

3. část: Teorie hromadné obsluhy

Základy teorie pravděpodobnosti

- **Náhodný pokus** je děj, jehož výsledek není ani při dodržení všech předepsaných podmínek předem znám.
- **Náhodný jev** je výsledkem náhodného pokusu, náhodné jevy označujeme X, Y, \dots
- **Elementární jev E** – jev, který nejde dále rozložit.
- **Základní prostor Ω** – množina všech elementárních jevů.

Základy teorie pravděpodobnosti

- **Jistý jev 1** – jev, který vždy nastane (jev, který nastane s pravděpodobností 1).
- **Nemožný jev 0** – jev, který nikdy nenastane.
- **Opačný jev** – opačný jev k jevu A je jev \bar{A} , který nastane právě tehdy, když nenastane jev A .
- **Disjunktní jevy** – jevy A a B jsou disjunktní, nemohou-li nastat současně.

Základy teorie pravděpodobnosti

- Axiomatické zavedení pravděpodobnosti:

1. Pravděpodobnost jevu je nezáporná veličina.

$$P(A) \geq 0$$

2. Pravděpodobnost sjednocení konečně nebo spočetně mnoho disjunktních jevů je rovna součtu pravděpodobností těchto jevů.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

3. Pravděpodobnost jevu jistého je rovna 1.

$$P(I) = 1$$

Základy teorie pravděpodobnosti

- Na základě uvedených axiomů plyne, že pravděpodobnost jevu opačného k jevu A je rovna doplňku do 1.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Náhodná proměnná a její popis

- **Náhodná proměnná** je reálná funkce definovaná na množině všech elementárních jevů, která každému jevu přiřadí reálné číslo.
- Rozlišujeme náhodnou proměnnou:
 - **Diskrétní** (obor hodnot náhodné proměnné je konečná nebo nekonečná posloupnost).
 - **Spojitou** (obor hodnot náhodné proměnné je určitý konečný nebo nekonečný interval).

Náhodná proměnná a její popis

- Diskrétní náhodnou proměnnou můžeme popsat funkčními závislostmi:

- Pravděpodobnostní funkce $p(x) = P(X = x)$.

- Distribuční funkce $F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$.

- Spojitou náhodnou proměnnou můžeme popsat pomocí:

- Hustoty pravděpodobnosti $f(x)$.

- Distribuční funkce $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Náhodná proměnná a její popis

- Pro distribuční funkci DNP i SNP platí:
 - $0 \leq F(x) \leq 1$.
 - $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
- Pro pravděpodobnostní funkci DNP platí:
 - $0 \leq p(x_i) \leq 1$.
 - $\sum_{x_i} p(x_i) = 1$.

Náhodná proměnná a její popis

- Pro hustotu pravděpodobnosti SNP platí:

- $f(x) \geq 0$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Náhodná proměnná a její popis

- Náhodnou proměnnou můžeme dále popsat pomocí číselných charakteristik. Číselné charakteristiky NP dělíme:
 - Podle způsobu výpočtu na momentové, kvantilové a ostatní.
 - Podle toho, které vlastnosti rozdělení pravděpodobnosti charakterizují na charakteristiky polohy, variability, šikmosti a špičatosti.

Náhodná proměnná a její popis

- Střední hodnota (počáteční moment 1. řádu):
 - Pro DNP $EX = \mu_1 = \sum_{x_i} x_i p(x_i)$.
 - Pro SNP $EX = \mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.
- Pro střední hodnotu platí:
 - $E(c) = c$.
 - $E(cX) = cEX$.
 - $E(X \pm Y) = EX \pm EY$.

Náhodná proměnná a její popis

- Rozptyl (centrální moment 2. řádu):

- Pro DNP $DX = \sigma^2 = v_2 = \sum_{x_i} (x_i - EX)^2 p(x_i)$.

- Pro SNP $DX = \sigma^2 = v_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx$

- Při výpočtech rozptylu se spíš užívá vztahu:

$$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2,$$

kde pro DNP $EX^2 = \sum_{x_i} x_i^2 p(x_i)$, pro SNP $EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$.

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti – $Po(\lambda)$

- Patří mezi diskrétní náhodné proměnné.
- Rozdělení je definováno jedním parametrem $\lambda > 0$ – střední počet událostí za jednotku času. Poissonova NP může nabývat hodnot $0, 1, 2, \dots$ a může např. představovat počet zákazníků přicházejících za jednotku času.
- Pravděpodobnostní funkce je definována:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{pro } \lambda > 0, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$P(X = k) = 0 \quad \text{jinde.}$$

- Pro střední hodnotu a rozptyl platí:

$$EX = DX = \lambda .$$

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti – Po(λ)

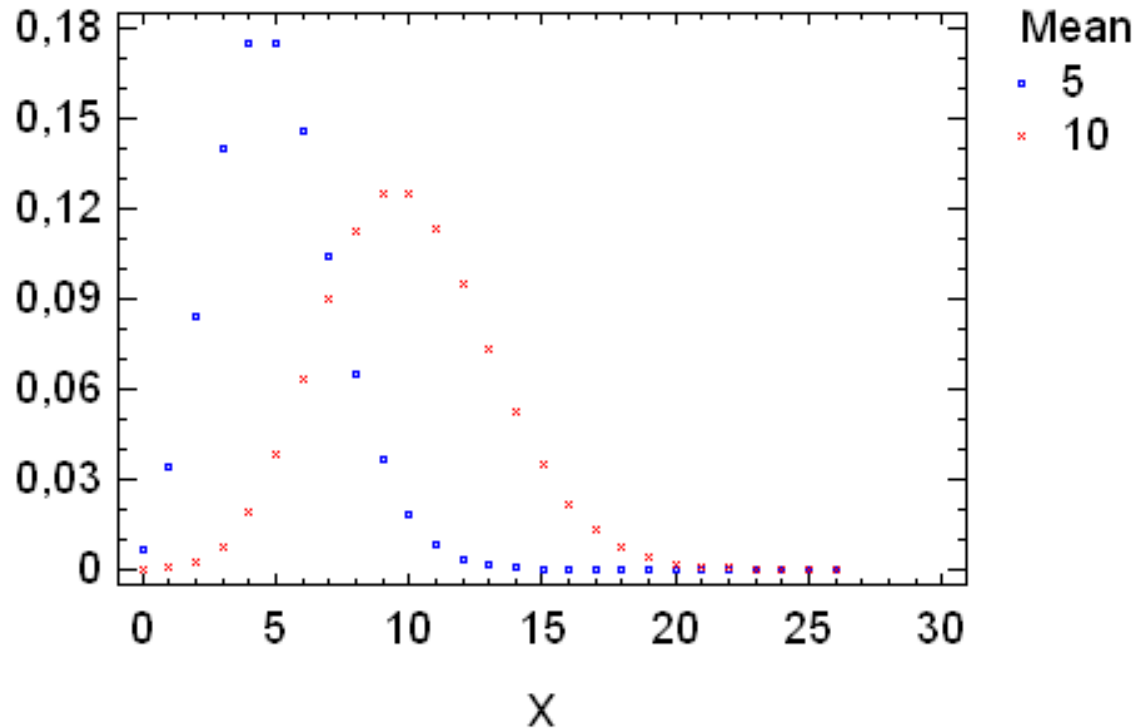
- Odvození vztahu pro střední hodnotu:

$$EK = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k \cdot (k-1)!} \cdot e^{-\lambda} =$$
$$\lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots \right)^* = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

* Maclaurinova řada

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti – $Po(\lambda)$



Ukázka průběhu pravděpodobnostní funkce Poissonovy náhodné proměnné.

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti $E(\lambda)$

- Patří mezi spojitá rozdělení pravděpodobnosti.
- Rozdělení je definováno jedním parametrem $\lambda > 0$. Exponenciální NP představuje dobu trvání činnosti (např. obsluhy zákazníka), příp. dobu mezi jednotlivými událostmi (příchody zákazníků) – jestliže se počet přicházejících zákazníků za jednotku času řídí Poissonovým rozdělením, potom délky mezer mezi příchody zákazníků se řídí exponenciálním rozdělením.

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti $E(\lambda)$

- Pro hustotu pravděpodobnosti platí:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{pro } \lambda > 0, x > 0,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{jinde .}$$

- Pro distribuční funkci platí:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{pro } \lambda > 0, x > 0,$$

$$F(x) = 0 \quad \text{jinde .}$$

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti $E(\lambda)$

- Pro střední hodnotu exponenciální NP platí:

$$EX = \frac{1}{\lambda} .$$

- Pro rozptyl exponenciální NP platí:

$$DX = \frac{1}{\lambda^2} .$$

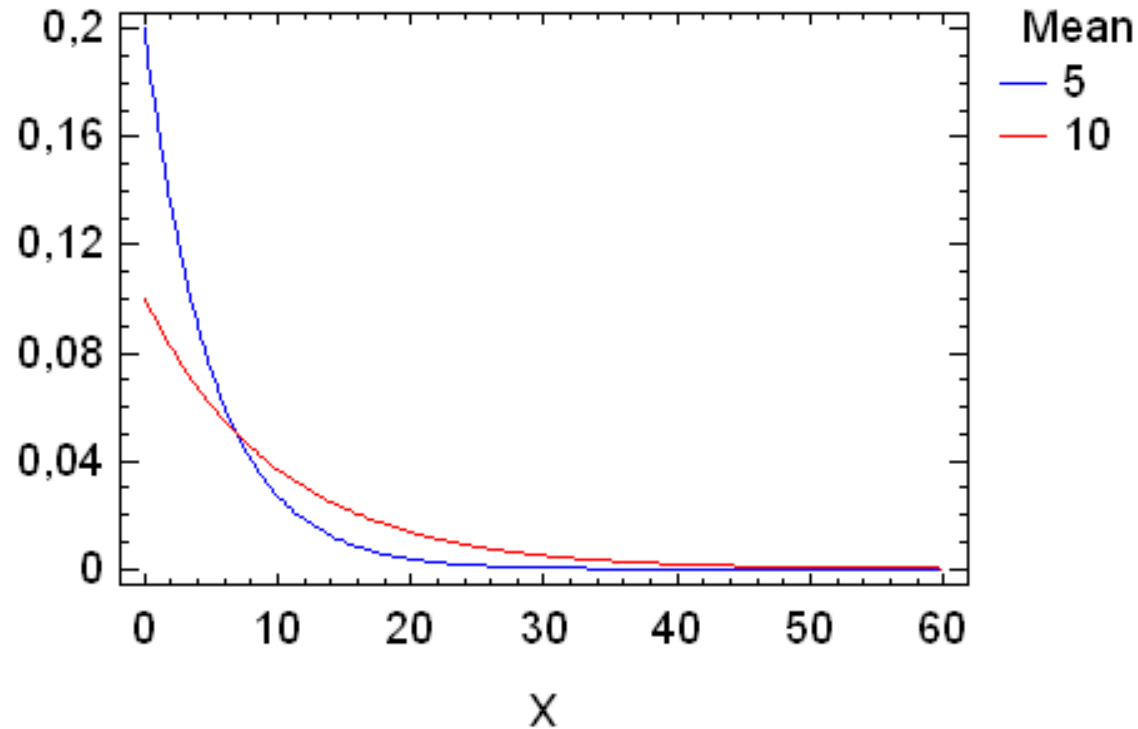
Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti $E(\lambda)$

- Odvození vztahu pro střední hodnotu:

$$EX = \int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx = \lambda \cdot \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a xe^{-\lambda x} dx^* =$$
$$\lambda \cdot \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{-a}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \lambda \cdot \left(-0 - 0 + \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

