední hodnota:

$$EZ = E\left[t \cdot \frac{X - EX}{\sqrt{DX}} - \frac{Y - EY}{\sqrt{DY}}\right]^2 = E\left[t^2 \cdot \frac{(X - EX)^2}{DX} - 2t\frac{(X - EX)}{\sqrt{DX}} \cdot \frac{(Y - EY)}{\sqrt{DY}} + \frac{(Y - EY)^2}{DY}\right] =$$

$$= t^2 \cdot \frac{E(X - EX)^2}{DX} - \frac{2t}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} E[(X - EX)(Y - EY)] + \frac{E(Y - EY)^2}{DY} =$$

$$= t^2 \cdot \frac{DX}{DX} - \frac{2t \cdot \operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} + \frac{DY}{DY} = t^2 - 2t \cdot \rho + 1$$

Ze vztahu $EZ \ge 0$ plyne, že musí platit: $t^2 - 2t \cdot \rho + 1 \ge 0$

Aby platila tato nerovnost, nesmí graf funkce $f(t) = t^2 - 2t \cdot \rho + 1$ protnout osu x kartézské soustavy souřadnic. Tento požadavek je splněn za předpokladu, že kvadratická rovnice $t^2 - 2t \cdot \rho + 1 = 0$ nebude mít dva různé reálné kořeny. Je známo, že tento případ nastane právě tehdy, když diskriminant $D \le 0$. V našem případě pak musí platit, že $4\rho^2 - 4 \le 0$, z čehož plyne, že $|\rho| \le 1$. □

VĚTA 10.12.3.: Nechť X,Y jsou dvě náhodné veličiny. Koeficient korelace $\rho = \pm 1$ právě tehdy, když je mezi náhodnými veličinami X, Y "čistá" lineární závislost, tj. když platí $Y = cX+b$, kde c, b jsou reálné konstanty.
Důkaz:
Postačující podmínka: Nechť $Y = cX + b$. Vypočítejme kovarianci náhodných veličin X a Y.
$\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X-EX) \cdot (Y - EY)] = E[(X-EX) \cdot (cX + b - cEX - b)] = E[c(X-EX)^2] = c\,E[(X-EX)^2] = c\,DX$
Pro koeficient korelace pak platí:

$$\rho = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{c \cdot DX}{\sigma_X \cdot |c| \cdot \sigma_x} = \frac{c}{|c|}$$

Jestliže $c < 0$, pak $\rho = -1$.
Jestliže $c > 0$, pak $\rho = +1$.

Nutná podmínka: Předpokládejme, že $\rho = 1$. Položme dále $X' = \dfrac{X - EX}{\sigma_X}$ a $Y' = \dfrac{Y - EY}{\sigma_Y}$.

Vypočítejme střední hodnotu součinu $X' \cdot Y'$.

$$E(X' \cdot Y') = E\left[\frac{X - EX}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - EY}{\sigma_Y}\right] = \frac{E[(X - EX) \cdot (Y - EY)]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \rho = 1$$

Dále vypočítejme disperzi rozdílu $X' - Y'$.

$D(X'-Y') = E[(X' - Y')^2] = E(X'^2 - 2X'Y' + Y'^2) = E(X'^2) - 2E(X'Y') + E(Y'^2) = DX' - 2 + DY' = 1 - 2 + 1 = 0$

Z rovnosti $D(X'-Y') = 0$ plyne, že rozdíl $X'-Y'$ náhodných veličin X' a Y' je s pravděpodobností 1 roven nějaké konstantě c.

Jestliže ale $E(X'-Y') = 0$, musí být konstanta $c = 0$, z čehož plyne, že $X' = Y'$. Zpětným dosazením za X' a Y' dostaneme, že $Y = cX + b$, kde

$$c = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \quad \text{a} \quad b = Y - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} EX.$$

V případě, že je $\rho = -1$ dokážeme, že $D(X'+Y') = 0$ a pokračujeme stejně jako ve výše uvedené části důkazu.

□

Na základě uvedené věty můžeme usuzovat, že hodnoty korelačního koeficientu, které jsou blízké 1 nebo -1 ukazují, že závislost mezi náhodnými veličinami X a Y se velmi blíží lineární funkční závislosti. Můžeme tedy říci, že koeficient korelace je ukazatelem míry těsnosti lineární závislosti mezi náhodnými veličinami X a Y.

Poznámka: Jestliže $X = (X_1, X_2, \ldots X_n)$ je n-rozměrná náhodná veličina, potom její kovarianční maticí nazýváme matici D, pro kterou platí :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(X_1, X_1) & \operatorname{cov}(X_1, X_2) & \ldots & \operatorname{cov}(X_1, X_n) \\ \operatorname{cov}(X_2, X_1) & \operatorname{cov}(X_2, X_2) & \ldots & \operatorname{cov}(X_2, X_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \operatorname{cov}(X_n, X_1) & \operatorname{cov}(X_n, X_2) & \ldots & \operatorname{cov}(X_n, X_n) \end{bmatrix}$$

Matice D je symetrická, $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \operatorname{cov}(X_2, X_1)$ a na její hlavní diagonále jsou uvedeny rozptyly jednotlivých náhodných veličin, neboť platí, že $\operatorname{cov}(X_i, X_i) = DX_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Z hodnot kovarianční matice mohou být vypočítány hodnoty korelačních koeficientů

$$\rho_{ij} = \rho(X_i, X_j), \quad \text{kde } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Tyto hodnoty korelačních koeficientů se sestavují opět do symetrické, tzv. korelační matice

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \ldots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \ldots & \rho_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

10.13. Podmíněné střední hodnoty a disperze

Podobně jako u jednorozměrných rozdělení pravděpodobností, informace o podmíněných rozděleních pravděpodobností shrnují podmíněné charakteristiky, tzn. charakteristiky náhodné veličiny X nebo Y, počítané za podmínky, že druhá veličina nabude určité hodnoty.

