Cvičení č. 12: Systémy hromadné obsluhy *M/M/n* s omezenou délkou fronty

Základní vzorce:

- $P_k = \frac{\lambda}{k \cdot \mu} \cdot P_{k-1}$ Rekurentní vzorec pro $k = 1,...,n$,
- $P_k = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} \cdot P_{k-1}$ Rekurentní vzorec pro $k = n+1,....,m$,
- $P_k = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0$ Vyjádření P_k pomocí P_0 pro $k = 1,...,n$,
- $P_k = \frac{1}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot P_0$ Vyjádření P_k pomocí P_0 pro $k = n+1,....,m$,
- $P_{odm} = P_m = \frac{1}{n! \cdot n^{m-n}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m P_0$ Pravděpodobnost odmítnutí,
- $\rho = \frac{\lambda}{n \cdot \mu}$ Intenzita provozu,
- Vzorce pro výpočet P_0:

  $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho}}$, platí pro $\rho \neq 1$,

  $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (m-n)}$, platí pro $\rho = 1$,

- $ES = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_m)$ Střední počet zákazníků v obsluze,
- $EL = \sum_{l=1}^{m-n} l \cdot P_{n+l}$ Střední počet zákazníků ve frontě,
- $EK = ES + EL$ Střední počet zákazníků v systému.

Př. 1: Máme systém hromadné obsluhy s omezenou délkou fronty se třemi obslužnými linkami. Počet míst ve frontě je roven 3. Střední počet zákazníků vstupujících do systému je $\lambda = 10$ zák. / h. Střední doba obsluhy jednoho zákazníka je $\frac{1}{\mu} = 0{,}25$ h / zák. (z toho μ = 4 zák. / h). Stanovte pravděpodobnosti jednotlivých stavů systému a dále základní charakteristiky provozu *ES, EL* a *EK*.

Jelikož je fronta omezena počtem míst, není třeba ověřovat stabilitu systému (fronta tedy nemůže růst do nekonečna)

Příklad dále řešíme tabulkovou formou:

<table>
<tr><th>k</th><th>q_k</th><th>P_k</th><th>$k \cdot P_k$</th><th>s</th><th>P_s</th><th>$s \cdot P_s$</th><th>l</th><th>P_l</th><th>$l \cdot P_l$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0,068</td><td>0</td><td>0</td><td>0,068</td><td>0</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="4">$\sum_{k=0}^{3} P_k =$ 0,627</td><td rowspan="4">0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2,5</td><td>0,170</td><td>0,170</td><td>1</td><td>0,170</td><td>0,170</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3,125</td><td>0,213</td><td>0,426</td><td>2</td><td>0,213</td><td>0,426</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2,604</td><td>0,177</td><td>0,531</td><td rowspan="4">3</td><td rowspan="4">$\sum_{k=3}^{6} P_k =$ 0,549</td><td rowspan="4">1,647</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2,170</td><td>0,148</td><td>0,592</td><td>1</td><td>0,148</td><td>0,148</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1,808</td><td>0,123</td><td>0,615</td><td>2</td><td>0,123</td><td>0,246</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1,507</td><td>0,102</td><td>0,612</td><td>3</td><td>0,102</td><td>0,306</td></tr>
<tr><td>$\sum$</td><td>14,714</td><td>1,0</td><td>$EK =$ 2,946</td><td></td><td>1,0</td><td>$ES =$ 2,243</td><td></td><td>1,0</td><td>$EL =$ 0,70</td></tr>
</table>

Pro výpočet pravděpodobností jednotlivých stavů opět zavedeme pomocnou proměnnou $q_k = \frac{P_k}{P_0}$. Potom tedy:

$$q_0 = \frac{P_0}{P_0} = 1,$$

$$q_1 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^1 = 2{,}5,$$

$$q_2 = \frac{P_2}{P_0} = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^2 = 3{,}125,$$

$$q_3 = \frac{P_3}{P_0} = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^3 = 2{,}604,$$

$$q_4 = \frac{P_4}{P_0} = \frac{1}{3! \cdot 3^{4-3}} \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^4 = 2{,}170,$$

$$q_5 = \frac{P_5}{P_0} = \frac{1}{3! \cdot 3^{5-3}} \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^5 = 1{,}808,$$

$$q_6 = \frac{P_6}{P_0} = \frac{1}{3! \cdot 3^{6-3}} \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^6 = 1{,}507,$$

$$\sum_{k=0}^{6} q_k = 14{,}714.$$

Nyní můžeme přistoupit k výpočtu P_0:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{6} q_k} = \frac{1}{14{,}714} = 0{,}068.$$

Správnost výpočtu P_0 lze ověřit dosazením do vzorce pro výpočet P_0:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho}} = \frac{1}{1 + 2{,}5 + 3{,}125 + 2{,}604 + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{10}{4}\right)^3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^3}{1-\frac{5}{6}}} = 0{,}068$$

,

kde $\rho = \frac{\lambda}{n \cdot \mu} = \frac{10}{3 \cdot 4} = \frac{5}{6}$.

Nyní lze přistoupit k výpočtu dalších pravděpodobností jednotlivých stavů systému:

$P_1 = q_1 \cdot P_0 = 2{,}5 \cdot 0{,}068 = 0{,}170$,

$P_2 = q_2 \cdot P_0 = 3{,}125 \cdot 0{,}068 = 0{,}213$,

$P_3 = q_3 \cdot P_0 = 2{,}604 \cdot 0{,}068 = 0{,}177$,

$P_4 = q_4 \cdot P_0 = 2{,}170 \cdot 0{,}068 = 0{,}148$,

$P_5 = q_5 \cdot P_0 = 1{,}808 \cdot 0{,}068 = 0{,}123$,

$P_6 = q_6 \cdot P_0 = 1{,}507 \cdot 0{,}068 = 0{,}102$.

Pravděpodobnost odmítnutí $P_{odm} = P_m = P_6 = 0{,}102$.

Střední počet zákazníků v systému EK získáme jako $EK = \sum_{k=0}^{6} k \cdot P_k = 2{,}649$ (viz tabulka – čtvrtý sloupec).

Střední počet zákazníků v obsluze získáme buď z tabulky nebo dosazením do známého vzorce:

$$ES = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_m) = \frac{10}{4} \cdot (1 - 0{,}102) = 2{,}243.$$

Střední počet zákazníků ve frontě EL získáme z tabulky nebo ze vzorce:

$EK = ES + EL \rightarrow EL = EK - ES = 2{,}946 - 2{,}243 = 0{,}703$.