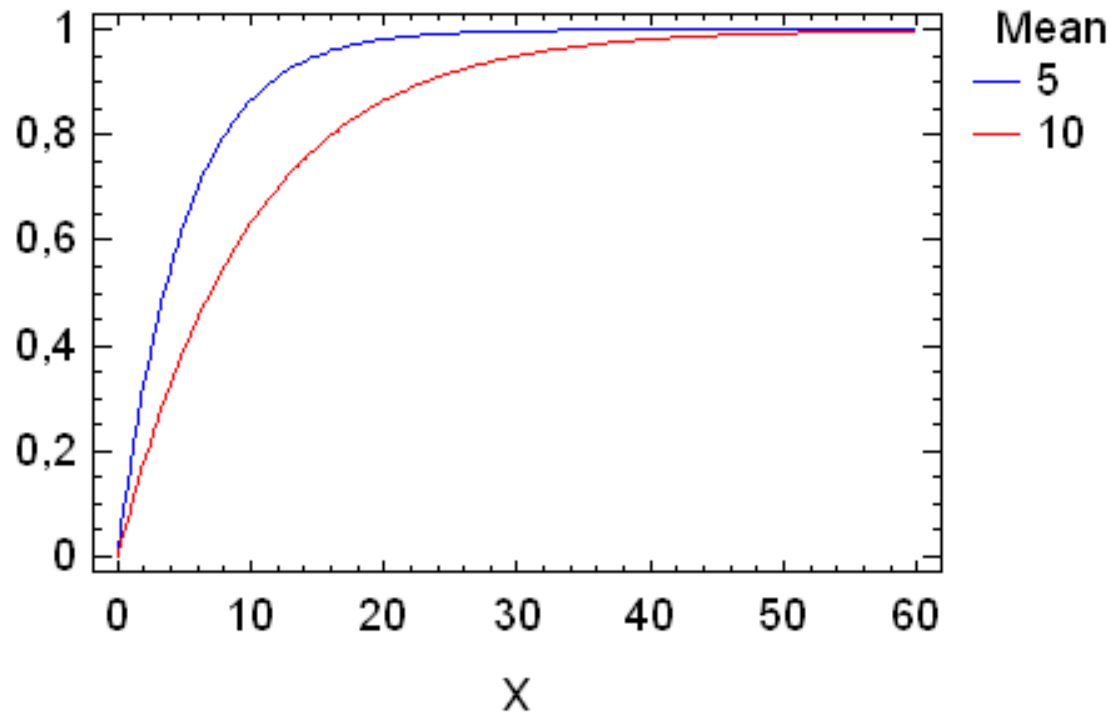
$$\begin{aligned} * \int_0^a xe^{-\lambda x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = e^{-\lambda x} \\ u' = 1 \quad v = \frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \end{array} \right| = \left[\frac{-x}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^a - \int_0^a \frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{-x}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^a + \frac{1}{\lambda} \int_0^a e^{-\lambda x} dx = \\ &= \left[\frac{-x}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^a + \frac{1}{\lambda} \cdot \left[\frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^a = \frac{-a}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda 0} \right) = \frac{-a}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda 0} = \\ &= \frac{-a}{\lambda} \cdot e^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda^2} \cdot e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti $E(\lambda)$



Ukázka průběhu hustoty pravděpodobnosti exponenciální náhodné proměnné.

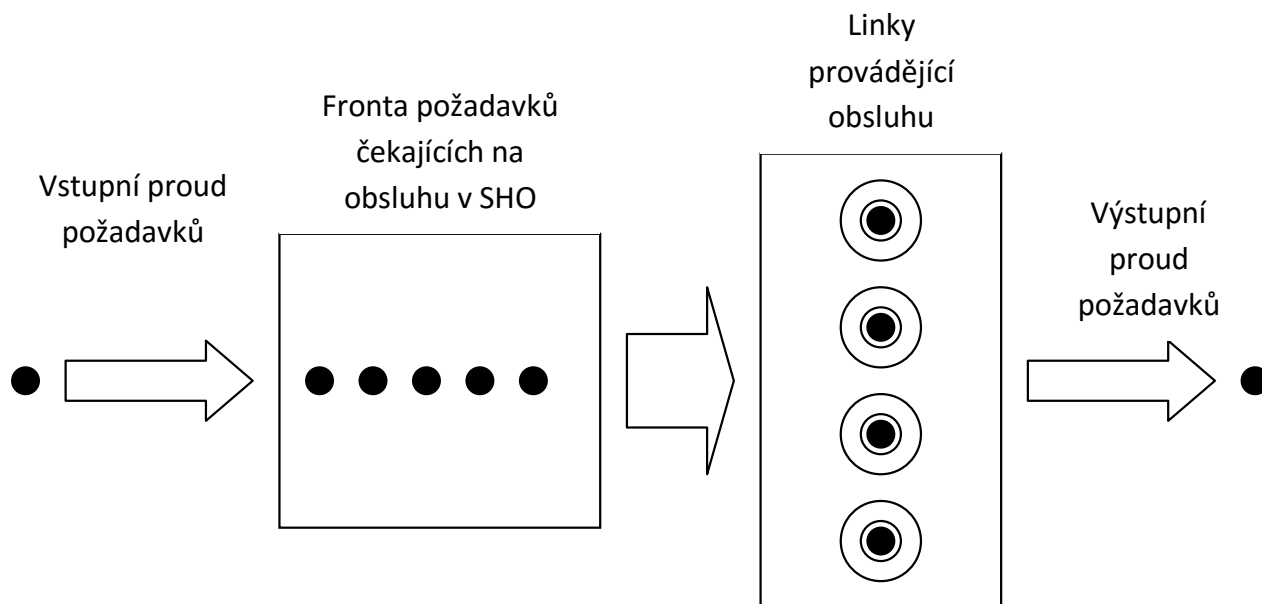
Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti $E(\lambda)$



Ukázka průběhu distribuční funkce exponenciální náhodné proměnné.

Systemy hromadné obsluhy

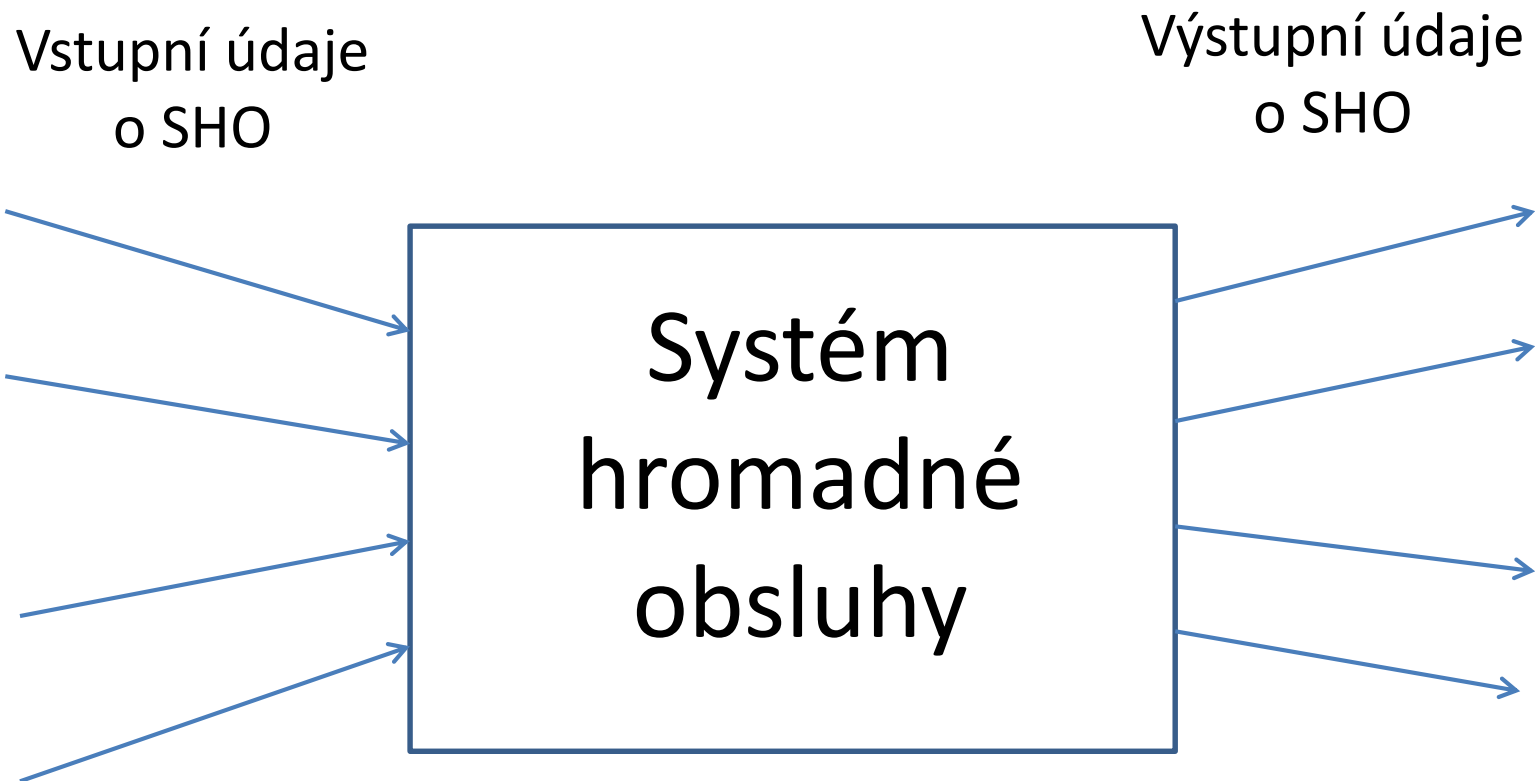
- Za systém hromadné obsluhy (SHO) lze považovat každý systém, k němuž přicházejí požadavky na obsluhu v systému.



Systemy hromadné obsluhy

- SHO lze členit podle mnoha kritérií, rozeznáváme např.:
 - Systémy bez fronty a systémy tvořící frontu.
 - Systémy tvořící frontu lze rozdělit na systémy s neomezenou nebo omezenou délkou fronty.
 - Systémy tvořící frontu lze dále rozdělit podle frontového režimu – FIFO, LIFO, PRI.
 - Systémy s paralelně, sériově nebo kombinovaně řazenými linkami.
 - Systémy se spolehlivými linkami a systémy s nespolehlivými linkami.

Systemy hromadné obsluhy



Systemy hromadné obsluhy

- Každý SHO lze charakterizovat několika faktory:
 - Charakter vstupního toku zákazníků.
 - Charakter obsluhy.
 - Počet obslužných linek a jejich uspořádání.
 - Kapacita fronty a frontový režim (pokud SHO umožňuje tvorbu fronty).
- Tyto údaje představují oblast vstupních dat (potřebujeme je znát, abychom mohli SHO matematicky modelovat).

Systemy hromadné obsluhy

- U daného SHO nás zajímá např.:
 - Procento odmítnutých zákazníků, resp. pravděpodobnost odmítnutí zákazníka P_{ODM} .
 - Využití obslužných linek κ .
 - Střední počet zákazníků v systému EK .
 - Střední počet zákazníků v obsluze ES .
 - Střední počet zákazníků ve frontě EL .
- Tyto údaje představují oblast výstupních dat (tedy to, co chceme řešením matematického modelu SHO získat) – provozní charakteristiky.

Systemy hromadné obsluhy

- SHO se pro názornost označují dle Kendallovy klasifikace SHO:

$$X / Y / n / m,$$

kde: X vyjadřuje pravděpodobnostní rozdělení příchodu zákazníků k SHO,

Y vyjadřuje pravděpodobnostní rozdělení, kterým se řídí doba trvání obsluhy zákazníka,

n označuje počet obslužných linek v SHO,

m označuje celkový počet míst v SHO.

Systemy hromadné obsluhy

	Pozice X	Pozice Y
M	exponenciální doby mezi příchody (elementární vstupní tok)	exponenciální doba obsluhy
E_k	Erlangovo rozdělení dob mezi příchody	Erlangovo rozdělení doby obsluhy
D	konstantní doby mezi příchody	konstantní doba obsluhy
G	obecné rozdělení dob mezi příchody	obecné rozdělení doby obsluhy

Systemy hromadné obsluhy

- Budeme se zabývat systémy:
 - Vstupní tok zákazníků bude elementární.
 - Doba obsluhy zákazníka bude exponenciální náhodná proměnná.
 - U systémů tvořících frontu budeme uvažovat FIFO režim výběru zákazníků z fronty.
 - Obslužné linky budou řazeny paralelně, budou homogenní a nebudeme uvažovat možnost jejich poruchy.

Elementární vstupní tok

- **Elementární vstupní tok** je takový tok, který splňuje tři základní vlastnosti:
 - Stacionárnost, beznáslednost a ordinárnost.
- **Stacionárnost** (neměnnost stochastického režimu): Počet zákazníků, kteří přicházejí k SHO za čas t , závisí pouze na délce tohoto intervalu a nezávisí na jeho poloze na časové ose.