DEFINICE 10.13.1.: Nechť (X,Y) je dvourozměrný náhodný vektor. Číslo $E(X|y)$, definované vztahem

$$E(X|y) = \sum_i x_i\, p(x_i|y) \quad \text{pro diskrétní náhodnou veličinu,}$$

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y)\, dx \quad \text{pro spojitou náhodnou veličinu,}$$

budeme nazývat **podmíněnou střední hodnotou** náhodné veličiny X při dané hodnotě y náhodné veličiny Y.

Číslo $E(Y \mid x)$ definované vztahem

$$E(Y|x) = \sum_i y_i\, p(y_i|x) \qquad \text{pro diskrétní náhodnou veličinu,}$$

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x)\, dy \qquad \text{pro spojitou náhodnou veličinu,}$$

budeme nazývat **podmíněnou střední hodnotou** náhodné veličiny Y za podmínky, že náhodná veličina X nabyla hodnoty x.

DEFINICE 10.13.2.: Nechť (X,Y) je dvourozměrný náhodný vektor. Číslo $D(X| y)$, definované vztahem

$$D(X|y) = \sum_i (x_i - E(X|y))^2\, p(x_i|y) \qquad \text{v diskrétním případě,}$$

$$D(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X|y))^2 f(x|y)\, dx \qquad \text{ve spojitém případě,}$$

budeme nazývat **podmíněnou disperzí** náhodné veličiny X při dané hodnotě y náhodné veličiny Y.

Číslo $D(Y \mid x)$ definované vztahem

$$D(Y|x) = \sum_i (y_i - E(Y|x))^2\, p(y_i|x) \qquad \text{v diskrétním případě,}$$

$$D(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - E(Y|x))^2 f(y|x)\, dy \qquad \text{ve spojitém případě,}$$

budeme nazývat **podmíněnou disperzí** náhodné veličiny Y při dané hodnotě x náhodné veličiny X.

DEFINICE 10.13.3.: Podmíněnou střední hodnotu $E(Y \mid x)$, považovanou za funkci proměnné x, budeme nazývat **regresní funkcí** náhodné veličiny Y vzhledem k X a značit

$$\overline{y}(x) = E(Y \mid x)$$

Analogicky funkci $\overline{x}(y) = E(X| y)$ nazýváme regresní funkcí náhodné veličiny X vzhledem k Y.

Regresní funkce vyjadřuje změny podmíněné střední hodnoty jedné náhodné veličiny při změně hodnot druhé náhodné veličiny. Graf regresní funkce nazýváme **regresní křivka**.

Podobně jako podmíněné střední hodnoty můžeme uvažovat podmíněné disperze $D(X| y)$ resp. $D(Y| x)$ jako funkce proměnné y resp. x. Tato funkce se nazývá **skedastická** a její tvar charakterizuje měnlivost rozptylu náhodné veličiny Y v závislosti na hodnotách x. Graf této funkce nazýváme skedastická křivka náhodné veličiny X vzhledem k Y resp. Y vzhledem k X.

11. REGRESE

11.1. Stochastická závislost

Předpokládejme, že X a Y jsou dvě náhodné veličiny, které jsou ve vzájemném vztahu Y = g(X). V tomto případě je náhodná veličina Y závislá na náhodné veličině X. Známe-li funkci g a hodnotu náhodné veličiny X, umíme přesně určit i hodnotu náhodné veličiny Y. Tato závislost se pak nazývá **funkční závislost**.

V praxi ovšem najdeme řadu příkladů, kdy mezi dvěma náhodnými veličinami funkční závislost není. Jsou známé případy, kdy hodnoty, kterých nabývají náhodné veličiny X a Y, závisí na několika faktorech, které mají současně vliv na obě náhodné veličiny a též na faktorech, které mají vliv jen na jednu náhodnou veličinu.

V tomto případě jsou náhodné veličiny také závislé, ale nejedná se o funkční závislost, nýbrž o **závislost stochastickou**.

DEFINICE 11.1.1.: Nechť X,Y jsou dvě náhodné veličiny. Jestliže změna hodnoty jedné náhodné veličiny vyvolá změnu rozdělení pravděpodobností druhé náhodné veličiny , říkáme, že náhodné veličiny X,Y jsou **stochasticky závislé**.

Nejdůležitější zvláštnosti stochastické závislosti se projevují ve změnách střední hodnoty jedné náhodné veličiny, souvisejících se změnami hodnot druhé náhodné veličiny, to znamená, že se projevují prostřednictvím regresních funkcí.

Pomocí regresní funkce můžeme předpovídat, jaké hodnoty nabyde jedna náhodná veličina, když známe hodnotu druhé náhodné veličiny. Protože Y je náhodná veličina, nemusí vždy při dané hodnotě x náhodné veličiny X nabýt hodnoty $E(Y|x)$ [hodnoty $E(Y|x)$ zde náhodná veličina Y nabývá „v průměru“], ale bude nabývat hodnoty rozptýlené okolo ní. Mírou tohoto rozptylu je podmíněná disperze $D(Y|x)$ resp. $D(X|y)$.

Představu o celkové přesnosti předpovědi, tj. o přesnosti, která bere ohled na každou hodnotu x náhodné veličiny X, dává střední hodnota z jednotlivých podmíněných disperzí, tj. $E(D(Y|X))$.

Vypočítáme nyní, čemu se rovná střední hodnota $E(D(Y|X))$.
$E(D(Y|X)) = E\{E[Y - E(Y|X)]^2\} =$
v případě diskrétních náhodných veličin:
$$= \sum_i \sum_j \left(y_j - \bar{y}(x_i)\right)^2 p(y_j|x_i) \cdot p(x_i) = \sum_i \sum_j \left(y_j - \bar{y}(x_i)\right)^2 p(x_i, y_j) = E\left[\left(Y - \bar{y}(X)\right)^2\right]$$
v případě spojitých náhodných veličin:
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \bar{y}(x)\right)^2 f(y|x) \cdot f_X(x)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \bar{y}(x)\right)^2 f(x,y)\,dx\,dy = E\left[\left(Y - \bar{y}(X)\right)^2\right]$$

Platí : $E(D(Y|X)) = E[(Y - \bar{y}(X))^2]$

Z uvedeného vztahu vyplývá, že $E(D(Y|X))$. je vlastně střední kvadratická chyba, které se dopustíme, když hodnoty náhodné veličiny Y nahrazujeme hodnotami regresní funkce $\bar{y}(x)$. Snadno se můžeme přesvědčit o tom, že veličina $E[(Y - g(x))^2]$ nabyde nejmenší hodnoty, když $g(x) = \bar{y}(x)$.

