Cvičení č. 11: Systémy hromadné obsluhy *M/M/n* s nekonečnou frontou

Základní vzorce:

- $P_k = \dfrac{\lambda}{k \cdot \mu} \cdot P_{k-1}$ Rekurentní vzorec pro $k = 1,...,n$,
- $P_k = \dfrac{\lambda}{n \cdot \mu} \cdot P_{k-1}$ Rekurentní vzorec pro $k = n+1,....$,
- $P_k = \dfrac{1}{k!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0$ Vyjádření P_k pomocí P_0 pro $k = 1,...,n$,
- $P_k = \dfrac{1}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0$ Vyjádření P_k pomocí P_0 pro $k = n+1,....$,
- $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k + \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \dfrac{\rho}{1-\rho}}$ Vzorec pro výpočet P_0,
- $ES = \dfrac{\lambda}{\mu}$ Střední počet zákazníků v obsluze,
- $\rho = \dfrac{\lambda}{n \cdot \mu}$ Intenzita provozu; aby byl systém stabilní, musí platit, že $\rho < 1$,
- $EL = \dfrac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_n$ Střední počet zákazníků ve frontě,
- $EK = ES + EL$ Střední počet zákazníků v systému.

Př. 1: Máme systém hromadné obsluhy s nekonečnou frontou se čtyřmi obslužnými linkami. Střední počet zákazníků vstupujících do systému je $\lambda = 6$ zák. / h. Střední doba obsluhy jednoho zákazníka je $\dfrac{1}{\mu} = 0{,}5$ h / zák. (z toho μ = 2 zák. / h). Stanovte pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému a dále základní charakteristiky provozu *ES, EL* a *EK*.

Nejprve je nutno ověřit, zda platí podmínka $\rho < 1$. Dosadíme do vzorce:

- $\rho = \dfrac{\lambda}{n \cdot \mu} = \dfrac{6}{4 \cdot 2} = 0{,}75 < 1$ - podmínka je splněna.

Příklad dále řešíme tabulkovou formou:

<table>
<tr><th>k</th><th>q_k</th><th>P_k</th><th>$k \cdot P_k$</th><th>s</th><th>P_s</th><th>$s \cdot P_s$</th><th>l</th><th>P_l</th><th>$l \cdot P_l$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>**0,038**</td><td>0</td><td>0</td><td>0,038</td><td>0</td><td rowspan="5">0</td><td rowspan="5">$\sum_{k=0}^{4} P_k =$
$= 0{,}618$</td><td rowspan="5">0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>**0,113**</td><td>0,113</td><td>1</td><td>0,113</td><td>0,113</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4,5</td><td>**0,170**</td><td>0,340</td><td>2</td><td>0,170</td><td>0,340</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4,5</td><td>**0,170**</td><td>0,510</td><td>3</td><td>0,170</td><td>0,510</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3,375</td><td>**0,127**</td><td>0,508</td><td rowspan="7">4</td><td rowspan="7">$1 - \sum_{k=0}^{3} P_k =$
$= 0{,}509$</td><td rowspan="7">2,036</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2,531</td><td>**0,096**</td><td>0,480</td><td>1</td><td>0,096</td><td>0,096</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1,898</td><td>**0,072**</td><td>0,432</td><td>2</td><td>0,072</td><td>0,144</td></tr>
<tr><td>7</td><td rowspan="4">5,696</td><td rowspan="4">**0,214**</td><td rowspan="4">2,143</td><td>3</td><td rowspan="4">$1 - \sum_{k=0}^{6} P_k =$
$= 0{,}214$</td><td rowspan="4">1,284</td></tr>
<tr><td>:</td><td>:</td></tr>
<tr><td>:</td><td>:</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\sum$</td><td>26,5</td><td>1</td><td>***EK* = 4,526**</td><td></td><td>1</td><td>***ES* = 3**</td><td></td><td>1</td><td>***EL* = 1,524**</td></tr>
</table>

Zavedeme $q_k = \dfrac{P_k}{P_0}$. Potom:

- $q_0 = \dfrac{P_0}{P_0} = 1$,
- $q_1 = \dfrac{P_1}{P_0} = \dfrac{1}{k!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k = \dfrac{1}{1!} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^1 = 3$,
- $q_2 = \dfrac{P_2}{P_0} = \dfrac{1}{2!} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^2 = 4{,}5$,
- $q_3 = \dfrac{P_3}{P_0} = \dfrac{1}{3!} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^3 = 4{,}5$,
- $q_4 = \dfrac{P_4}{P_0} = \dfrac{1}{4!} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^4 = 3{,}375$,
- $q_5 = \dfrac{P_5}{P_0} = \dfrac{1}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k = \dfrac{1}{4! \cdot 4^{5-4}} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^5 = 2{,}531$,
- $q_6 = \dfrac{P_6}{P_0} = \dfrac{1}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k = \dfrac{1}{4! \cdot 4^{6-4}} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^6 = 1{,}898$.

$\sum_{k=7}^{\infty} q_k$ získáme úvahou:

- $\sum_{k=n}^{\infty} P_k = \sum_{k=n}^{\infty} \rho^{k-n} \cdot P_n = P_n + \rho \cdot P_n + \rho^2 \cdot P_n + \ldots$ - tento výraz tvoří nekonečnou geometrickou řadu s $a_1 = P_n$ a $q = \rho$. Tuto nekonečnou řadu potom tvoří i $\sum_{k=n}^{\infty} q_k = q_n + \rho \cdot q_n + \rho^2 \cdot q_n + \ldots$ s $a_1 = q_n$ a $q = \rho$. Součet této řady $\sum_{k=4}^{\infty} q_k = s = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{q_n}{1-\rho} = \dfrac{3{,}375}{1-0{,}75} = 13{,}5$.
- Potom $\sum_{k=7}^{\infty} q_k = \sum_{k=4}^{\infty} q_k - (q_4 + q_5 + q_6) = 13{,}5 - 7{,}804 = 5{,}696$.