Elementární vstupní tok

- **Beznáslednost** (neexistence následných účinků): Počet zákazníků, kteří přijdou k SHO za čas t , nezávisí na počtu zákazníků, kteří k SHO přišli před začátkem tohoto časového intervalu.
- **Ordinárnost**: Zákazníci přicházejí k SHO jednotlivě.

Elementární vstupní tok

- Pro elementární vstupní tok platí:
 - Pravděpodobnost $p_k(t)$, tedy že za čas t přijde k SHO k zákazníků, je rovna:

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad \text{pro } \lambda > 0, t > 0, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$p_k(t) = 0 \quad \text{jinde.}$$

- Elementární vstupní tok je tedy Poissonův, mezery mezi příchody zákazníků k SHO jsou exponenciální.

Intenzity přechodů

- Za krátký časový okamžik $\Delta t \rightarrow 0$ jsou přípustné pouze tyto přechody:
 - Příklad jednoho zákazníka nastane s intenzitou přechodu λ (**intenzita příchodu zákazníka nezávisí** na počtu zákazníků nacházejících se v systému).
 - Odchod jednoho z k obsluhovaných zákazníků, kde $k=1, \dots, n$ nastane s intenzitou $k\mu$ (**intenzita odchodu zákazníka závisí** na počtu zákazníků, kteří jsou v obsluze).

M/M/n/n SHO

- Systém je tvořen n paralelně řazenými homogenními linkami.
- Systém nepřipouští tvorbu fronty čekajících zákazníků na obsluhu, je-li systém plný, jsou přicházející zákazníci odmítáni.

M/M/n/n SHO

- Vstupní tok je elementární s intenzitou λ .
 - Střední počet zákazníků, kteří přicházejí k SHO za jednotku času je tedy roven λ .
 - Jelikož je vstupní tok elementární (tedy Poissonův), jsou doby mezi příchody po sobě jdoucích zákazníků exponenciální náhodnou proměnnou s parametrem λ . Převrácená hodnota tohoto parametru je rovna střední době mezi příchody zákazníků k systému.

M/M/n/n SHO

- Doba obsluhy zákazníka je náhodná a řídí se exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti, které je definováno parametrem μ .
 - Parametr μ nazýváme **parametrem obsluhy** a udává, kolik zákazníků je průměrně schopna 1 linka obsloužit za jednotku času, **hodnota $1/\mu$ potom udává střední dobu obsluhy jednoho zákazníka**.
 - Parametr $n\mu$ nazýváme **parametrem systému** a udává, kolik zákazníků za jednotku času je systém schopen průměrně obsloužit.

M/M/n/n SHO

- Nyní nás například zajímá, jaký je střední počet zákazníků v systému – EK . Jelikož náhodnou proměnnou je počet zákazníků v systému, který je diskrétní, můžeme psát:

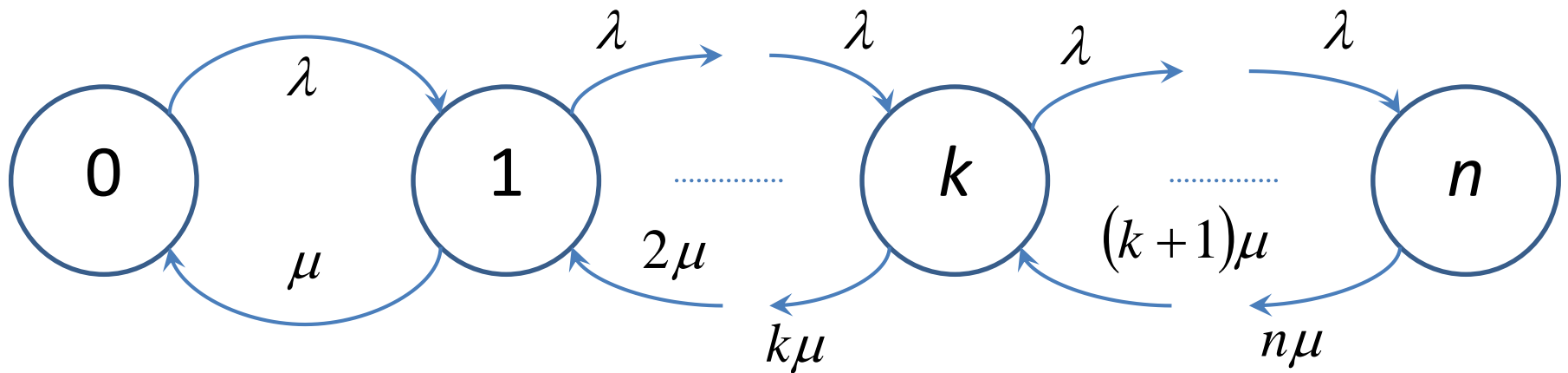
$$EK = \sum_{k=0}^n k \cdot P_k.$$

- Z uvedeného vztahu je zřejmé, že k výpočtu potřebujeme znát pravděpodobnosti, že v systému se nachází k zákazníků pro $k = 0, 1, \dots, n$. Ty stanovíme postupem, který si ukážeme dále.

Přechodový graf M/M/n/n SHO

- Systém se může nacházet v následujících stavech tvořících množinu S (množina všech stavů systému):
 - 0 – systém je prázdný (v systému se nenachází žádný zákazník).
 - 1 – v systému se nachází 1 zákazník – tento zákazník je obsluhován.
 - k – v systému (a tedy i v obsluze) se nachází k zákazníků, kde $k = 1, 2, \dots, n - 1$.
 - n – v systému (a tedy i v obsluze) se nachází n zákazníků, systém je zaplněn.

Přechodový graf M/M/n/n SHO

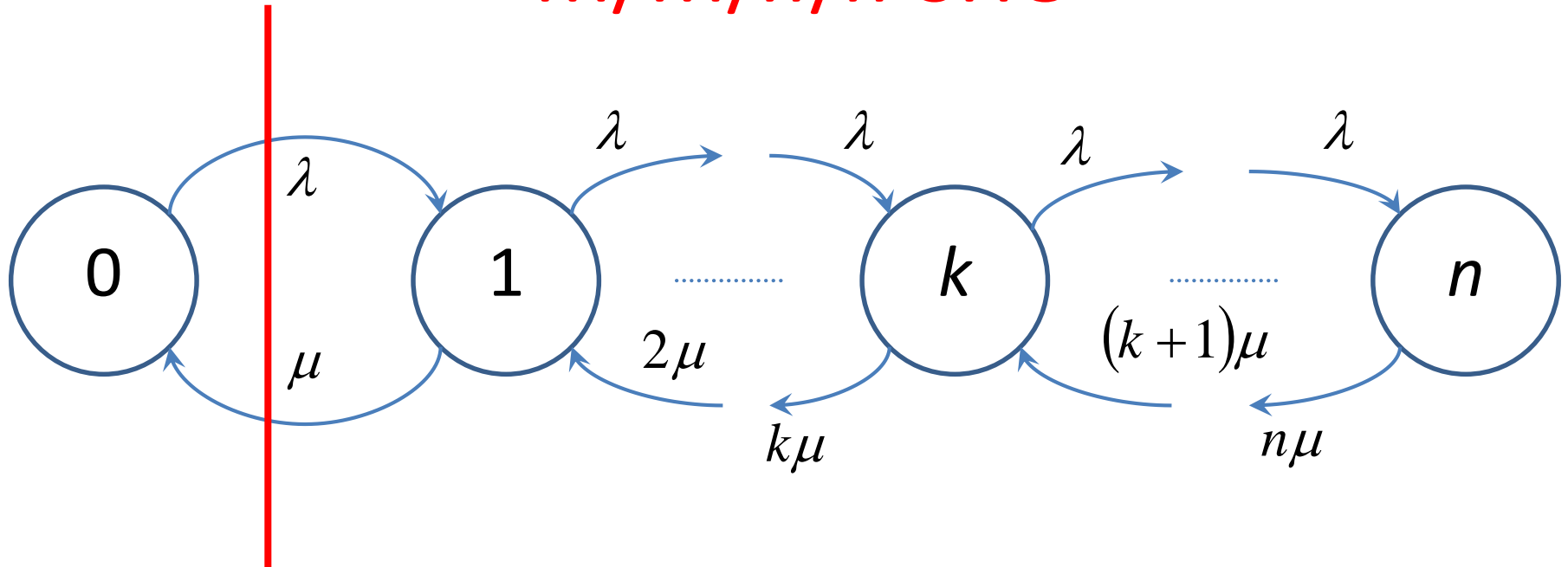


Vrcholy grafu představují stav systému (počet zákazníků v systému), hrany představují možné změny stavu systému za čas $\Delta t \rightarrow 0$ a ohodnocení hran představuje intenzitu přechodu.

Rovnice globální rovnováhy

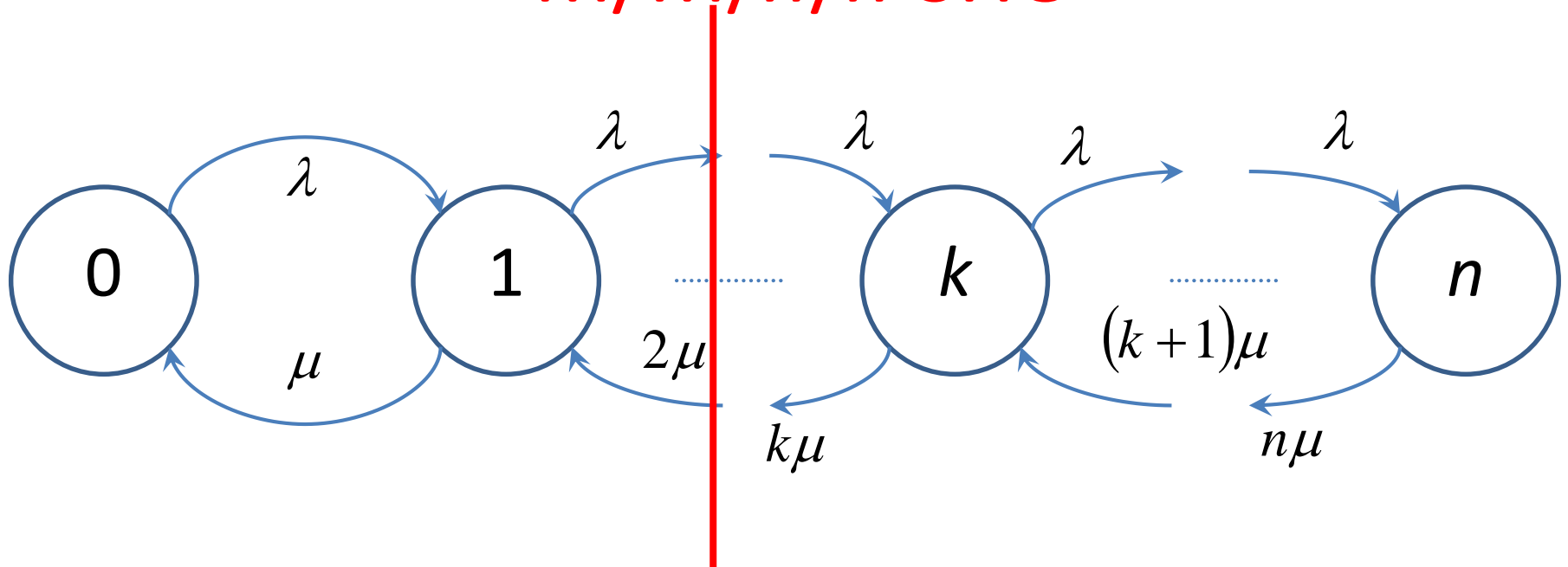
- Jedná se sice o dynamický systém, my budeme ale vyšetřovat systém v tzv. ustáleném (rovnovážném) stavu, tedy pro $t \rightarrow \infty$.
- V ustáleném stavu platí tzv. **princip globální rovnováhy**: Pro každou množinu stavů A , která je podmnožinou S , platí, že tok (pravděpodobnost stavu násobená intenzitou přechodu) z této množiny je roven toku do této množiny.