11.2. Lineární regresní funkce a korelační koeficient

Předpokládejme, že regresní funkce $\bar{y}(x)$ je lineární funkcí, tedy že ji můžeme vyjádřit ve tvaru
$$\bar{y}(x) = \alpha + \beta x.$$
Přímku $\bar{y}(x) = \alpha + \beta x$ nazýváme **regresní přímkou** a její směrnici β **regresním koeficientem**.
Naším úkolem je nalézt koeficienty α, β tak, aby byla splněna podmínka, že $E[(Y - \bar{y}(X))^2]$ je minimální.
Hledané koeficienty α, β dostaneme řešením rovnic:

$$\frac{\partial E[(Y - \overline{y}(X))^2\,]}{\partial \alpha} = 0 \qquad a \qquad \frac{\partial E[(Y - \overline{y}(X))^2\,]}{\partial \beta} = 0 \qquad (11.2.1.)$$

Upravíme vztah $E[(Y - \overline{y}(X))^2\,]$:

$E[(Y - \overline{y}(X))^2\,] = E[(Y - \alpha - \beta X)^2\,] = E[Y^2 + \alpha^2 + (\beta X)^2 - 2Y\beta X - 2Y\alpha + 2\alpha\beta X] =$

$= EY^2 + \alpha^2 + \beta^2 EX^2 - 2\beta E(XY) - 2\alpha EY + 2\alpha\beta EX$

Dosazením tohoto upraveného vztahu do rovnic (11.2.1.) a zderivováním dostaneme následující rovnice:

$$2\alpha - 2EY + 2\beta EX = 0$$
$$2\beta EX^2 - 2E(XY) + 2\alpha EX = 0$$

Upravíme:

$$2\alpha + 2\beta EX = 2EY \qquad (11.2.2.)$$
$$2\alpha EX + 2\beta EX^2 = 2E(XY)$$

Řešení soustavy je následujícího tvaru:

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2EY \\ 2EX & 2E(XY) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2EX \\ 2EX & 2EX^2 \end{vmatrix}} = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{EX^2 - (EX)^2} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{DX} = \rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Neznámou α vypočítáme dosazením β do první rovnice v soustavě (11.2.2.).

$$\alpha = EY - \beta EX = EY - \rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} EX$$

Hledaná regresní přímka má pak tvar : $\overline{y}(x) = EY + \rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - EX)$

Dále budeme hledat hodnotu výrazu $E[(Y - \overline{y}(X))^2\,]$ pro lineární regresní funkci. Platí:

$E[(Y - \overline{y}(X))^2\,] = E[(Y - \alpha - \beta X)^2\,] = E[(Y - EY - \beta X - \beta EX)^2\,] = E[(Y - EY)^2] +$
$+ E[\beta^2(X - EX)^2] - 2\beta E[(Y - EY)(X - EX)] = DY + \beta^2 DX - 2\beta\cdot\operatorname{cov}(X,Y) =$

$= DY + \rho^2 \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)$

Platí tedy: $E[(Y - \overline{y}(X))^2\,] = \sigma_Y^2 (1 - \rho^2)$

Z uvedeného vztahu je zřejmé, že v případě lineární regrese je korelační koeficient mírou koncentrace hodnot náhodné veličiny Y okolo regresní přímky. Jinými slovy můžeme říci, že korelační koeficient vyjadřuje míru těsnosti lineární závislosti náhodných veličin X a Y. V případě, že $\rho = 1$ nebo $\rho = -1$, leží hodnoty náhodné veličiny Y přímo na regresní přímce $\overline{y}(x)$. Mezi náhodnými veličinami X a Y je pak „čistá“ lineární závislost.

Pokud bychom chtěli vyjádřit rovnici regresní přímky náhodné veličiny X vzhledem k náhodné veličině Y, provedeme formální záměnu X a Y ve výše uvedených vztazích a získáme koeficienty lineární regrese α' a β'.

$$\beta' = \rho \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \qquad a \qquad \alpha' = EX - \rho \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} EY$$

Pak má rovnice regresní přímky tvar: $\overline{x}(y) = EX + \rho \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - EY)$

Porovnáním obou rovnic regresních přímek zjistíme, že v případě, že $\rho = 1$ nebo $\rho = -1$ určují obě rovnice stejnou přímku. To znamená, že regresní přímka náhodné veličiny Y vzhledem k náhodné veličině X a regresní přímka náhodné veličiny X vzhledem k náhodné veličině Y jsou totožné.

12. MOMENTOVÁ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE

12.1. Momentová vytvořující funkce, definice a vlastnosti

K výpočtu momentů diskrétní i spojité náhodné veličiny X je velice užitečná znalost momentové vytvořující funkce $m_X(t)$, která je definována jako střední hodnota funkce e^{tX}. Podmínkou je existence této střední hodnoty alespoň pro malé hodnoty t.

DEFINICE 12.1.1.: Nechť X je libovolná náhodná veličina. Momentovou vytvořující funkcí rozumíme funkci $m_X(t)$ reálné proměnné t, definovanou vztahem

$$m_X(t) = E(e^{tX})$$

za předpokladu, že střední hodnota existuje.

Pro některá rozdělení pravděpodobností momentová vytvořující funkce neexistuje, ale všechna rozdělení mají tzv. charakteristickou funkci $E(e^{itX})$, kde $i^2 = -1$. Tato charakteristická funkce má podobné vlastnosti jako momentová vytvořující funkce, její použití předpokládá znalost operací s komplexní proměnnou.

