KOMBINATORIKA

Paulína Jašková

MVŠO MORAVSKÁ VYSOKÁ ŠKOLA OLOMOUC

Množiny

- Množina:
  - súbor prvkov
  - obsahuje určitý počet prvkov, konečný/nekonečný
  - $M=\{1, 2, 3\}$
  - prázdna množina
  - $M= \{\}$ nebo $M=\emptyset$
  - $1 \in M$; $5 \notin M$

Kombinatorika

- Utvárame skupiny z prvkov nejakej konečnej množiny
  - napríklad máme zostaviť rozvrh hodín z daných predmetov,
  - potrebujeme rozhodnúť, ktoré tímy budú v turnaji hrať proti sebe,
  - chceme rozdať niekoľko druhov cien medzi účastníkov závodu
- Prvky sa môžu opakovať ale nemusia
- Podľa toho rozlišujeme:
  - skupiny s opakovanim (keď prvok vyberieme vrátime ho naspäť)
  - skupiny bez opakovania (nevraciame naspäť)

Faktoriál

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{pokud n} = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{jinak} \end{cases} \qquad n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

- Faktoriál čísla n je rovný súčinu všetkých prirodzených čísiel, ktoré su menšie alebo rovné číslu n
- Zápis – n!
- Ex.: 5! = 5·4·3·2·1 = 120
- 0! = 1

Kombinatorické pravidlo súčinu

- Počet všetkých usporiadaných k-tic z n prvkov, ich prvý člen ide vybrať práve n_1 spôsobmi, druhý člen po výbere prvého členu práve n_2 spôsobmi atď. až k-tý člen po výbere (k-1)-ho členu práve n_k spôsobmi, je rovný súčinu $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Kombinatorické pravidlo súčinu

- Ex. Máme dvě množiny – množinu Z, v ktorej sú 3 ženy a množinu M, obsahujúcu 4 mužov. Koľko rôznych párov muž – žena môžeme vytvoriť?

Ž1 – M1	Ž2 – M1	Ž3 – M1
Ž1 – M2	Ž2 – M2	Ž3 – M2
Ž1 – M3	Ž2 – M3	Ž3 – M3
Ž1 – M4	Ž2 – M4	Ž3 – M4

- 4 + 4 + 4 = 12 resp. 3 · 4 = 12 párov
- Vynásobili sme veľkosť oboch množín.

Kombinatorické pravidlo súčinu

- Ex. Koľko existuje rôznych dvojciferných čísiel?

- __ __
- prvá pozícia 1 – 9, druhá pozícia 0 – 9
- $9 \cdot 10 =$ **90 čísiel**

Kombinatorické pravidlo súčinu

- Ex. Koľko existuje rôznych trojciferných čísiel, kde se žiadna číslica nesmie vyskytnút dvakrát?
- __ __ __
- prvá pozícia 1 – 9
- druhá pozícia 0 – 9 bez čísla na prvej pozícií
- tretia pozícia 0 – 9 bez čísiel na prvej a druhej pozícií
- $9 \cdot 9 \cdot 8 =$ **648 čísiel**

Kombinatorické pravidlo súčinu

- Dvakrát za sebou hodíme klasickou hraciou kockou. Koľko rôznych výsledkov môžeme získať?

- __ __ - v prvom hode 6 možností, v druhom hode opäť 6 možností
- $6 \cdot 6 =$ **36 možností**

- Opäť dva hody kockou. Koľko rôznych výsledkov môžeme získať, pokiaľ nám v prvom hode padlo sudé číslo?
- __ __ - v prvom hode 3 možnosti, v druhom 6 možností
- $3 \cdot 6 =$ **18 možností**

Variácie

- variácie *k*-tej triedy z *n* prvkov
- usporiadaný výber k prvkov zo zadanej množiny
- z nejakej množiny objektov vyberáme určitý počet objektov, pričom **záleží na poradí**, v akom tieto objekty vyberiame

Variácie – príklad a odvodenie

- Sútež v jedení knedlíkov. Do finále postúpilo 7 účastníkov. Koľko existuje možností, ako týchto sedem účastníkov môže obsadiť prvé tri miesta ?
- __ __ __
- prvá pozícia – 7 možností, druhá pozícia – 6 možností, tretia pozícia – 5 možností
- $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ možností
- obecne → prvá pozícia – n možností, druhá pozícia – $(n - 1)$ možností, tretia pozícia $(n - 2)$ možností
- $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$

Variácie bez opakovania - vzorec

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variácie

- Stále máme závody v jedení knedlíkov. Ako sa zmení počet medailových umiestnení, ak na závod prišiel favorit, ktorý vždy zvíťazí?
- __ __ __
- prvé miesto favorit, druhé miesto 6 možností, tretie miesto 5 možností

$$V(2,6) = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$$

Variácie

- Ako sa zmení počet možností, ak vieme, že favorit vždy obsadí medailové umistnenie?
- __ __ __

$$3 \cdot V(2,6) = 3 \cdot \frac{6!}{(6-2)!} = 3 \cdot 30 = 90$$

Variácie s opakovaním

- Koľko existuje trojciferných čísiel, ktoré ide zapísať pomocou cifier {1, 2, 3, 4, 5}?
- __ __ __
- cifry sa môžu opakovať – prvá pozícia – 5 možností, druhá pozícia – 5 možností, tretia pozícia – 5 možností
- $V'_3(5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 =$ **125 čísiel**