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/n SHO



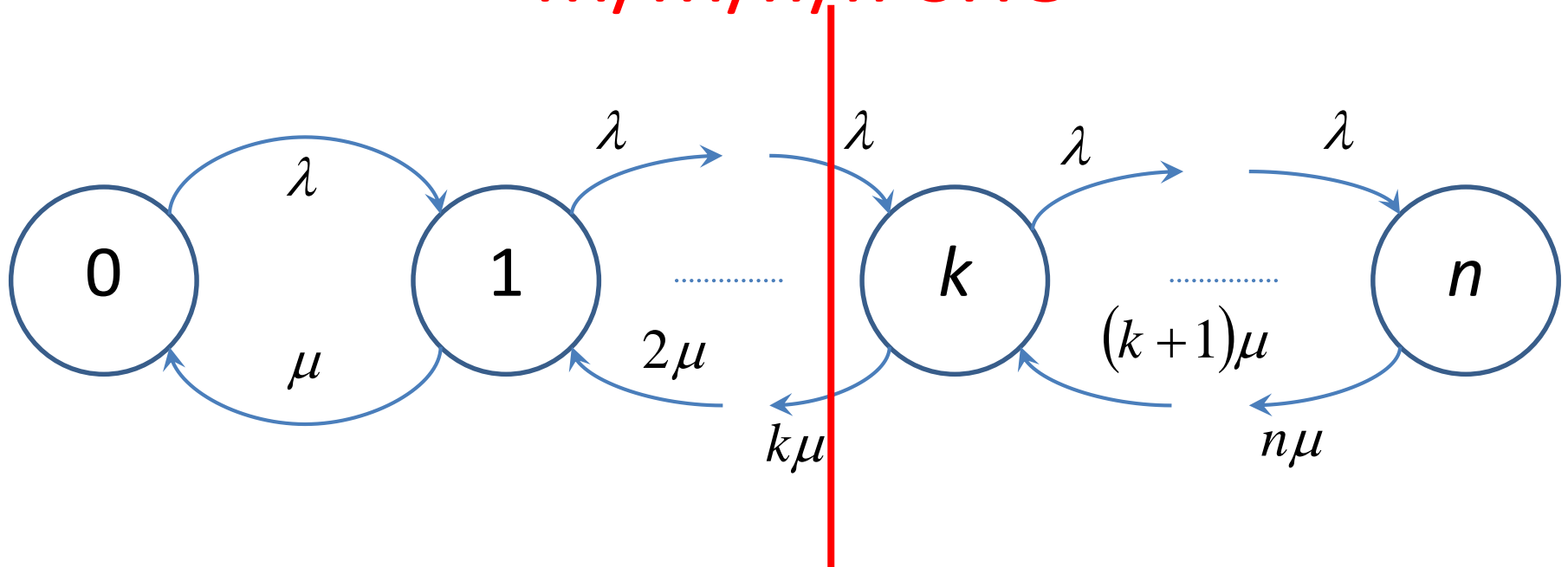
$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/n SHO



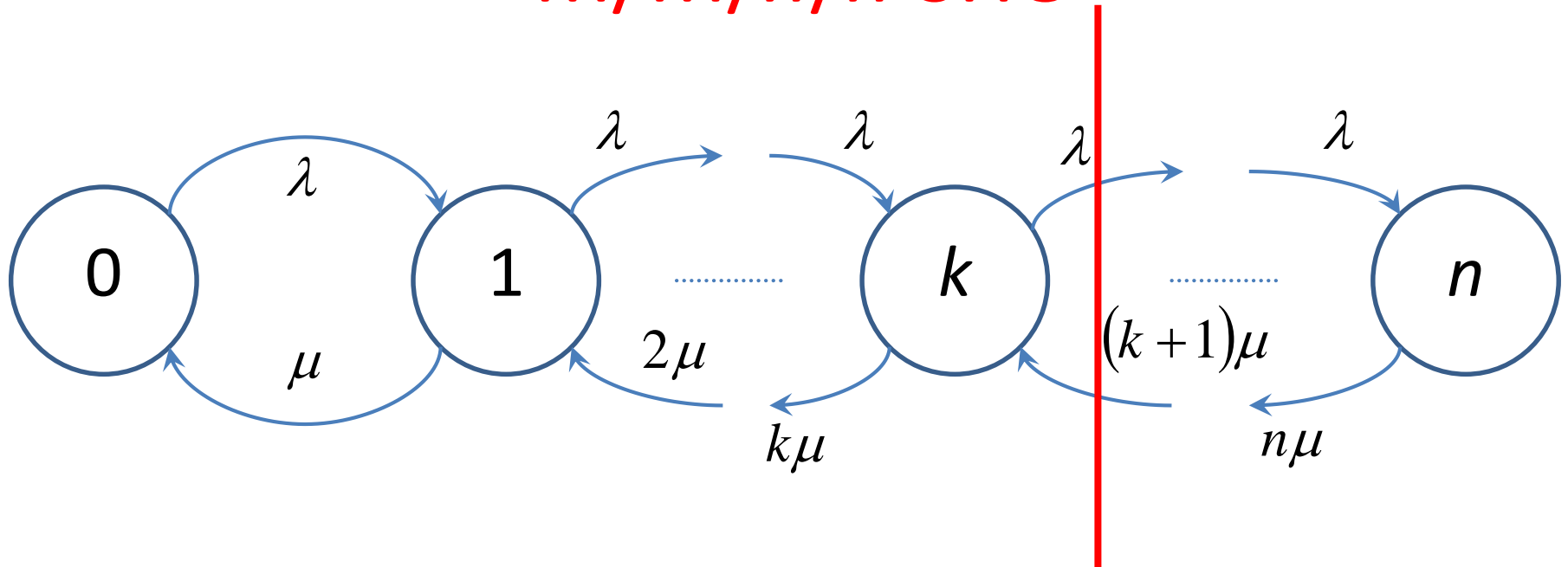
$$\lambda P_1 = 2\mu P_2$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/n SHO



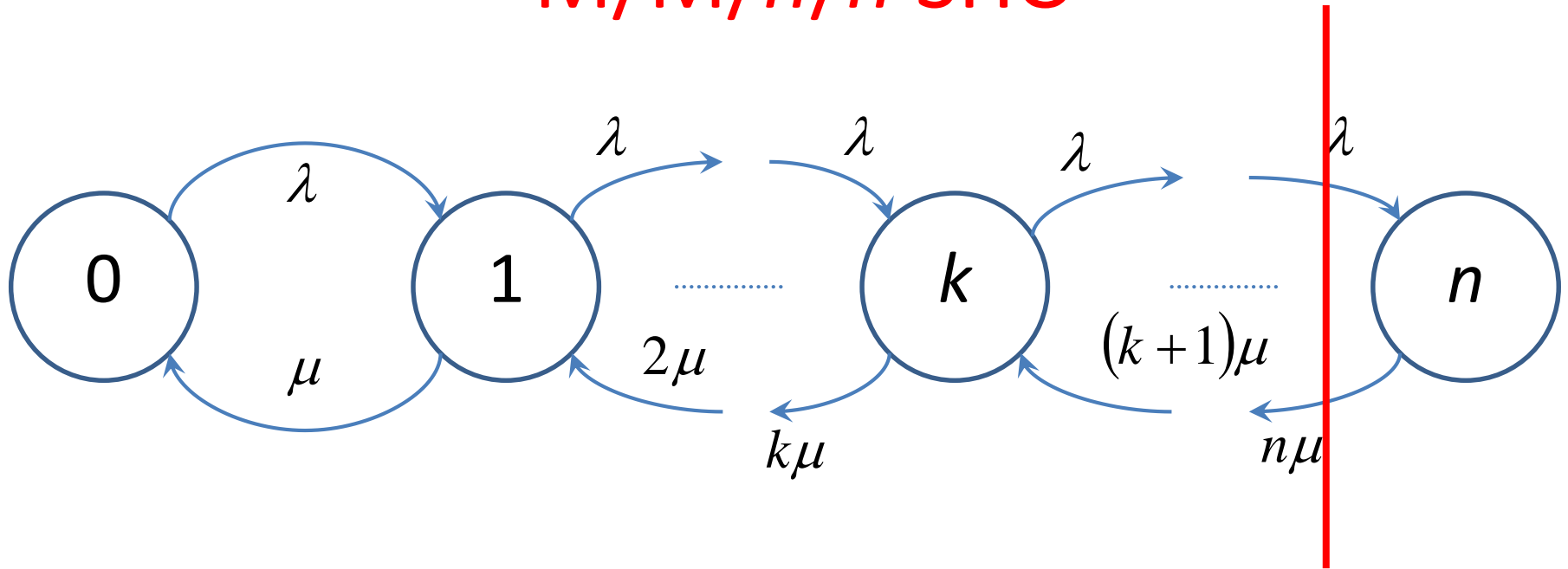
$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/n SHO



$$\lambda P_k = (k+1)\mu P_{k+1}$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/n SHO



$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/n SHO

- Dostáváme soustavu $n+1$ lineárních rovnic s $n+1$ neznámými pravděpodobnostmi P_k , kde $k = 0, 1, \dots, n$. Soustavu lze obecně zapsat ve tvaru:

$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n.$$

- Tato soustava má nekonečně mnoho řešení (jedna rovnice je lineární kombinací ostatních rovnic).

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/n SHO

- Abychom získali pouze jedno řešení rovnice, je nutné soustavu doplnit tzv. normativní podmínkou pravděpodobnosti, která nám říká, že systém se může nacházet pouze ve stavech z množiny S. Zapsáno matematicky:

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1.$$

Analytické řešení M/M/n/n SHO

- Z rovnice $\lambda P_{k-1} = k\mu P_k$ pro $k = 1, 2, \dots, n$ přímo plyne vztah:

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n.$$

- Tento rekurentní vztah umožňuje spočítat pravděpodobnost stavu k pomocí pravděpodobnosti stavu $k-1$.

Analytické řešení M/M/n/n SHO

- Nyní bychom potřebovali vyjádřit vztahy pro výpočet pravděpodobností jednotlivých stavů k pomocí pravděpodobnosti stavu 0, chceme tedy vyjádřit závislost P_k pro $k = 1, 2, \dots, n$ na P_0 . K tomu využijeme rekurentní vzorec, který jsme si odvodili v předchozím postupu.

Analytické řešení M/M/n/n SHO

$$P_1 = \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

⋮

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n$$

Pomocí tohoto vztahu jsme schopni spočítat všechny pravděpodobnosti kromě pravděpodobnosti P_0 , kterou odvodíme z normativní podmínky pravděpodobnosti

$$\sum_{k=0}^n P_k = 1.$$

Erlangův vzorec

Analytické řešení M/M/n/n SHO

- Abychom mohli použít vzorec odvozený v předchozím snímku, musíme znát hodnotu pravděpodobnosti P_0 . Vztah pro výpočet této pravděpodobnosti odvodíme s využitím normativní podmínky pravděpodobnosti.

Analytické řešení M/M/n/n SHO

$$P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots + P_n = 1$$

$$\frac{1}{0!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 P_0 + \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0 + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = 1$$

$$P_0 \cdot \left[\frac{1}{0!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] = 1$$

$$P_0 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} \quad \text{Erlangův vzorec}$$

Provozní charakteristiky M/M/n/n SHO

- Pravděpodobnost odmítnutí zákazníka P_{ODM} :
 - Přicházející zákazník bude odmítnut, najde-li v okamžiku svého příchodu systém plný, tedy ve stavu n . Pro pravděpodobnost odmítnutí tedy platí:

$$P_{ODM} = P_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{\frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/n SHO

- Střední počet zákazníků v systému EK stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou K je počet zákazníků v systému. Tedy platí:

$$\begin{aligned} EK &= \sum_{k=0}^n kP_k = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{1}{k \cdot (k-1)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 = \frac{\lambda}{\mu} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} P_0 = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left[\frac{1}{0!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 P_0 + \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} P_0 \right] = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1}) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_n). \end{aligned}$$

Provozní charakteristiky M/M/n/n SHO

- Vztah pro výpočet EK lze také odvodit následujícím způsobem. Vyjdeme z výchozí soustavy rovnic globální rovnováhy:

$$\lambda P_0 = \mu P_1,$$

$$\lambda P_1 = 2\mu P_2,$$

⋮

$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/n SHO

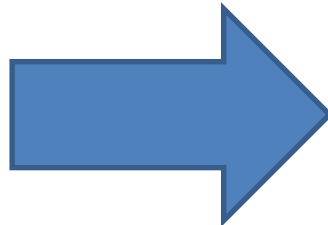
- Sečtením všech rovnic globální rovnováhy dostaneme:

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$\lambda P_1 = 2\mu P_2$$

⋮

$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n$$



$$\lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P_k = \mu \cdot \sum_{k=1}^n k P_k$$

Provozní charakteristiky M/M/n/n SHO

- Vyjdeme-li z definičního vztahu pro výpočet střední hodnoty diskrétní náhodné proměnné – počtu zákazníků v systému k , můžeme psát:

$$EK = \sum_{k=0}^n kP_k = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + \dots + n \cdot P_n = \sum_{k=1}^n kP_k .$$

Provozní charakteristiky M/M/n/n SHO

- Použijeme-li tento vztah ve vztahu předcházejícím, získáváme postupnými úpravami:

$$\lambda \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P_k = \mu \cdot EK,$$

$$\frac{\lambda}{\mu} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P_k = EK,$$

$$\frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_n) = EK.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/n SHO

- Střední počet zákazníků v obsluze ES stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou S je počet zákazníků v obsluze. Jelikož u tohoto systému platí, že počet zákazníků v systému se rovná počtu zákazníků v obsluze, můžeme psát:

$$ES = EK = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_n).$$

Provozní charakteristiky M/M/n/n SHO

- Střední počet zákazníků ve frontě EL opět stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou L je počet zákazníků ve frontě. Jelikož tento systém netvoří frontu (počet zákazníků ve frontě je pořád roven 0), platí:

$$EL = 0.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/n SHO

- Využití obslužných linek (systému) κ stanovíme na základě následující úvahy. Systém průměrně obsluhuje ES zákazníků a je schopen obsluhovat n zákazníků, tedy platí:

$$\kappa = \frac{ES}{n} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_n)}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot (1 - P_n) = \rho \cdot (1 - P_n),$$

kde ρ nazýváme intenzitou provozu.