Momentová vytvořující funkce diskrétní náhodné veličiny X má tvar: $m_X(t) = \sum_i e^{tx_i} p(x_i)$

Momentová vytvořující funkce spojité náhodné veličiny X má tvar: $m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$

VĚTA 12.1.1.: Počáteční moment k-tého řádu je roven k-té derivaci momentové vytvořující funkce náhodné veličiny X v bodě t = 0, tzn.

$$\left[\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} m_X(t)\right]_{t=0} = \nu_k$$

Důkaz: Předpokládejme, že náhodná veličina X je diskrétní. Potom

$$\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} m_X(t) = \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} E(e^{tX}) = \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} \sum_i e^{tx_i} p(x_i) = \sum_i \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} e^{tx_i} p(x_i) = \sum_i x_i^k e^{tx_i} p(x_i)$$

k-tá derivace v bodě t = 0 se pak rovná:

$$\left[\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} m_X(t)\right]_{t=0} = \left[\sum_i x_i^k e^{tx_i} p(x_i)\right]_{t=0} = \sum_i x_i^k p(x_i) = \nu_k$$

Předpokládejme, že náhodná veličina X je spojitá. Potom

$$\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} m_X(t) = \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} E(e^{tX}) = \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} e^{tx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{tx} f(x) dx$$

$$\left[\frac{d^{(k)}}{dt^{(k)}} m_X(t)\right]_{t=0} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{tx} f(x) dx\right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \nu_k \qquad \square$$

Momentová vytvořující funkce se používá nejen pro výpočet momentů, ale i v dalších oblastech teorie pravděpodobnosti. Jednou z těchto význačných oblastí jsou limitní věty a na nich založená teorie velkých výběrů. Při důkazech těchto limitních vět se využívají dvě důležité vlastnosti momentové vytvořující funkce, které nyní bez důkazu uvedeme.

VLASTNOST 1. : Vztah mezi rozdělením pravděpodobností dané náhodné veličiny a momentovou vytvořující funkcí je vzájemně jednoznačný.

Tato vlastnost 1 říká, že jednomu rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X odpovídá jen jedna momentová vytvořující funkce (pokud existuje) a jedné momentové vytvořující funkci odpovídá právě jedno rozdělení pravděpodobností. Jinými slovy, mají-li náhodné veličiny totéž rozdělení pravděpodobností, mají také stejnou momentovou vytvořující funkci a naopak. Tato vlastnost může být využita při hledání rozdělení pravděpodobností funkcí náhodných veličin, pokud je přímé určení rozdělení pravděpodobností velmi těžké nebo přímo nemožné.

VLASTNOST 2. : Jestliže posloupnost momentových vytvořujících funkcí konverguje k momentové vytvořující funkci nějakého rozdělení pravděpodobností, pak i posloupnost odpovídajících rozdělení pravděpodobností konverguje ke stejnému rozdělení pravděpodobností.

PŘÍKLAD 1.: Najděte momentovou vytvořující funkci normálního rozdělení pravděpodobností N(μ, σ) a vypočítejte jeho disperzi.
Řešení:

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

zavedeme substituci $\frac{x-\mu}{\sigma} = y \qquad \frac{dx}{\sigma} = dy$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma y+\mu)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu t} e^{\frac{2\sigma t y - y^2}{2}} dy = \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\sigma t)^2-(\sigma t)^2}{2}} dy =$$

$$= e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sigma t)^2}{2}} dy =$$

substitucí y - σt = z; dy = dz převedeme tento integrál na integrál hustoty N(0,1) rozdělení pravděpodobností:

$$= e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}}$$

Momentová vytvořující funkce má pak tvar:

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}}$$

Dalším naším úkolem je vypočítat disperzi. Disperze je druhý centrální moment μ_2. Momentová vytvořující funkce ale poskytuje jen počáteční momenty. Ze vztahu pro výpočet disperze DX = EX^2 - (EX)^2 plyne, že $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$

$$\nu_1 = \left[\frac{d}{dt} m_X(t)\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt} e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}}\right]_{t=0} = \left[e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}} \cdot (\mu + \sigma^2 t)\right]_{t=0} = \mu$$

$$\nu_2 = \left[\frac{d^2}{dt^2} m_X(t)\right]_{t=0} = \left[\frac{d^2}{dt^2} e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}}\right]_{t=0} = \left[e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}} \cdot (\mu + \sigma^2 t)^2 + e^{\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}} \cdot \sigma^2\right]_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$$

$$DX = \nu_2 - \nu_1^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

12.2. Momentová vytvořující funkce součtu náhodných veličin

VĚTA 12.2.1.: Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je systém nezávislých náhodných veličin. Označme $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Pak platí:

$$m_Y(t) = m_{X_1}(t) \cdot m_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot m_{X_n}(t)$$

Důkaz: $m_Y(t) = E(e^{Yt}) = E\left(e^{\sum_i X_i t}\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{X_i t}\right)$

Kdyby náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ byly nezávislé, budou nezávislé i náhodné veličiny $e^{X_i t}$ a na základě vlastnosti střední hodnoty č. 8 z kapitoly 10.9. $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} EX_i$ můžeme psát:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{X_i t}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{X_i t}\right) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t) \qquad \square$$

PŘÍKLAD 2.: Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ je n-tice nezávislých náhodných veličin, z nichž každá má normální rozdělení pravděpodobností $N(\mu_i, \sigma_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Najděte rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Řešení: Náhodná veličina Y je součtem nezávislých náhodných veličin X_i, i = 1, 2, ..., n. Její momentovou vytvořující funkci můžeme vypočítat podle vztahu z věty 12.2.1.:

$$m_Y(t) = m_{X_1}(t) \cdot m_{X_2}(t) \cdot \ldots \cdot m_{X_n}(t)$$

Vzhledem k tomu, že náhodné veličiny X_i mají normální rozložení pravděpodobností $N(\mu_i, \sigma_i)$, i = 1, 2, ..., n , můžeme psát:

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}} = e^{\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i t + \frac{\sigma_i^2 t^2}{2}\right)} = e^{\sum_{i=1}^{n}\mu_i t + \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 t^2}{2}}$$

Porovnáme-li výraz $e^{\sum_{i=1}^{n}\mu_i t + \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 t^2}{2}}$ s momentovou vytvořující funkcí normálního rozdělení pravděpodobností $N(\mu,\sigma)$ vidíme, že tento výraz vyjadřuje momentovou vytvořující funkci normálního rozdělení pravděpodobností s parametry $N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}\right)$.