Variácie s opakováním - vzorec

$$V'_k(n) = n^k$$

Variácie s opakováním

- Koľko rôznych značiek teoreticky existuje v Morseovej abecede, pokiaľ sa zostavujú bodky a čiarky do skupín po jednej až päť?
- Variácie s opakovaním, n = 2, k = 1, 2, 3, 4, 5

$V'_1(2) + V'_2(2) + V'_3(2) + V'_4(2) + V'_5(2) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 =$

$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 =$ **62 značiek**

Permutácie

- usporiadaná n-tica vybraná z n prvkov
- príklad – koľko trojciferných čísiel dokážeme zostaviť z čísel {1, 2, 3, 4, 5}?
  - trojciferné

$$V(3,5) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

$$V(5,5) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 5! = 120$$

  - päťciferné
- Vzorec

$$P(n) = n!$$

Permutácie - príklad

- Máme 6 kníh a chceme ich uložiť na poličku v nejakom poradí. Koľko celkom rôznych poradí existuje?

- $P(6) = 6! = 720$
- **720 rôznych poradí** uložení kníh

Permutácie - príklad

- K našim šiestim knihám v českom jazyku pridáme ďalšie 4 knihy písane latinou. Koľko existuje rôznych spôsobov uloženia týchto 10 kníh na poličku, pokiaľ chceme mať všetky české knihy a všetky latinské knihy pohromade?

- české knihy – 6!, latinské knihy – 4!
- 6! · 4! = 17 280 spôsobov
- latinské a potom české
- 17 280 · 2
- Celkom teda je **34 560** rôznych spôsobov.

Permutácie s opakovaním

- Koľko rôznych šesťciferných čísiel ide vytvoriť z číslic 1, 2, 2, 3, 3, 3?

$$P'(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

- Ak sa medzi *n* prvkami vyskytuje:
- prvý prvok n_1 krát
  druhý prvok n_2 krát
  …
  k-tý prvok n_k krát
- $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

$$P'(6) = \frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!}$$

Príklad

- Zistite, koľko rôznych päťciferných čísiel ide vytvoriť použitím cifier 1,2,3,4,5 (môžu sa opakovať).
- Permutácie bez opakovania?
- Permutácie s opakovaním?
- Variácie s opakovaním?
  - k=n

- $V'_5(5) = 5^5 = \mathbf{3\ 125}$

Kombinácie

- Vyberáme určitý počet objektov z nejakej množiny bez ohľadu na poradie
- Typickým príkladom – losovanie športky
- kombinačné číslo

$$C(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Kombinačné číslo – základné pravidlá

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Kombinácie - príklad

- V osudí je 49 loptičiek, losuje sa 6. Koľko rôznych možností môžeme vylosovať?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)!\cdot 6!} = \frac{49!}{43!\cdot 6!} = 13\,983\,816$$

- Existuje teda 13 983 816 možností.

- BTW pravdepodobnosť výhry je 1:13 983 816, teda cca 0,00000715 %. ☺

Kombinácie - príklad

- Na „tour de pub“ máme na výber z 13 hospod. Stihnúť ale môžeme len 4. Koľko rôznych štvoríc hospod môžeme navštíviť?

$$\binom{13}{4} = \frac{13!}{9! \cdot 4!} = 715$$

- Máme 715 možností rôznych štvoríc hospod.

Kombinácie - príklad

- Máme skupinu pedesiatich ľudí . Polovica muži a polovica ženy. Koľko existuje rôznych trojíc ľudí, pokiaľ nesmú byť zložené len z jedneho pohlavia?

$$2 \cdot \binom{25}{2} \cdot \binom{25}{1} = 15000$$

Kombinácie s opakovaním

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Príklady

- V škole je celkom 20 učiteľov. Je potřebné zostaviť komisiu pre maturtiy v tomto zložení: jeden predseda, jeden hodný prísediaci a jeden zlý prísediaci. Koľko existuje celkom možností?

$$V(3,20) = \frac{20!}{17!} = 6840$$

- Variáce

Príklady

- Koľko trojciferných čísiel môžeme poskladať z číslic {0, 1, 2, 3, 4, 5}, pokiaľ sa žiadná číslica nesmie opakovať?

$$V(3,6) = \frac{6!}{3!} = 120$$

- Musíme odčítať tie variácie, ktoré majú na prvom mieste nulu.
- 0 __ __ z čísiel 1, 2, 3, 4, 5

$$V(2,5) = \frac{5!}{3!} = 20$$

- Celkový počet je teda 120 – 20 = **100 možností**.

Opakovanie

- **Permutácia** je usporiadanie prvkov do fixného poradia.
- **Kombinácia** (*k* prvková) je výber *k* prvkov zo zadanej množiny.
- **Kombinácia s opakovaním** (*k* prvková) je výber *k* prvkov zo zadanej množiny, pričom prvky sa môžu opakovať.
- **Variácia** (*k* prvková) je usporiadaný výber *k* prvkov zo zadanej množiny.
- **Variácia s opakovaním** (*k* prvková) je usporiadany výber *k* prvkov zo zadanej množiny, pričom prvky se môžu opakovať.

Opakovanie

	počet skupin bez opakování	*počet skupin s opakováním*
Variace	$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V'_k(n) = n^k$
Permutace	$P(n) = n!$	$P'_{k_1,k_2,\dots,k_m}(n) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}$
Kombinace	$C_k(n) = \binom{n}{k}$	$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$