M/M/n/∞ SHO

- Systém je tvořen n paralelně řazenými homogenními linkami.
- Systém připouští tvorbu fronty čekajících zákazníků na obsluhu, přicházející zákazník nachází vždy volné místo v systému, systém tedy neodmítá zákazníky (v systému se může teoreticky nacházet ∞ zákazníků).
- Aby byl systém stabilní, musí platit:

$$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1 .$$

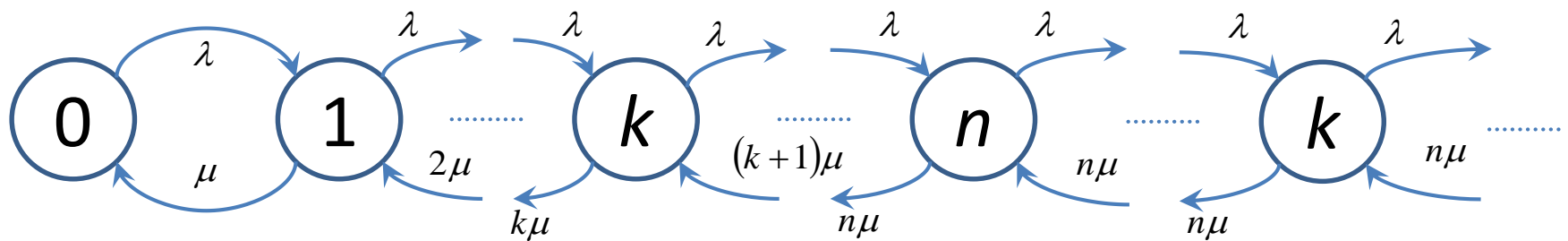
M/M/n/∞ SHO

- Vstupní tok je elementární s intenzitou λ .
- Doba obsluhy zákazníka je exponenciální náhodná proměnná s parametrem μ .

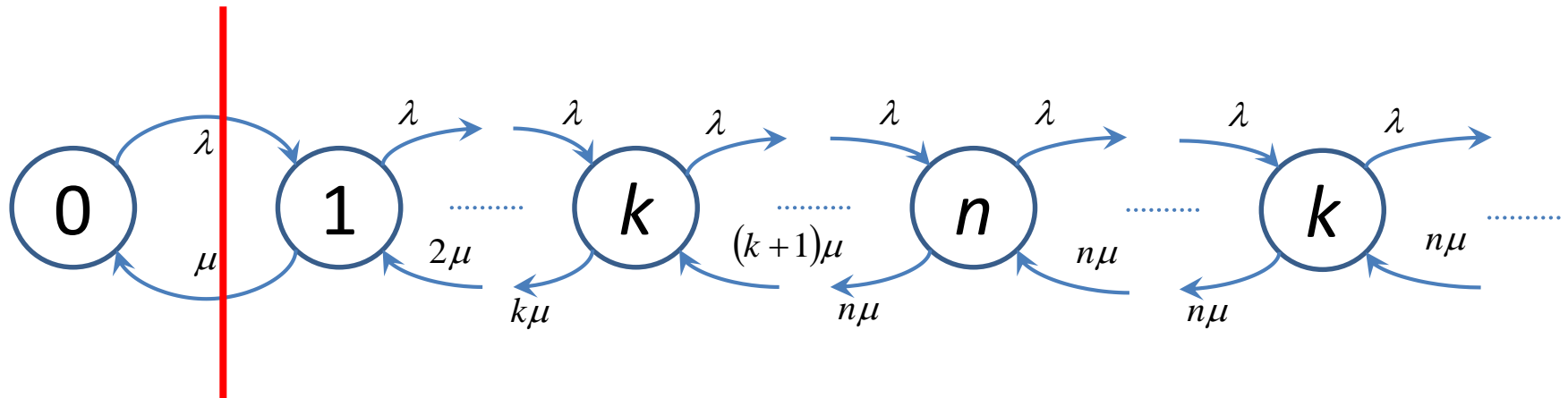
Přechodový graf $M/M/n/\infty$ SHO

- Systém se může nacházet ve stavech:
 - 0 – systém je prázdný.
 - 1 – v systému je 1 zákazník – 1 v obsluze, 0 ve frontě.
 - k – v systému se nachází k zákazníků, kde $k = 1, 2, \dots, n - 1$; k zákazníků je v obsluze, 0 ve frontě.
 - n – v systému je n zákazníků, všichni jsou v obsluze, fronta je prázdná.
 - k – v systému je k zákazníků, kde $k = n + 1, \dots$; n zákazníků je v obsluze a $k - n$ ve frontě.

Přechodový graf M/M/n/∞ SHO

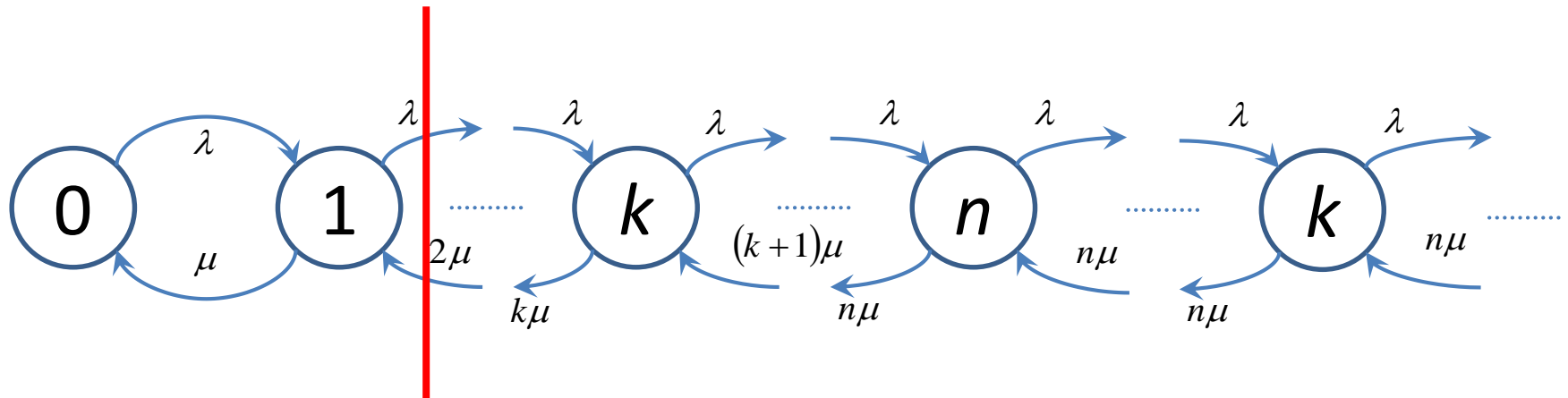


Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/∞ SHO



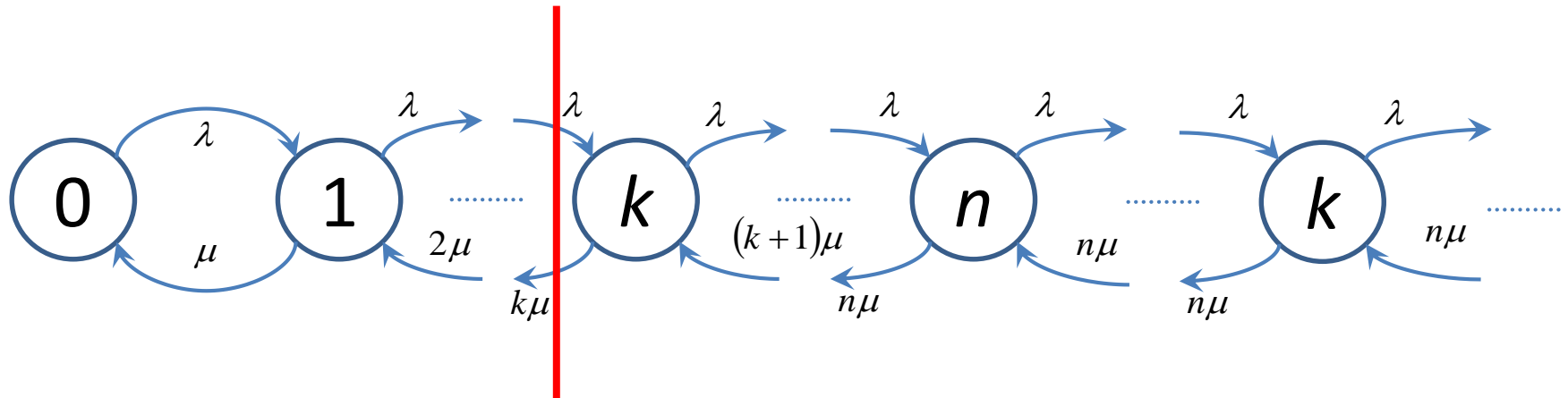
$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/∞ SHO



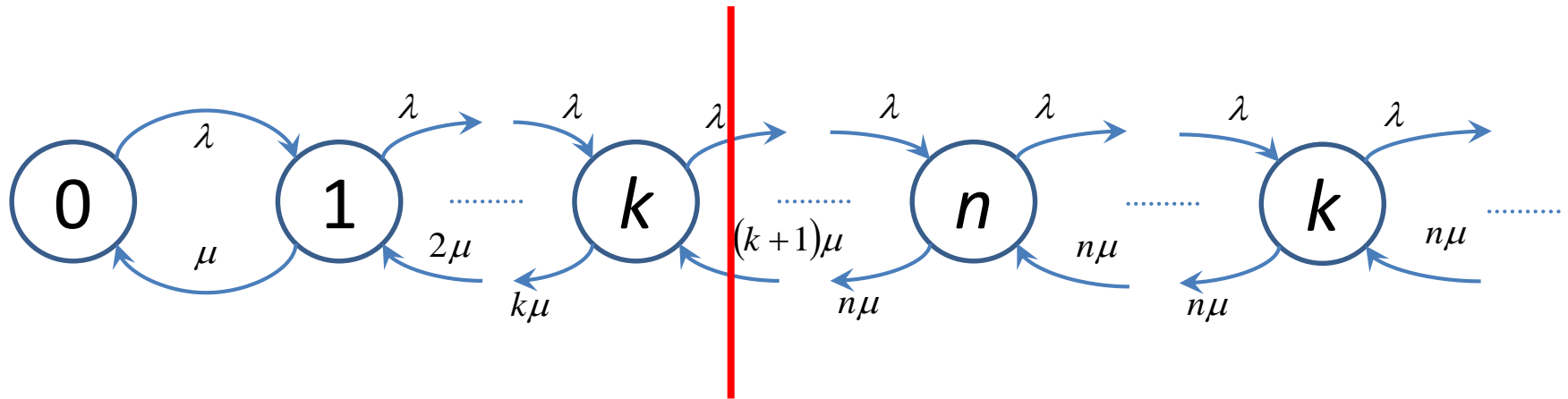
$$\lambda P_1 = 2\mu P_2$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/∞ SHO



