

Příklady k procvičení

XLM 2

Př. 1: Do systému hromadné obsluhy s odmítáním vstupují požadavky s intenzitou $\lambda = 6$ pož. / h. Střední doba obsluhy $\frac{1}{\mu} = 30$ min / pož. (z toho $\mu = 2$ pož. / h). Systém je tvořen čtyřmi obslužnými linkami, tedy $n = 4$. Stanovte pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému, tzn. stanovte pravděpodobnosti P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 . Dále určete střední počet zákazníků v systému.



Př. 1: Máme systém hromadné obsluhy s omezenou délkou fronty se třemi obslužnými linkami. Počet míst ve frontě je roven 3. Střední počet zákazníků vstupujících do systému je $\lambda = 10$ zák. / h. Střední doba obsluhy jednoho zákazníka je $\frac{1}{\mu} = 0,25$ h / zák. (z toho $\mu = 4$ zák. / h). Stanovte pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému a dále základní charakteristiky provozu ES, EL a EK .



Př. 1: Máme systém hromadné obsluhy s nekonečnou frontou se čtyřmi obslužnými linkami. Střední počet zákazníků vstupujících do systému je $\lambda = 6$ zák. / h. Střední doba obsluhy jednoho zákazníka je $\frac{1}{\mu} = 0,5$ h / zák. (z toho $\mu = 2$ zák. / h). Stanovte pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému a dále základní charakteristiky provozu ES, EL a EK .



$$\lambda = 6; \mu = 2, n = 4$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^4 \frac{1}{k!} \left(\frac{6}{2}\right)^k} = \frac{1}{1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24}} = \frac{1}{16,575}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{9}{2} \quad \frac{1}{6} = \frac{27}{6} \quad \frac{1}{24} = \frac{81}{24}$$

$$2 \cdot 3 = 9 \cdot 3 = 27$$

$$\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{24} \quad \frac{81}{24}$$

$$P_0 = 0,061$$

$$P_1 = \frac{6}{1 \cdot 2} \cdot 0,061 = 0,183$$

$$P_2 = \frac{6}{2 \cdot 2} \cdot 0,183 = 0,2745$$

$$P_3 = \frac{6}{3 \cdot 2} \cdot 0,2745 = 0,2745$$

$$P_4 = \frac{6}{4 \cdot 2} \cdot 0,2745 = 0,2054$$

$$EK = \frac{6}{2} \cdot (1 - 0,2054) = 2,3838$$

Systémy hromadné obsluhy M/M/n bez fronty

$P_k = \frac{\lambda}{k \cdot \mu} \cdot P_{k-1}$ Rekurentní vzorec pro $k = 1, \dots, n$

$P_k = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0$ Vyjádření P_k pomocí P_0

$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$ Vztah pro výpočet P_0

$EK = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_n)$ Střední počet zákazníků v systému

$$2 \cdot \lambda = 3$$

$$\lambda = 10$$

$$m = 6$$

$$\mu = 4$$

$$m - \lambda = 3$$

$$\rho = \frac{10}{3 \cdot 4} = 0,833$$

$$\rho = \frac{\lambda}{n \cdot \mu}$$

Intenzita provozu

Vzorce pro výpočet P_0 :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^{m-n}}{1 - \rho}}, \text{ platí pro } \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (m - n)}, \text{ platí pro } \rho = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 2,175 + 3,125 + 2,604 + 2,604 \cdot 0,833 \cdot \frac{1 - 0,578}{1 - 0,833}} = \frac{1}{14,7729} = 0,067$$

$$P_k = \frac{\lambda}{k \cdot \mu} \cdot P_{k-1}$$

Rekurentní vzorec pro $k = 1, \dots, n$

$$P_k = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} \cdot P_{k-1}$$

Rekurentní vzorec pro $k = n + 1, \dots, m$

$$P_1 = 0,229$$

$$P_5 = 0,145$$

$$2,5287$$

$$ES = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_m)$$

$$EL = \sum_{l=1}^{m-n} l \cdot P_{n+l}$$

$$EK = ES + EL$$

$$P_1 = \frac{10}{1 \cdot 4} \cdot 0,067 = 0,1675$$

$$P_4 = \frac{10}{4 \cdot 4} \cdot 0,1444 = 0,145$$

$$ES = \frac{10}{4} \cdot (1 - 0,100) = 2,25$$

$$P_2 = \frac{10}{8} \cdot 0,1675 = 0,209$$

$$P_5 = \frac{10}{5 \cdot 4} \cdot 0,145 = 0,121$$

$$EL = 1 \cdot P_4 + 2 \cdot P_5 + 3 \cdot P_6 = 0,145 + 2 \cdot 0,121 + 3 \cdot 0,100 = 0,687$$

$$P_3 = \frac{10}{12} \cdot 0,209 = 0,1744$$

$$P_6 = \frac{10}{6 \cdot 4} \cdot 0,121 = 0,100$$

$$EK = 2,25 + 0,687 = 3,187$$

$$\begin{aligned} 3. \lambda &= 6 \\ \mu &= 2 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{n \cdot \mu}$$

$$\rho = \frac{6}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} = 0,75$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{\rho}{1-\rho}} \quad \text{Vzorec pro výpočet } P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1}{0!} \left(\frac{6}{2}\right)^0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{6}{2}\right)^1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{6}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{6}{2}\right)^4 \cdot \frac{0,75}{1-0,75}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + 10,125} = \frac{1}{26,5} = 0,037$$

$$P_k = \frac{\lambda}{k \cdot \mu} \cdot P_{k-1} \quad \text{Rekurentní vzorec pro } k=1, \dots, n$$

$$P_k = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} \cdot P_{k-1} \quad \text{Rekurentní vzorec pro } k=n+1, \dots$$

$$P_1 = \frac{6}{2} \cdot 0,037 = 0,111$$

$$P_2 = \frac{6}{4} \cdot 0,111 = 0,055$$

$$P_3 = \frac{6}{6} \cdot 0,055 = 0,055$$

$$P_4 = \frac{6}{8} \cdot 0,055 = 0,041$$

$$ES = \frac{\lambda}{\mu} = \underline{\underline{3}}$$

$$EL = \frac{0,75}{(1-0,75)^2} \cdot 0,041 = \underline{\underline{0,492}}$$

$$E_L = 3 + 0,492 = \underline{\underline{3,492}}$$

$$ES = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$EL = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_n$$

$$EK = ES + EL$$