Pravděpodobnost P_0 získáme ze vzorce:

- $\sum_{k=0}^{\infty} q_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k}{P_0} = \frac{1}{P_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} P_k$. Z toho potom $P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} q_k} = \frac{1}{26,5} = 0,038$.

Další pravděpodobnosti potom získáme vztahem $P_k = q_k \cdot P_0$. Součet pravděpodobností $\sum_{k=7}^{\infty} P_k$ získáme z normativní podmínky pravděpodobnosti $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$. Potom tedy platí:

- $\sum_{k=7}^{\infty} P_k = 1 - \sum_{k=0}^{6} P_k = 1 - 0,786 = 0,214$.

$\sum_{k=7}^{\infty} k \cdot P_k$ získáme následujícím postupem:

- $$\sum_{k=7}^{\infty} k \cdot P_k = \sum_{k=7}^{\infty} k \cdot \rho^{k-n} \cdot P_n = \sum_{k=7}^{\infty} k \cdot \rho^{k-4} \cdot P_4 = 7 \cdot \rho^3 \cdot P_4 + 8 \cdot \rho^4 \cdot P_4 +$$
$$+ \ \dots = P_4 \cdot \rho^{-3} \cdot \left(7 \cdot \rho^6 + 8 \cdot \rho^7 + \dots\right) = P_4 \cdot \rho^{-3} \cdot \left(\rho^7 + \rho^8 + \dots\right)' =$$
$$= P_4 \cdot \rho^{-3} \cdot \left(\frac{\rho^7}{1-\rho}\right)' = P_4 \cdot \rho^{-3} \cdot \frac{7 \cdot \rho^6 \cdot (1-\rho) - \rho^7 \cdot (-1)}{(1-\rho)^2} =$$
$$= P_4 \cdot \rho^{-3} \cdot \frac{7 \cdot \rho^6 - 7 \cdot \rho^7 + \rho^7}{(1-\rho)^2} = P_4 \cdot \rho^{-3} \cdot \frac{7 \cdot \rho^6 - 6 \cdot \rho^7}{(1-\rho)^2} =$$
$$= 0,127 \cdot 0,75^{-3} \cdot \frac{7 \cdot 0,75^6 - 6 \cdot 0,75^7}{(1-0,75)^2} = 2,143.$$

Střední počet zákazníků ve frontě určíme podle vzorce $EL = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_n$ nebo ze vzorce $EK = ES + EL$. Po dosazení do prvního vzorce dostaneme:

- $EL = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_n = \frac{0,75}{(1-0,75)^2} \cdot 0,127 = 1,524$.

Př. 2: Máme systém hromadné obsluhy s třemi obslužnými linkami. Střední počet zákazníků vstupujících do systému za jednotku času je λ = 12 zák. / h. Střední doba obsluhy jednoho zákazníka je $\frac{1}{\mu}$ = 10 min / zák. (tedy μ = 6 zák. / h). Stanovte:

1) pravděpodobnost, že přicházející zákazník nebude muset na obsluhu čekat,
2) střední počet zákazníků nacházejících se v systému.

Nejprve testujeme podmínku $\rho < 1$:

- $\rho = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} = \frac{12}{3 \cdot 6} = \frac{2}{3} < 1$ - systém je stabilní.

ad 1) Aby přicházející zákazník nečekal na obsluhu, musí být systém ve stavu 0, 1 nebo 2. Počítáme tedy pravděpodobnost $P = P_0 + P_1 + P_2$.

- $P_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k + \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \dfrac{\rho}{1-\rho}} =$

  $= \dfrac{1}{\dfrac{1}{0!} \cdot \left(\dfrac{12}{6}\right)^0 + \dfrac{1}{1!} \cdot \left(\dfrac{12}{6}\right)^1 + \dfrac{1}{2!} \cdot \left(\dfrac{12}{6}\right)^2 + \dfrac{1}{3!} \cdot \left(\dfrac{12}{6}\right)^3 + \dfrac{1}{3!} \cdot \left(\dfrac{12}{6}\right)^3 \cdot \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{9},$

- $P_1 = \dfrac{\lambda}{k \cdot \mu} \cdot P_0 = \dfrac{12}{1 \cdot 6} \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9},$
- $P_2 = \dfrac{\lambda}{k \cdot \mu} \cdot P_1 = \dfrac{12}{2 \cdot 6} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{9}.$

Potom $P = P_0 + P_1 + P_2 = \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{5}{9}.$

ad 2) Střední počet zákazníků před přepážkami (tedy v systému) určíme podle vzorce $EK = ES + EL$:

- $ES = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{12}{6} = 2,$
- $EL = \dfrac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_n = \dfrac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 \quad = \quad \dfrac{\frac{2}{3}}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} \cdot \dfrac{1}{3!} \cdot \left(\dfrac{12}{6}\right)^3 \cdot$

  $\cdot \dfrac{1}{9} = 0{,}89,$
- $EK = ES + EL = 2 + 0{,}89 = 2{,}89.$