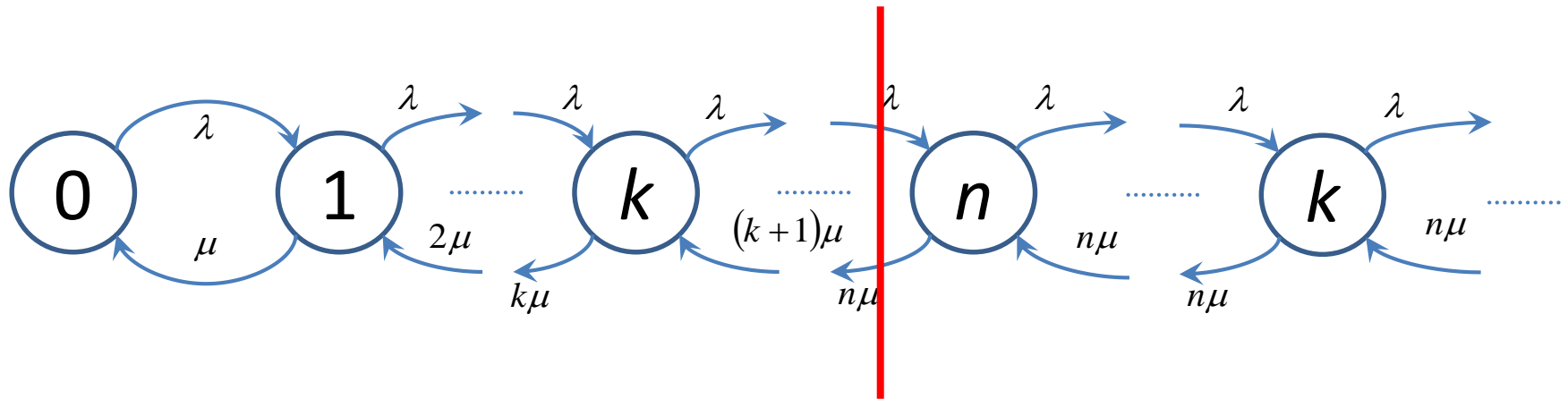
$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/∞ SHO



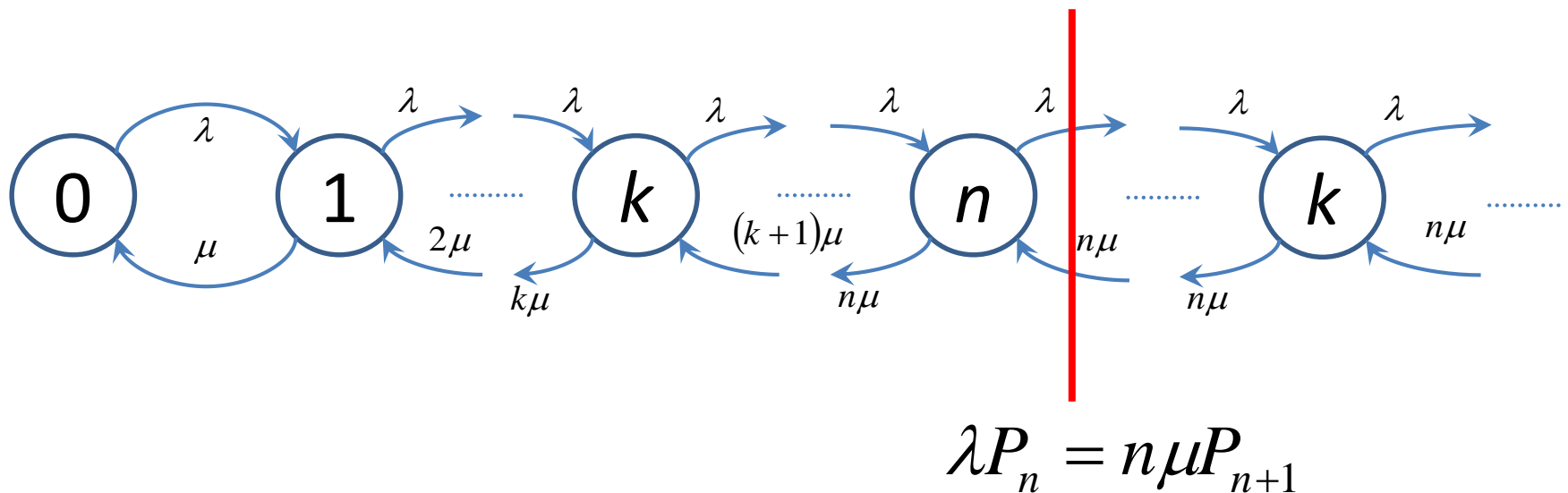
$$\lambda P_k = (k + 1)\mu P_{k+1}$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/∞ SHO

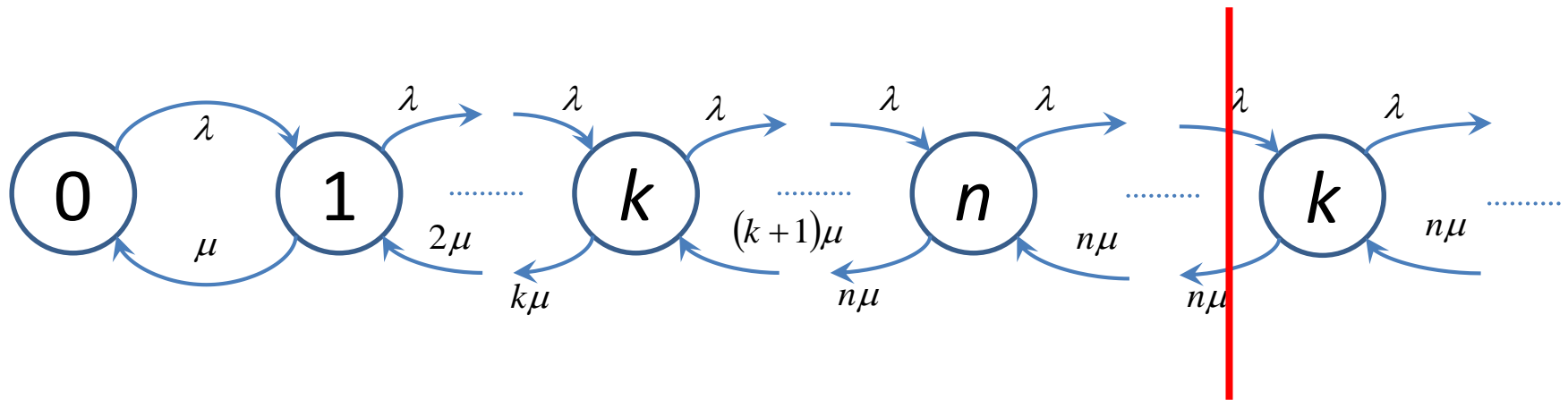


$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/∞ SHO

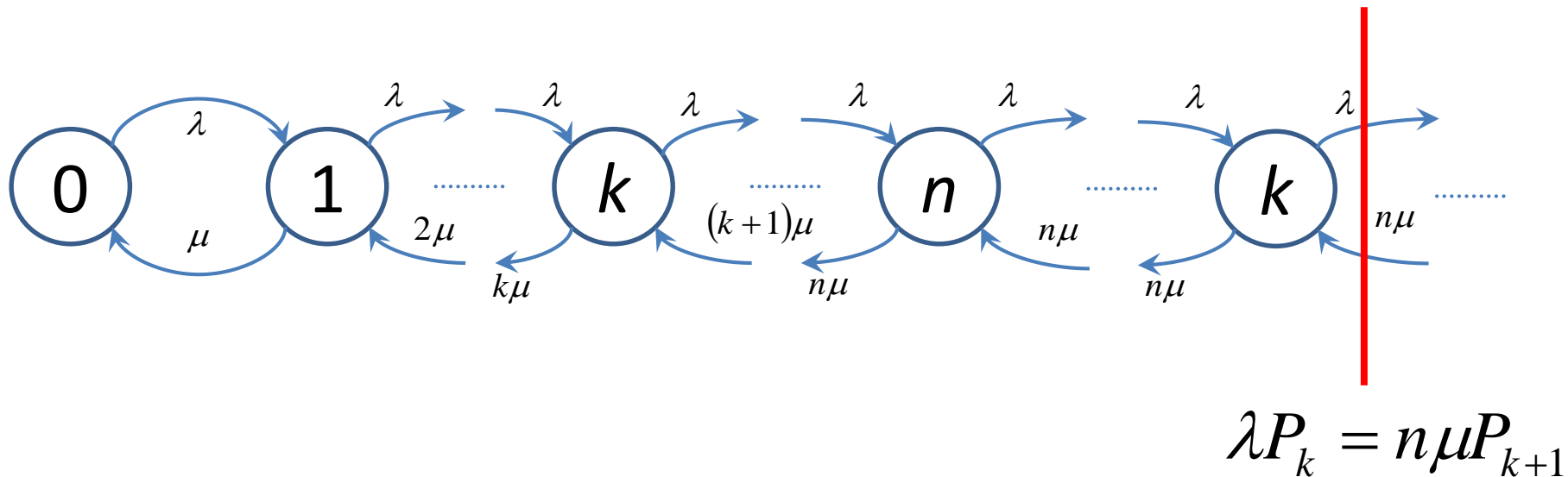


Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/∞ SHO



$$\lambda P_{k-1} = n\mu P_k$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/∞ SHO



Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/∞ SHO

- V tomto případě dostáváme soustavu nekonečně mnoho lineárních rovnic s nekonečně mnoho neznámými pravděpodobnostmi P_k , kde $k=0,1,2,\dots,n,\dots$:

$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k \text{ pro } k = 1,2,\dots,n,$$

$$\lambda P_{k-1} = n\mu P_k \text{ pro } k = n+1, n+2,\dots$$

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

- Z těchto rovnic získáme přímo rekurentní vztahy:

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n ,$$

$$P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = n, n + 1, \dots .$$

pozn. U druhého rekurentního vztahu uvádíme platnost i pro $k=n$, což neodpovídá příslušné rovnici globální rovnováhy. Lze se ale snadno přesvědčit (dosazením $k=n$ do prvního rekurentního vztahu), že druhý rekurentní vztah platí i v tomto případě.

Analytické řešení $M/M/n/\infty$ SHO

- Nyní bychom opět potřebovali vyjádřit vztahy pro výpočet pravděpodobností jednotlivých stavů k pomocí pravděpodobnosti stavu 0, chceme tedy vyjádřit závislost P_k pro $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ na P_0 . K tomu využijeme rekurentní vzorce, které jsme si odvodili v předchozím postupu.