Na základě uvedeného příkladu můžeme tvrdit, že součet nezávislých náhodných veličin s normálním rozdělením pravděpodobností je opět náhodná veličina s normálním rozdělením pravděpodobností s parametry uvedenými v příkladu.

12. LIMITNÍ VĚTY

Limitní věty vyjadřují statistické zákonitosti, které se projevují při mnohonásobném opakování náhodného pokusu. Limitní věty se rozdělují na dva typy: zákony velkých čísel a centrální limitní věty.

12.1. Čebyševova nerovnost

Čebyševova nerovnost nepatří mezi limitní věty, ale její znalost je v této kapitole nezbytná. Čebyševova nerovnost se uplatňuje při odhadech pravděpodobností náhodných veličin, jejichž rozdělení není ani přibližně známé, ale jsou-li známé jeho charakteristiky - střední hodnota a rozptyl.

VĚTA 12.1.1.: Nechť X je libovolná náhodná veličina se střední hodnotou EX a disperzí DX. Nechť ε je libovolné kladné číslo. Pak platí:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Tuto nerovnost nazýváme Čebyševovou nerovností.

Důkaz: Nechť X je náhodná veličina diskrétního typu. Potom pravděpodobnost $P(|X - EX| \geq \varepsilon)$ můžeme vyjádřit jako součet $P(|X - EX| \geq \varepsilon) = \sum\limits_{|x_i - EX| \geq \varepsilon} p(x_i)$

Počítejme nyní pravou stranu:

$$DX = \sum_i (x_i - EX)^2 p(x_i) \geq \sum_{|x_i - EX| \geq \varepsilon} (x_i - EX)^2 p(x_i) \geq \sum_{|x_i - EX| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 p(x_i) = \varepsilon^2 \sum_{|x_i - EX| \geq \varepsilon} p(x_i) = \varepsilon^2 P(|X - EX| \geq \varepsilon)$$

Osamostatněním výrazu $P(|X - EX| \geq \varepsilon)$ dostáváme tvrzení věty 12.1.1.

Nechť X je náhodná veličina spojitého typu. Pak dostáváme:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = \int\limits_{|x - EX| \geq \varepsilon} f(x)dx$$

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x)dx \geq \int\limits_{|x - EX| \geq \varepsilon} (x - EX)^2 f(x)dx \geq \int\limits_{|x - EX| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 f(x)dx = \varepsilon^2 \int\limits_{|x - EX| \geq \varepsilon} f(x)dx = \varepsilon^2 P(|X - EX| \geq \varepsilon)$$

Odsud plyne, že $P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$ □

Poznámka 1.: Někdy se Čebyševova nerovnost zapisuje ve tvaru :

$$P(|X - EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Poznámka 2.: Jestliže v Čebyševově nerovnosti položíme $\varepsilon = 3\sigma$, dostáváme

$$P(|X - EX| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{DX}{(3\sigma)^2} = \frac{8}{9}$$

Z uvedené nerovnosti vyplývá, že bez ohledu na rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X bude pravděpodobnost toho, že se hodnota této náhodné veličiny neodchýlí od její střední hodnoty o více než trojnásobek směrodatné odchylky větší nebo rovna 8/9. Pro většinu rozdělení pravděpodobností bývá tato pravděpodobnost podstatně vyšší. Například pro normální rozdělení pravděpodobností je tato pravděpodobnost rovna 0,997. Na této vlastnosti je založené tzv. pravidlo tří sigma, které říká, že pokud neznáme rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X, ale známe její střední hodnotu EX a disperzi DX, můžeme interval (EX- 3σ; EX + 3σ) považovat za interval prakticky možných hodnot náhodné veličiny X.

12.2. Konvergence podle pravděpodobnosti

DEFINICE 12.2.1.: Nechť $X_1, X_2, ..., X_n$ je posloupnost náhodných veličin. Říkáme, že uvedená posloupnost konverguje podle pravděpodobnosti P k nějaké konstantě c, když pro libovolné číslo $\varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - c\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Jiná formulace stejné definice:
DEFINICE 12.2.2.: Říkáme, že posloupnost náhodných veličin X_1, X_2, ..., X_n konverguje podle pravděpodobnosti P k číslu c, jestliže ke každé dvojici čísel ε, δ existuje takové N, že pro všechna n >N platí:

$$P\left(\left|X_n - c\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \delta$$

Výše uvedené vztahy můžeme přepsat následujícím způsobem :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - c\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

$$P\left(\left|X_n - c\right| \geq \varepsilon\right) < \delta$$

Poslední uvedené vztahy říkají, že se zvětšujícím se n klesá pravděpodobnost toho, že se hodnota náhodné veličiny X_n bude lišit od čísla c o více než ε, čili že se pravděpodobnost odchylek od konstanty c zmenšuje.
Vztah $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - c\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ říká, že pro n blížící se nekonečnu (hodně velké hodnoty n) je pravděpodobnost hodnoty x_n, která se liší od c o více než ε, nulová. Ze skutečnosti, že pravděpodobnost nějakého náhodného jevu je nulová ale ještě nevyplývá, že tento jev je nemožný. Tedy i přes platnost uvedeného vztahu se může stát, že pro $n \to \infty$ budou existovat takové hodnoty x_n , které se budou lišit od c o nějakou kladnou konstantu.

12.3. Zákon velkých čísel

Zákon velkých čísel umožňuje propojení teorie pravděpodobnosti jako teoretické disciplíny a jejího využití v praktických úlohách matematické statistiky. Zde nachází široké uplatnění, protože mnohé výsledky jsou založené právě na jeho tvrzení.

