Systémy hromadné obsluhy M/M/n bez fronty

Základní vzorce:

- $P_k = \dfrac{\lambda}{k \cdot \mu} \cdot P_{k-1}$ Rekurentní vzorec pro $k = 1,...,n$,
- $P_k = \dfrac{1}{k!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0$ Vyjádření P_k pomocí P_0,
- $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}$ Vztah pro výpočet P_0,
- $EK = \dfrac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_n)$ Střední počet zákazníků v systému.

Př. 1: Do systému hromadné obsluhy s odmítáním vstupují požadavky s intenzitou λ = 6 pož. / h. Střední doba obsluhy $\dfrac{1}{\mu}$ = 30 min / pož. (z toho $\mu = 2$ pož. / h). Systém je tvořen čtyřmi obslužnými linkami, tedy n = 4. Stanovte pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému, tzn. stanovte pravděpodobnosti P_0, P_1, P_2, P_3, P_4. Dále určete střední počet zákazníků v systému.

Takovýto příklad řešíme tabulkovou metodou:

k	q_k	P_k	$k \cdot P_k$
0	1	**0,061**	0
1	3	**0,183**	0,183
2	4,5	**0,2745**	0,549
3	4,5	**0,2745**	0,8235
4	3,375	**0,206**	0,824
$\sum$	16,375	1	**2,380**

Pro usnadnění výpočtu zavádíme $q_k = \dfrac{P_k}{P_0} = \dfrac{\dfrac{1}{k!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0}{P_0} = \dfrac{1}{k!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k$. Potom:

- $q_0 = \dfrac{P_0}{P_0} = 1$,
- $q_1 = \dfrac{P_1}{P_0} = \dfrac{1}{1!} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^1 = 3$,
- $q_2 = \dfrac{P_2}{P_0} = \dfrac{1}{2!} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^2 = 4{,}5$,
- $q_3 = \dfrac{P_3}{P_0} = \dfrac{1}{3!} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^3 = 4{,}5$,
- $q_4 = \dfrac{P_4}{P_0} = \dfrac{1}{4!} \cdot \left(\dfrac{6}{2}\right)^4 = 3{,}375$.

Nyní můžeme určit pravděpodobnost P_0 pomocí vztahu:

- $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{4} q_k} = \dfrac{1}{16{,}375} = 0{,}061$.

Další pravděpodobnosti stavu systému získáme pomocí vztahu $q_k = \dfrac{P_k}{P_0}$. Z tohoto vztahu vyplývá, že $P_k = q_k \cdot P_0$. Můžeme tedy vypočítat:

- $P_1 = q_1 \cdot P_0 = 3 \cdot 0{,}061 = 0{,}183$,
- $P_2 = q_2 \cdot P_0 = 4{,}5 \cdot 0{,}061 = 0{,}2745$,
- $P_3 = q_3 \cdot P_0 = 4{,}5 \cdot 0{,}061 = 0{,}2745$,
- $P_4 = q_4 \cdot P_0 = 3{,}375 \cdot 0{,}061 = 0{,}206$.

Střední počet zákazníků v systému můžeme určit dvěmi způsoby:

- pomocí vzorce $EK = \dfrac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_n) = \dfrac{6}{2}(1 - 0{,}206) = 2{,}382$,
- pomocí vzorce pro střední hodnotu $\sum_{k=0}^{n} k \cdot P_k = 2{,}380$.

Př. 2: Je dán systém hromadné obsluhy netvořící frontu se 3 linkami. Střední doba mezi příchody zákazníků je 12 minut, systém je schopen obsloužit 12 zákazníků za hodinu. Určete, zda je splněn požadavek provozovatele, že systém nemá odmítnout více než 10 % zákazníků.

- $n = 3$
- $\dfrac{1}{\lambda} = 12\,\text{min} = 0{,}2h \Rightarrow \lambda = 5 z\acute{a}k / h$
- $n\mu = 12 z\acute{a}k / h \Rightarrow \mu = 4 z\acute{a}k / h$

Musíme spočítat pravděpodobnost odmítnutí a pak ji porovnat s požadavkem provozovatele. Vztah pro výpočet známe:

$$P_{ODM} = P_n = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 .$$

Abychom mohli dosadit, potřebujeme spočítat pravděpodobnost toho, že bude systém prázdný a to podle vzorce:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}\left(\frac{5}{4}\right)^k} = \frac{1}{\frac{1}{0!}\left(\frac{5}{4}\right)^0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{5}{4}\right)^1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{5}{4}\right)^3} \doteq 0{,}298 .$$

Dosazením potom získáme:

$$P_{ODM} = P_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot 0{,}298 \doteq 0{,}097 .$$

Vidíme, že vypočtená pravděpodobnost je menší než 0,1, je tedy splněn požadavek provozovatele.

Př. 3: Je dán jednolinkový systém hromadné obsluhy, střední délka mezery mezi příchody zákazníků k systému je rovna 6 minut, linka je průměrně schopna obsloužit 5 zákazníků za hodinu. Jaké je procento nevyužití systému?