Provádíme-li na jednom přístroji, který není zatížen systematickou chybou a kde odchylky od přesné hodnoty jsou pouze náhodné, opakovaná měření, intuitivně očekáváme, že bude průměrná hodnota měření (empirická charakteristika) blízká přesné hodnotě (teoretické charakteristice).

Můžeme pak říci, že zvětšuje-li se počet pokusů, lze za určitých podmínek očekávat, že empirická charakteristika se bude blížit charakteristice teoretické. To je obecné vyjádření zákona velkých čísel a konkrétní podmínky jeho působení vyjadřují jednotlivé dílčí věty.
Uvádíme několik formulací zákona velkých čísel.

VĚTA 12.3.1. (Čebyševova): Nechť X_1, X_2, ..., X_n je n-tice nezávislých náhodných veličin se středními hodnotami EX_1, EX_2, ..., EX_n a disperzemi DX_1, DX_2, ..., DX_n, shora ohraničenými kladnou konstantou c. Pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

kde ε je libovolně malá kladná konstanta.
Důkaz:

Označme $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Potom: $EY = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i$

$$DY = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i$$

Přepíšeme Čebyševovu nerovnost pro náhodnou veličinu Y:

$$P(|Y - EY| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DY}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} DX_i}{n^2\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{n \cdot c}{n^2\varepsilon^2} = 1 - \frac{c}{n\,\varepsilon^2}$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ přejde výše uvedená nerovnost na tvar:

$$P(|Y - EY| < \varepsilon) \geq 1$$

Protože pravděpodobnost libovolného náhodného jevu je vždy shora ohraničená číslem 1, musí platit

$$P(|Y - EY| < \varepsilon) \leq 1$$

Ze současné platnosti obou vztahů plyne rovnost:

$$P(|Y - EY| < \varepsilon) = 1 \qquad \square$$

Zákon velkých čísel říká, že aritmetický průměr hodnot náhodných veličin $X_1, X_2, ..., X_n$ konverguje podle pravděpodobnosti k aritmetickému průměru jejich středních hodnot.

VĚTA 12.3.2.(Chinčinova): Nechť $X_1, X_2, ..., X_n$ je n-tice nezávislých náhodných veličin, majících stejné rozdělení pravděpodobností se střední hodnotou EX a konečnou disperzí DX. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - EX\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Důkaz: Důkaz vyplývá z platnosti Čebyševovy věty. V případě Chinčinovy věty platí:

$$EY = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n} n \cdot EX = EX \qquad \square$$

Tato věta říká, že střední hodnotu náhodné veličiny můžeme s dostatečnou přesností a pravděpodobností vypočítat jako aritmetický průměr jejích hodnot, získaných mnohonásobným opakováním náhodného pokusu, který tato náhodná veličina reprezentuje.

Důležité jsou i důsledky Čebyševovy věty, které nyní uvedeme a dokážeme. Historicky byly dokázány dříve než Čebyševova věta.

VĚTA 12.3.3. (Bernoulliho zákon velkých čísel): Nechť náhodná veličina X_n je rovna počtu úspěchů, dosažených v sérii n nezávislých opakovaných Bernoulliho pokusů. Nechť p je pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu, $0 \leq p \leq 1$. Pak pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Důkaz: Uvažujeme posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, ..., X_n$, které nabývají pouze dvou hodnot:
$X_i = 0$ jestliže nastane v i-tém pokusu neúspěch
$X_i = 1$ jestliže nastane v i-tém pokusu úspěch
Platí: $P(X_i = 0) = 1 - p = q$; $P(X_i = 1) = p$
Pro střední hodnotu a disperzi náhodných veličin X_i můžeme psát:
$EX_i = 0q + 1p = p$
$DX_i = (0 - p)^2 q + q^2 p = q\,(p^2 + p - p^2) = q\,p$
Předpoklady Chinčinovy věty jsou splněny, takže platí:

$$1 = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - EX\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| < \varepsilon\right)$$

Uvedený důsledek říká, že pravděpodobnost náhodného jevu můžeme nahradit jeho relativní četností ve velké sérii náhodných opakovaných pokusů. Posloupnost relativních četností náhodného jevu konverguje v určitém smyslu k pravděpodobnosti jevu. Nejedná se ale o obvyklou konvergenci číselné posloupnosti, ale o tzv. konvergenci podle pravděpodobnosti.

12.4. Centrální limitní věta

Centrální limitní věty tvoří druhou velice známou skupinu vět z teorie pravděpodobnosti. Jejich formulace zní zpravidla tak, že rozdělení pravděpodobností součtu n nezávislých náhodných veličin X_i se stejným rozdělením pravděpodobností (i různým od normálního) se za velmi obecných podmínek blíží s rostoucím n k normálnímu rozdělení pravděpodobností.

Dobrá shoda s normálním rozdělením pravděpodobností nastává poměrně brzy, proto je možné použít centrální limitní větu v praxi i v případě menšího počtu náhodných veličin.

VĚTA 12.4.1. : Nechť $X_1, X_2, ..., X_n$ je n-tice nezávislých náhodných veličin, které mají stejné rozdělení pravděpodobností se střední hodnotou EX a konečnou disperzí DX. Pak náhodná veličina

$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nEX}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$$

má normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobností N(0,1).

Důkaz:

Budeme uvažovat takové n-tice náhodných veličin, pro které platí: $|X_i| < K$; i = 1, 2, . . . , ; K je libovolné konečné číslo ;

Označme $Z_i = X_i - EX$. Náhodná veličina Z_i má stejné rozdělení pravděpodobností jako náhodná veličina X_i, ale střední hodnota $EZ_i = 0$.

Utvoříme novou náhodnou veličinu $Y_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sigma\sqrt{n}}$ a vypočítáme její momentovou vytvořující funkci. Pro každé konečné T existuje pak momentová vytvořující funkce náhodné veličiny Y_n, pro kterou platí:

$$m_{Y_n}(t) = E\left(e^{Y_n t}\right) = E\left(e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{\sigma\sqrt{n}}t}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\frac{Z_i t}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \left[m_Z\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n \qquad \text{kde } t \in (-T, T)$$

Symbolem Z jsme označili náhodnou veličinu, která má stejné rozdělení pravděpodobností, jako náhodná veličina Z_i , kde i = 1, 2, ... , n.

Rozvinutím funkce $e^{\frac{Z\,t}{\sigma\sqrt{n}}}$ do Mac Laurinovy řady o třech členech dostaneme:

$$m_Z\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = E\left(e^{\frac{Zt}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = E\left[1 + \frac{Zt}{\sigma\sqrt{n}} + \frac{(Zt)^2}{2\sigma^2 n} + \frac{(Zt)^3}{3!(\sigma\sqrt{n})^3} e^{\frac{W\cdot Z\cdot t}{\sigma\sqrt{n}}}\right] \qquad \text{kde } W \in (0, 1)$$

Uvědomíme-li si, že EZ = 0 a $EZ^2 = DZ$, pak na základě vztahu $\nu_k = E[X^k]$ dostaneme:

$$m_Z\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\text{kde } \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = E\left(\frac{Z^2}{3!} \cdot e^{\frac{WZt}{(\sigma\sqrt{n})^3}}\right)$$

Pro každé $t \in (-T, T)$ pak platí: $\left|\varphi\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| < \dfrac{K^3}{6} e^{\frac{KT}{\sigma\sqrt{n}}} \dfrac{t^3}{(\sigma\sqrt{n})^3}$ (12.4.1.)

Momentovou vytvořující funkci náhodné veličiny Z rozepíšeme následujícím způsobem:

$$m_Z\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n}\left(1 + \omega_n(t)\right) \text{kde} \omega_n(t) = \frac{2n \cdot E(Z)^3 t^3}{3! \cdot t^2 \left(\sigma\sqrt{n}\right)^3} \cdot e^{\frac{WZT}{\sigma\sqrt{n}}} \qquad (12.4.2.)$$

Ze vztahů (12.4.1.) a (12.4.2.) plyne, že $\omega_n(t) < \dfrac{K^3 \cdot e^{\frac{ZT}{\sigma\sqrt{n}}}}{3} \cdot \dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}$, z čehož je zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} \omega_n(t) = 0$.

Tato limita říká, že k libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové přirozené číslo N, že pro každé n> N platí:
$-\varepsilon < \omega_n(t) < \varepsilon$ resp. $1 - \varepsilon < 1 + \omega_n(t) < 1 + \varepsilon$

Potom: $$\left(1+\frac{t^2}{2n}(1-\varepsilon)\right)^n < m_{Y_n}(t) < \left(1+\frac{t^2}{2n}(1+\varepsilon)\right)^n \qquad (12.4.3.)$$

Z teorie limit víme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Limitním přechodem ve výše uvedené nerovnosti (12.4.3.) dostáváme:

$$e^{\frac{t^2}{2}(1-\varepsilon)} \le \lim_{n\to\infty} m_{Y_n}(t) \le e^{\frac{t^2}{2}(1+\varepsilon)}$$

Z uvedené nerovnosti je zřejmé, že čím větší bude n, tím menší ε můžeme uvažovat. S rostoucí hodnotou n se hodnoty $e^{\frac{t^2}{2}(1-\varepsilon)}$ a $e^{\frac{t^2}{2}(1+\varepsilon)}$ budou méně lišit od hodnoty $e^{\frac{t^2}{2}}$.

Pomocí limity můžeme psát: $\lim\limits_{n\to\infty} m_{Y_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, což je ale momentová vytvořující funkce N(0,1) rozdělení pravděpodobností. Z vlastnosti 2 momentové vytvořující funkce plyne, že náhodná veličina $Y = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ má normální rozdělení pravděpodobností N(0,1). □

Důsledky centrální limitní věty vyjadřují následující věty, které uvádíme již bez důkazu.

VĚTA 12.4.2. : Moivre-Laplaceova lokální věta
Nechť $P_1, P_2, ..., P_n$ je posloupnost nezávislých opakovaných náhodných pokusů, přičemž v každém z nich může nastat náhodný jev A s pravděpodobností p. Pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot npq}} \cdot e^{-\frac{(m-np)^2}{2\cdot npq}}$$

kde $P_n(m)$ je pravděpodobnost, že v sérii n pokusů nastane jev A právě m-krát a q = 1-p.

VĚTA 12.4.3.: Moivre-Laplaceova věta integrální

Nechť $P_1, P_2, ..., P_n$ je posloupnost n nezávislých opakovaných náhodných pokusů, přičemž v každém z nich může nastat náhodný jev A s pravděpodobností p. Pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m_1 \le m < m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

kde $P_n(m_1 \le m < m_2)$ je pravděpodobnost, že náhodný jev A nastane v sérii n pokusů m_1 až m_2 krát, q = 1 - p a Φ je distribuční funkce N(0,1)rozdělení pravděpodobností.

VĚTA 12.4.4.: Nechť náhodná veličina X_n má binomické rozdělení pravděpodobností s parametry n a p, kde $0< p <1$. Pak pro $n \to \infty$ má náhodná veličina

$$Y = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$$

asymptoticky normální rozdělení pravděpodobností N(0, 1).

VĚTA 12.4.5.: Nechť náhodná veličina X_n má Poissonovo rozdělení pravděpodobností s parametrem $n\lambda$, kde $\lambda > 0$. Pak pro $n \to \infty$ má náhodná veličina

$$Y = \frac{X_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$$

asymptoticky normální rozdělení pravděpodobností N(0, 1).

VĚTA 12.4.6.: Nechť náhodná veličina X_n má Studentovo rozdělení pravděpodobností t_n . Pak pro $n \to \infty$ má náhodná veličina

$$Y = X_n$$

asymptoticky normální rozdělení pravděpodobností N(0, 1).