- $n = 1$
- $\dfrac{1}{\lambda} = 6\,\text{min} = 0{,}1h \Rightarrow \lambda = 10 zák / h$
- $\mu = 5 zák / h$

Systém nebude využit, pokud nebude obsluhovat žádného zákazníka. Systém neobsluhuje zákazníka, pokud je prázdný, úkolem je tedy stanovit pravděpodobnost stavu 0. Tuto pravděpodobnost určíme podle známého vztahu:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!}\left(\frac{10}{5}\right)^k} = \frac{1}{\frac{1}{0!}\left(\frac{10}{5}\right)^0 + \frac{1}{1!}\left(\frac{10}{5}\right)^1} \doteq 0{,}333.$$

Př. 4: V projektovaném systému je třeba určit požadovaný počet obslužných linek za předpokladů: střední počet zákazníků za den λ = 72 zákazníků / den, střední doba obsluhy jednoho zákazníka $\dfrac{1}{\mu}$ = 1,5 h / zákazník, předepsaný počet odmítnutí jsou 3 zákazníci / den.

- λ = 72 zák. / den = $\dfrac{72}{24}$ zák. / h = 3 zák. / h
- $\dfrac{1}{\mu}$ = 1,5 h / zák. → $\mu = \dfrac{2}{3}$ zák. / h
- $P_{odmítnutí} = P_n = \dfrac{3}{72} = 0{,}0417$
- Zatížení systému $\beta = \dfrac{\lambda}{\mu} = 4{,}5$
- Z tabulky vyčteme pro stanovené β a pro pravděpodobnost odmítnutí, že navrhovaný systém musí mít 9 linek, tedy $\boldsymbol{n = 9}$.

Př. 5: V systému je 5 obslužných linek, střední počet vstupujících požadavků λ = 48 zákazníků / den. Určete maximální střední dobu obsazení linky jedním požadavkem tak, aby $P_{odmítnutí}$ nebyla vyšší než 0,05.

- λ = 48 zák. / den = $\dfrac{48}{24}$ zák. / h = 2 zák. / h
- z tabulky zjistíme, že pro P_n = 0,05 a n = 5 je hodnota $\beta = \dfrac{\lambda}{\mu} = 2{,}223$

- $\mu = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{2}{2{,}223} = 0{,}9$ zák. / h $\rightarrow$ $\frac{1}{\mu}$ **= 1,1115 h / zák.**

PRÍLOHA 5: Pravdepodobnosti odmietnutia pre dané β a n

β \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,20	0,0164	0,0011	0,0001						
0,40	0,0541	0,0072	0,0007	0,0000					
0,60	0,1011	0,0198	0,0030	0,0004	0,0000				
0,80	0,1505	0,0387	0,0077	0,0012	0,0002	0,0000			
1,00	0,2000	0,0625	0,0154	0,0031	0,0005	0,0001			
1,20		0,0898	0,0262	0,0063	0,0012	0,0002	0,0000		
1,40		0,1192	0,0400	0,0111	0,0026	0,0005	0,0001		
1,60		0,1496	0,0565	0,0177	0,0047	0,0011	0,0002		
1,80		0,1803	0,0750	0,0263	0,0078	0,0020	0,0005	0,0000	
2,00		0,2105	0,0952	0,0367	0,0121	0,0034	0,0009	0,0001	
2,20			0,1156	0,0488	0,0176	0,0055	0,0015	0,0005	0,0000
2,40			0,1387	0,0624	0,0244	0,0083	0,0025	0,0005	0,0001
2,60			0,1612	0,0773	0,0324	0,0119	0,0039	0,0009	0,0002
2,80			0,1837	0,0933	0,0417	0,0164	0,0057	0,0015	0,0004
3,00			0,2061	0,1101	0,0522	0,0219	0,0081	0,0027	0,0008
3,20				0,1274	0,0636	0,0283	0,0112	0,0040	0,0013
3,40				0,1452	0,0760	0,0356	0,0149	0,0056	0,0019
3,60				0,1631	0,0891	0,0438	0,0193	0,0077	0,0028
3,80				0,1811	0,1029	0,0529	0,0245	0,0102	0,0039
4,00				0,1991	0,1172	0,0627	0,0304	0,0122	0,0053
4,50				0,2218	0,1542	0,0902	0,0483	0,0236	0,0105
5,00					0,1918	0,1205	0,0700	0,0375	0,0184
5,50					0,2282	0,1525	0,0949	0,0548	0,0293
6,00						0,1851	0,1219	0,0751	0,0431
6,50						0,2168	0,1501	0,0978	0,0598
7,00							0,1788	0,1221	0,0787

PRÍLOHA 6: Kritické hodnoty β pre $p_n = 0{,}05$ a $p_n = 0{,}01$

n \ p_n	0,05	0,01
1	0,053	0,010
2	0,381	0,153
3	0,899	0,455
4	1,525	0,870
5	2,223	1,361
6	2,960	1,909
7	3,738	2,501
8	4,543	3,127
9	5,370	3,783
10	6,216	4,461

β - [illegible], $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$