VĚTA 12.4.7.: Nechť náhodná veličina X_n má χ_n^2 rozdělení pravděpodobností . Pak pro $n \to \infty$ má náhodná veličina

$$Y = \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$$

asymptoticky normální rozdělení pravděpodobností N(0, 1).

13. SLOVNÍK ANGLICKÝCH EKVIVALENTÙ

alternativní rozdělení pravděpodobností	-	zero-one distribution
aposteriorní pravděpodobnost	-	posterior probability
aproximace	-	approximation
Bayesova věta	-	Bayes´theorem
binomické rozdělení pravděpodobností	-	binomial distribution
centrální limitní věta	-	central limit theorem
centrální momenty	-	central moments
Čebyševova nerovnost	-	Chebyshev´s inequality
diskrétní náhodná veličina	-	discrete random variable
distribuční funkce	-	distribution function
doplněk	-	complement
doplňkový jev	-	complementary event
elementární jev	-	simple event
exponenciální rozložení pravděpodobností	-	exponential distribution
F-rozdělení pravděpodobností	-	F-distribution
geometrické rozdělení pravděpodobností	-	geometric distribution
hustota pravděpodobnosti	-	probability density function
hypergeometrické rozdělení pravděpodobností	-	hypergeometric distribution
chí-kvadrát rozdělení pravděpodobností	-	chi-square distribution
jev	-	event
jev jistý	-	certain event
jev nemožný	-	impossible event
klasické pravděpodobnost	-	classical probability
koeficient šikmosti	-	skewness
koeficient špičatosti	-	kurtosis
kombinace	-	combination
kombinatorické pravidlo součinu	-	fundamental counting rule
korelace	-	correlation
korelační koeficient	-	correlation coefficient
korelační matice	-	correlation matrix
kovarianční matice	-	covariance matrix
kvantil	-	quantile
kvartil	-	quartile
marginální distribuční funkce	-	marginal distribution function
marginální pravděpodobnostní funkce	-	marginal probability function
medián	-	median
mezikvartilové rozpětí	-	interquartile range
modus	-	mode
náhoda	-	coincidence
náhodná veličina	-	random variable
náhodný jev	-	random event
náhodný pokus	-	random experiment
náhodný výběr	-	random selection
navzájem disjunktní jevy	-	mutually exclusive events
nezávislé jevy	-	independent events
nezávislé opakované pokusy	-	binomial experiments
normální rozdělení pravděpodobností	-	normal probability distribution
normované normální rozdělení pravděpodobností	-	standard normal distribution
permutace	-	permutation
počáteční momenty	-	initial moments
podmíněná pravděpodobnost	-	conditional probability
podmíněné disperze	-	conditional variances
podmíněné rozdělení	-	conditional distribution
podmíněné střední hodnoty	-	conditional means

Poissonovo rozdělení pravděpodobností	-	Poisson´s distribution
pokus	-	experiment
pravděpodobnost	-	probability
pravděpodobnostní funkce	-	probability function
pravidlo o násobení	-	multiplication rule
pravidlo o sčítání	-	addition rule
regresní funkce	-	regression function
regresní koeficient	-	regression coefficient
rovnoměrné rozdělení pravděpodobností	-	uniform distribution
rozdělení pravděpodobností	-	probability distribution
rozptyl	-	variance
sdružená distribuční funkce	-	joint distribution function
sdružená funkce pravděpodobnosti	-	joint probability function
sjednocení jevů	-	compound events
skedastická funkce	-	scedastic function
směrodatná odchylka	-	standard deviation
spočetná množina	-	countable set
spojitá náhodná veličina	-	continuous random variable
střední hodnota	-	mean
Studentovo t-rozdělení pravděpodobností	-	Student t-distribution
teorie pravděpodobnosti	-	probability theory
úplná pravděpodobnost	-	total probability
vícerozměrná náhodná veličina	-	multidimensional random variable
výsledek	-	outcome
základní prostor	-	sample space
zákon velkých čísel	-	law of large numbers
závislé jevy	-	dependent events

14. LITERATURA

[1.] Anděl,J.: Matematická statistika. SNTL, Praha 1978.

[2.] Gneděnko,B.V.: Kurs teorii verojatnostej. Gos. izd. Moskva, 1961.

[3.] Hátle, J., Kahounová,J.: Úvod do teorie pravděpodobnosti. SNTL, Alfa 1987.

[4.] Hebák,P.,Kahounová,J.: Počet pravděpodobnosti v příkladech. SNTL, Praha 1978.

[5.] Hodges,J.L.,Lehman,E.L.: Basic Concepts of Probability and Statistics. Holden-Day, San Francisco 1970.

[6.] Kolda,S.: Úvod do pravděpodobnosti a matematické statistiky.

[7.] Kubanová,J.,Linda,B.: Příklady ke cvičením z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Pardubice 1997.

[8.] Kubanová,J.: Sbírka příkladů z teorie pravděpodobnosti. Pardubice,1999.

[9.] Likeš,J.,Machek,J.: Počet pravděpodobnosti. SNTL, Praha 1981.

[10.] Linda,B.: Základy teorie pravděpodobnosti. Vydav. ekonomické a technické literatury Alfa, Bratislava 1979.

[11.] Lamoš,F.,Potocký,R.: Pravdepodobnosť a matematická štatistika. Vydav. ekonomické a technické literatury Alfa, Bratislava1989

[12.] Rényi, A.: Teorie pravděpodobnosti. Praha, Academia 1972.

[13.] Svešnikov,A.,A. a kol.: Sbírka příkladů z teorie pravděpodobnosti, matematické statistiky a teorie náhodných funkcí. SNTL, Praha 1971.

[14.] Triola, M.,F.: Elementary statistics. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Redwood City, California, 1989.

[15.] Tutubalin,V.N.: Teorie pravděpodobnosti. SNTL, Praha 1978.

[16.] Wonnacot,T.H.,Wonnacot,R.J.: Introductory Statistics for Business and Economics, John Wiley, New York 1984.