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

$$P_1 = \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

⋮

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n$$

Vztah pro výpočet P_k pomocí P_0 , **vztah platí pouze pro $k = 1, 2, \dots, n!!!$**

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

$$\text{Víme : } P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = n, n+1, \dots \text{ a } P_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} P_n$$


$$P_{n+2} = \frac{\lambda}{n\mu} P_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{\lambda}{n\mu} P_n = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^2 P_n$$

⋮

$$P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} P_n = \rho^{k-n} P_n \text{ pro } k = n, n+1, \dots$$

Vztah pro výpočet P_k
pomocí P_n , **platí pouze pro**
 $k = n, \dots!!!$

$$P_k = \rho^{k-n} P_n = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{1}{n^{k-n} \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \text{ pro } k = n, n+1, \dots$$

 Vztah pro výpočet P_k pomocí P_0 , **platí**
pouze pro $k = n, \dots!!!$

Analytické řešení M/M/n/∞ SHO

Pravděpodobnost P_0 opět stanovíme z normativní podmínky pravděpodobnosti.

$$P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots + P_n + P_{n+1} + \dots = 1$$

$$\sum_{k=0}^n P_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot n^{k-n}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 = 1$$

$$P_0 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + P_0 \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{\rho}{1-\rho}} \text{ pro } \rho < 1$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^{k-n} =$$

$$= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots = \frac{\rho}{1-\rho} \text{ pro } \rho < 1$$



Jedná se o nekonečnou geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = \rho$ a kvocientem $q = \rho$, pro součet nekonečné geometrické řady platí:

$$s = \frac{a_1}{1-q} \text{ pro } |q| < 1.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞ SHO

- Pravděpodobnost odmítnutí zákazníka P_{ODM} :
 - Přicházející zákazník nebude nikdy odmítnut, najde-li v okamžiku svého příchodu některou z linek neobsazenou, začíná ihned jeho obsluha, v opačném případě se řadí do fronty, jejíž délka není nijak omezena:

$$P_{ODM} = 0.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞ SHO

- Střední počet zákazníků v obsluze ES stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou S je počet zákazníků v obsluze. Tedy platí:

$$\begin{aligned} ES &= \sum_{s=0}^n sP_s = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + n \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k P_0^* + n \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n} P_n^{**} = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-2} + P_{n-1} + P_n + P_{n+1} + \dots) = \frac{\lambda}{\mu}. \end{aligned}$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞

SHO

$$* \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k P_0 = \frac{\lambda}{\mu} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{k-1} P_0 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-2}).$$

$$\begin{aligned} ** n \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n} P_n &= n P_n + n \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n} P_n = n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 + n \cdot \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n-1} P_n = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-1} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n-1} P_n = \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_{n-1} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left[\left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^0 P_n + \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^1 P_n + \dots \right] = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_{n-1} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot (P_n + P_{n+1} + \dots) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (P_{n-1} + P_n + P_{n+1} + \dots) \end{aligned}$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞ SHO

- Střední počet zákazníků v obsluze ES lze také odvodit z rovnic globální rovnováhy, které sečteme:

$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lambda P_{k-1} = n\mu P_k \text{ pro } k = n + 1, n + 2, \dots$$

$$\lambda \cdot \sum_{k=1}^n P_{k-1} + \lambda \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} P_{k-1} = \mu \cdot \sum_{k=1}^n k P_k + \mu \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} n P_k.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞ SHO

- Získaný vztah upravujeme:

$$\lambda \cdot \sum_{k=1}^n P_{k-1} + \lambda \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} P_{k-1} = \mu \cdot \sum_{k=1}^n kP_k + \mu \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k,$$

$$\lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^n P_{k-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} P_{k-1} \right) = \mu \cdot \left(\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k \right),$$

$$\lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1} = \mu \cdot \left(\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k \right),$$

$$\lambda \cdot (P_0 + P_1 + \dots) = \mu \cdot \left(\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k \right).$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞ SHO

- Pro ES musí z definičního vztahu pro výpočet střední hodnoty platit:

$$ES = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + \dots + (n-1) \cdot P_{n-1} + n \cdot P_n +$$
$$+ n \cdot P_{n+1} + \dots = \sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} nP_k .$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞ SHO

- Použitím tohoto vztahu dostáváme:

$$\lambda \cdot (P_0 + P_1 + \dots) = \mu \cdot ES.$$

- Z normativní podmínky pravděpodobnosti plyne, že výraz v závorce na levé straně musí být roven 1, proto dostáváme:

$$ES = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞

SHO

- Střední počet zákazníků ve frontě EL opět stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou L je počet zákazníků ve frontě. Můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned} EL &= \sum_{l=0}^{\infty} lP_l = 0 \cdot \sum_{k=0}^n P_k + \sum_{l=1}^{\infty} lP_{n+l} = \sum_{l=1}^{\infty} l\rho^l P_n = \rho P_n \cdot \sum_{l=1}^{\infty} l\rho^{l-1} = \\ &= \rho P_n \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d}{d\rho} \rho^l = \rho P_n \cdot \frac{d}{d\rho} \sum_{l=1}^{\infty} \rho^l = \rho P_n \cdot \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{1-\rho} \right) = \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_n. \end{aligned}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \rho^l = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞ SHO

- Střední počet zákazníků v systému EK je roven součtu středního počtu požadavků v obsluze a středního počtu požadavků ve frontě. Můžeme tedy psát:

$$EK = ES + EL = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \cdot P_n.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/∞ SHO

- Využití obslužných linek (systému) κ stanovíme na základě následující úvahy. Systém průměrně obsluhuje ES zákazníků a je schopen obsluhovat n zákazníků, tedy platí:

$$\kappa = \frac{ES}{n} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} = \rho.$$

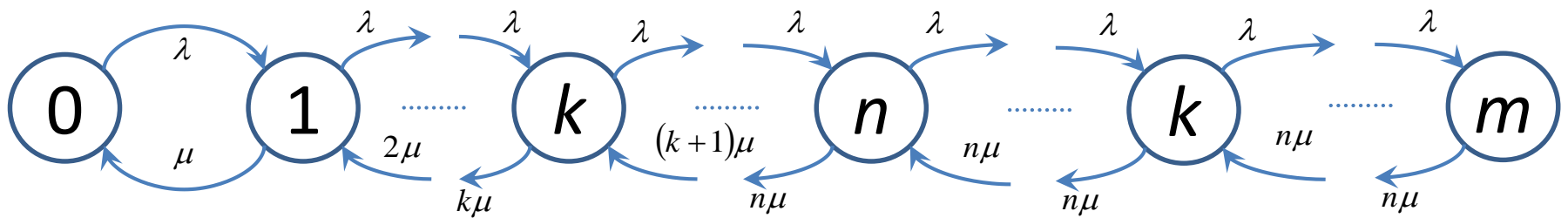
M/M/n/m SHO

- Systém je tvořen n paralelně řazenými homogenními linkami.
- Systém připouští tvorbu fronty zákazníků čekajících na obsluhu, délka fronty je omezena na $(m - n)$ míst. Nachází-li příchozí zákazník v systému m zákazníků, je odmítnut (systém je tedy vždy stabilní).
- Vstupní tok je elementární s intenzitou λ .
- Doba obsluhy zákazníka je exponenciální náhodná proměnná s parametrem μ .

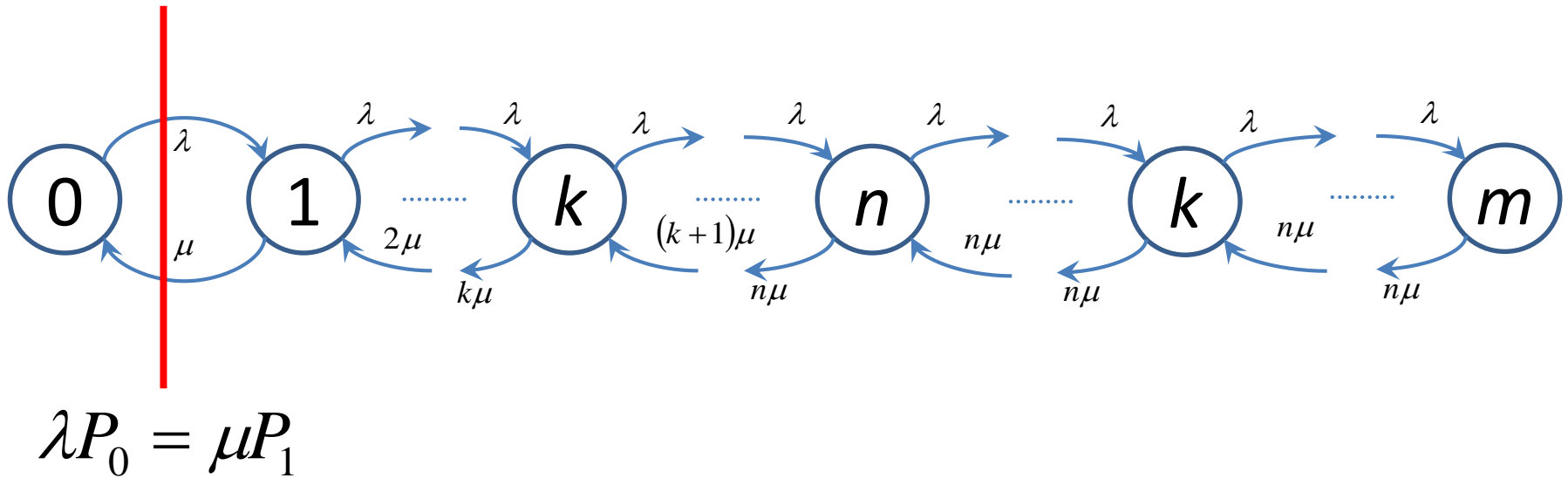
Přechodový graf $M/M/n/m$ SHO

- Systém se může nacházet ve stavech:
 - 0 – systém je prázdný.
 - 1 – v systému je 1 zákazník – 1 v obsluze, 0 ve frontě.
 - k – v systému se nachází k zákazníků, kde $k = 1, 2, \dots, n - 1$; k zákazníků je v obsluze, 0 ve frontě.
 - n – v systému je n zákazníků, všichni jsou v obsluze, fronta je prázdná.
 - k – v systému je k zákazníků, kde $k = n + 1, \dots, m - 1$; n zákazníků je v obsluze a $k - n$ ve frontě.
 - m – v systému je m zákazníků; n zákazníků je v obsluze a $m - n$ ve frontě.

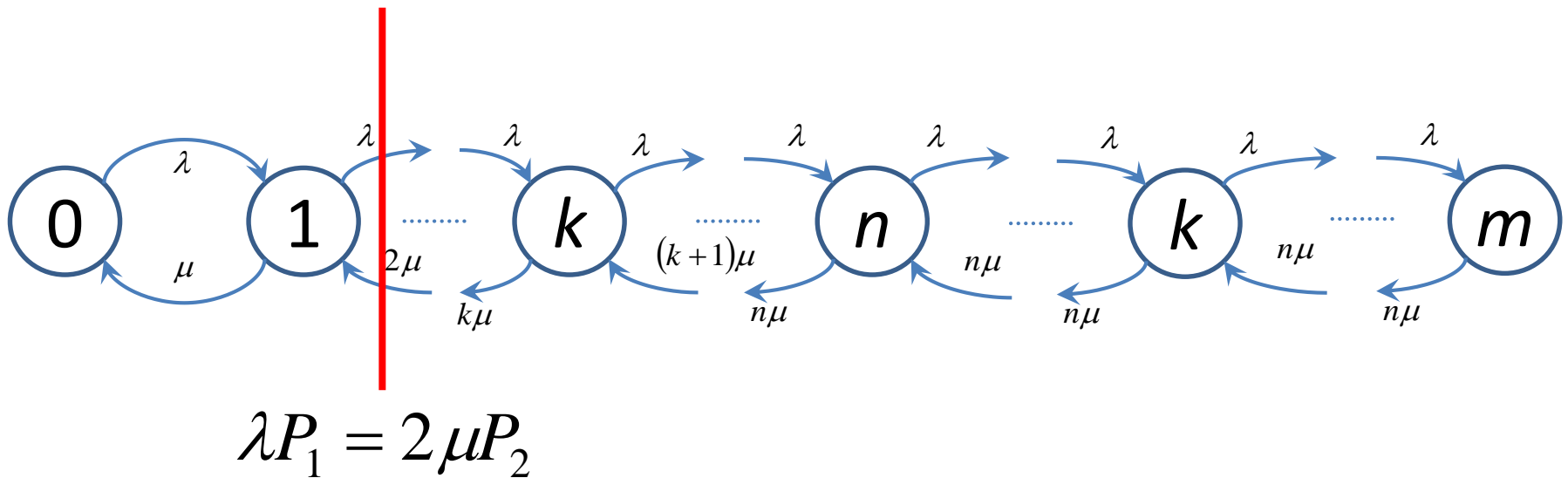
Přechodový graf M/M/n/m SHO



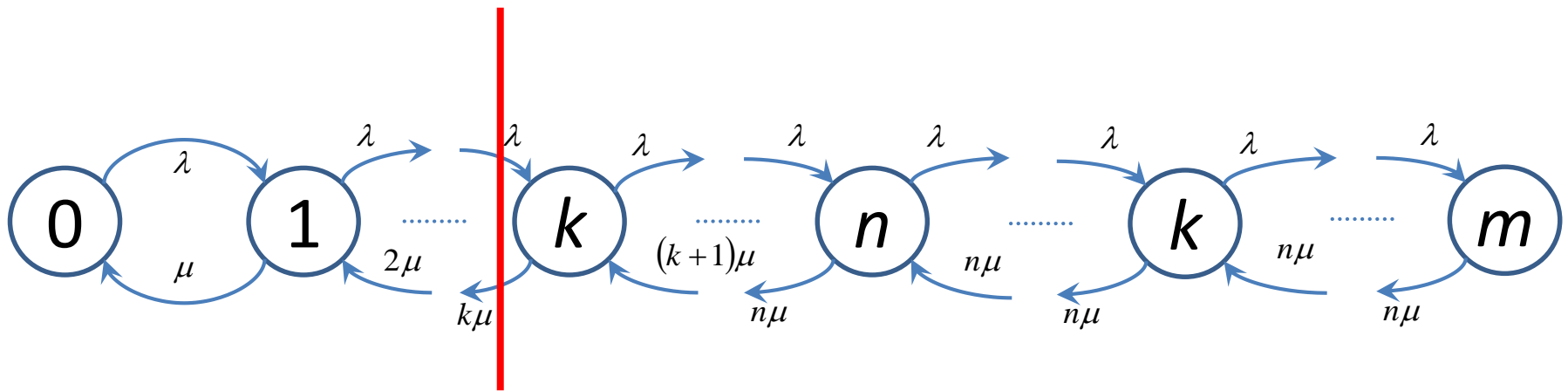
Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO



Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO

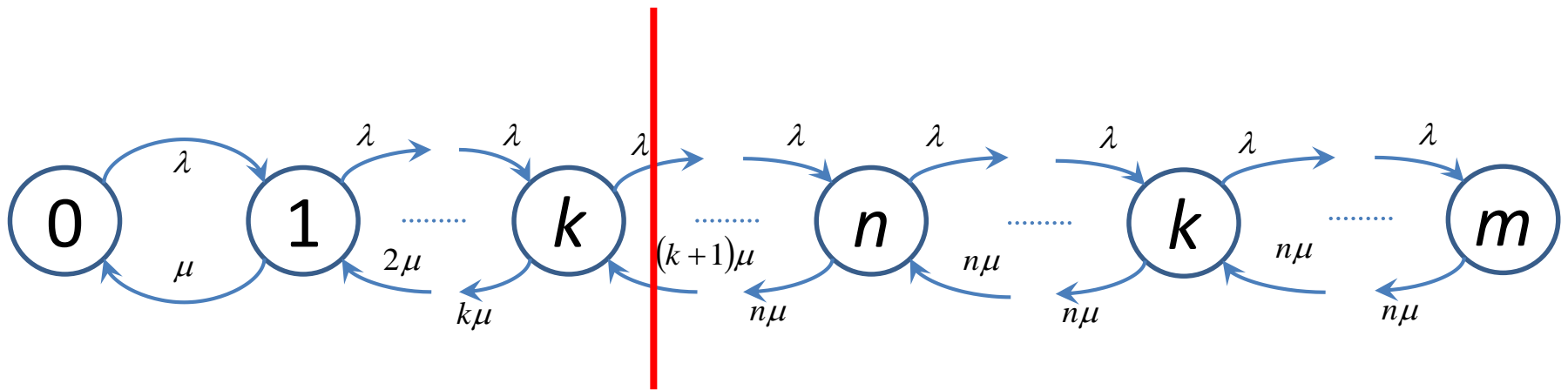


Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO



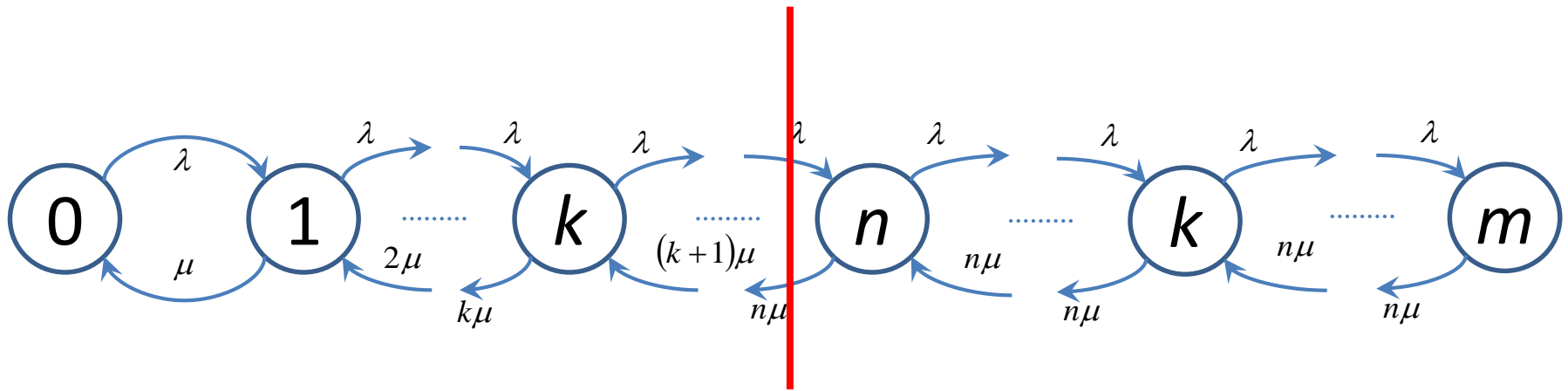
$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO



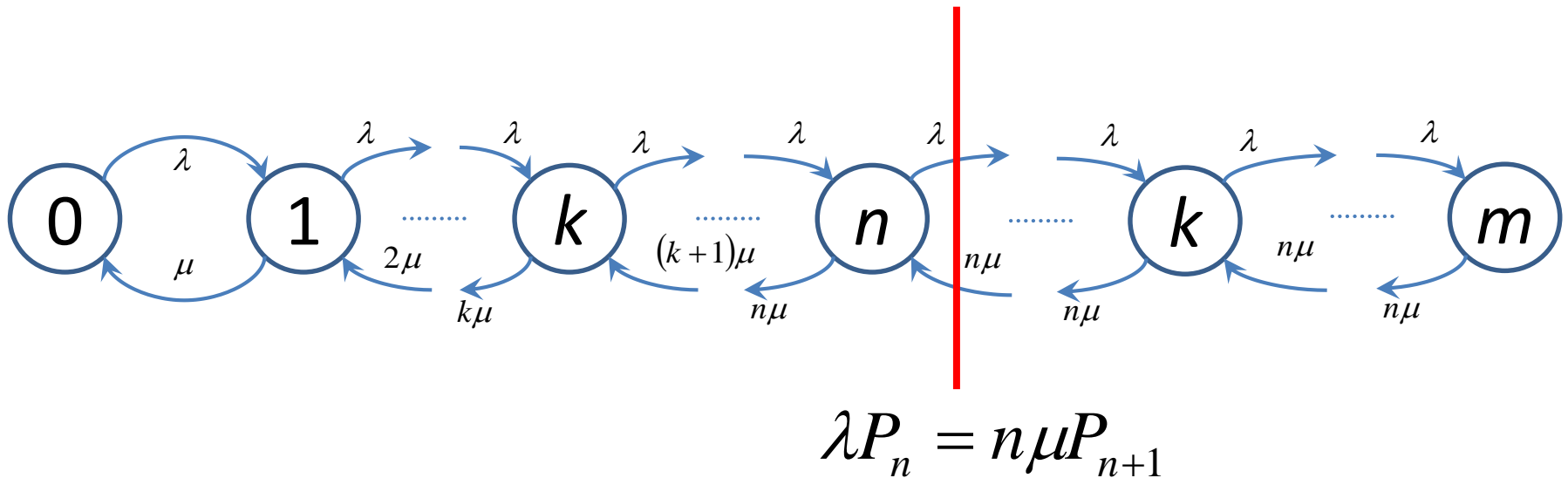
$$\lambda P_k = (k + 1)\mu P_{k+1}$$

Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO

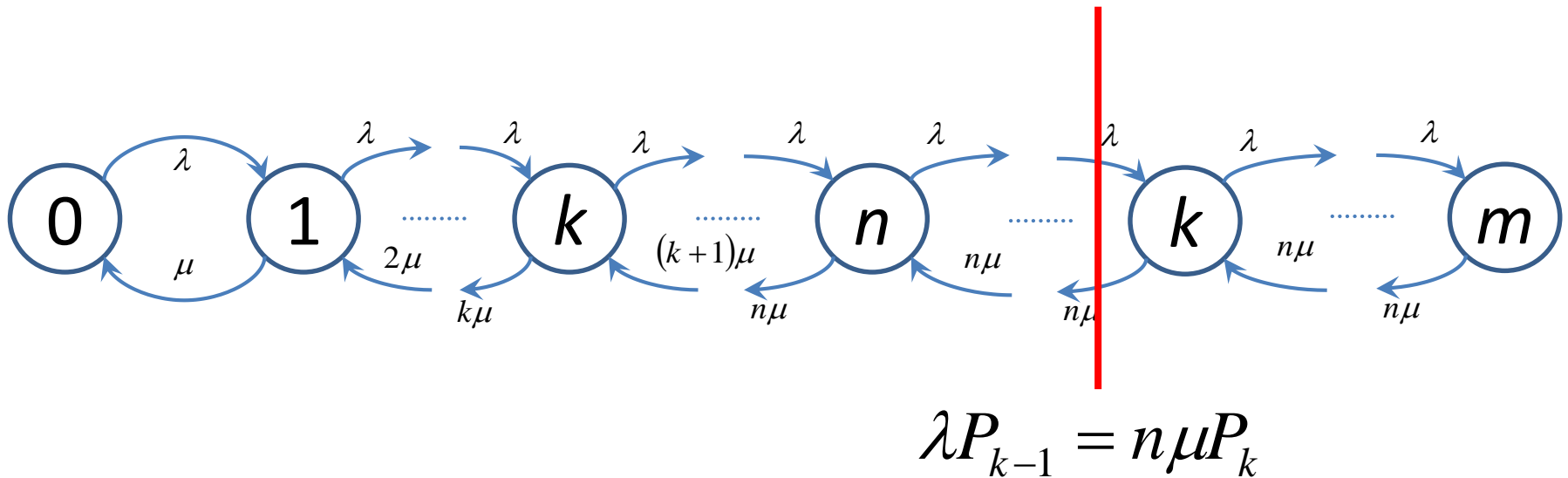


$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n$$

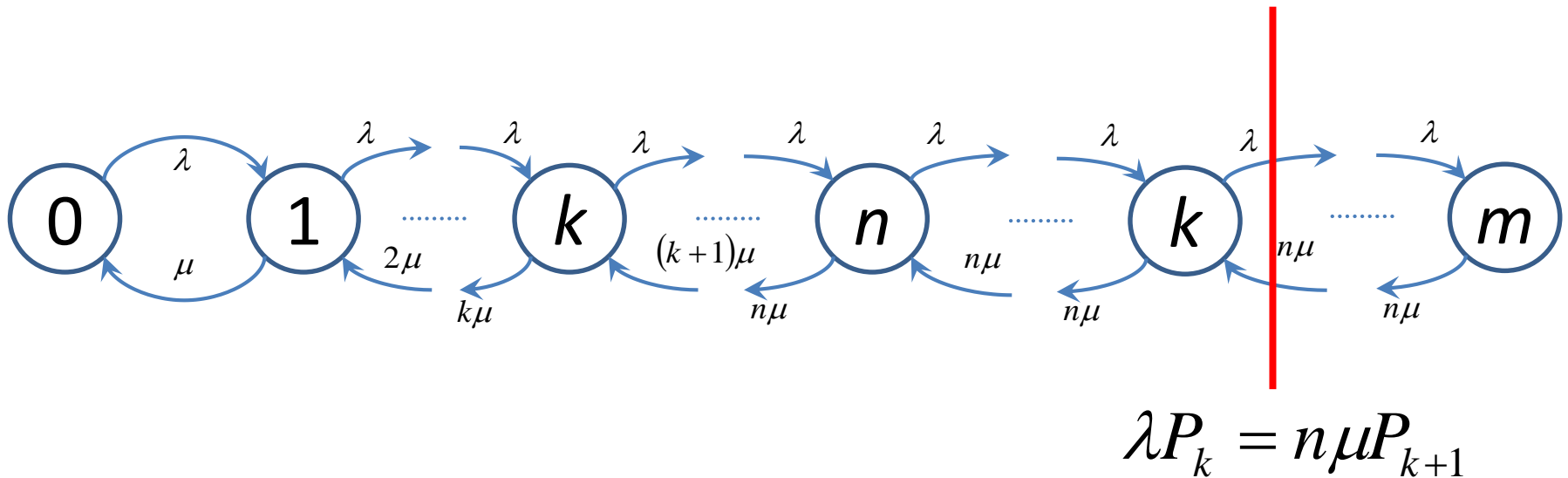
Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO



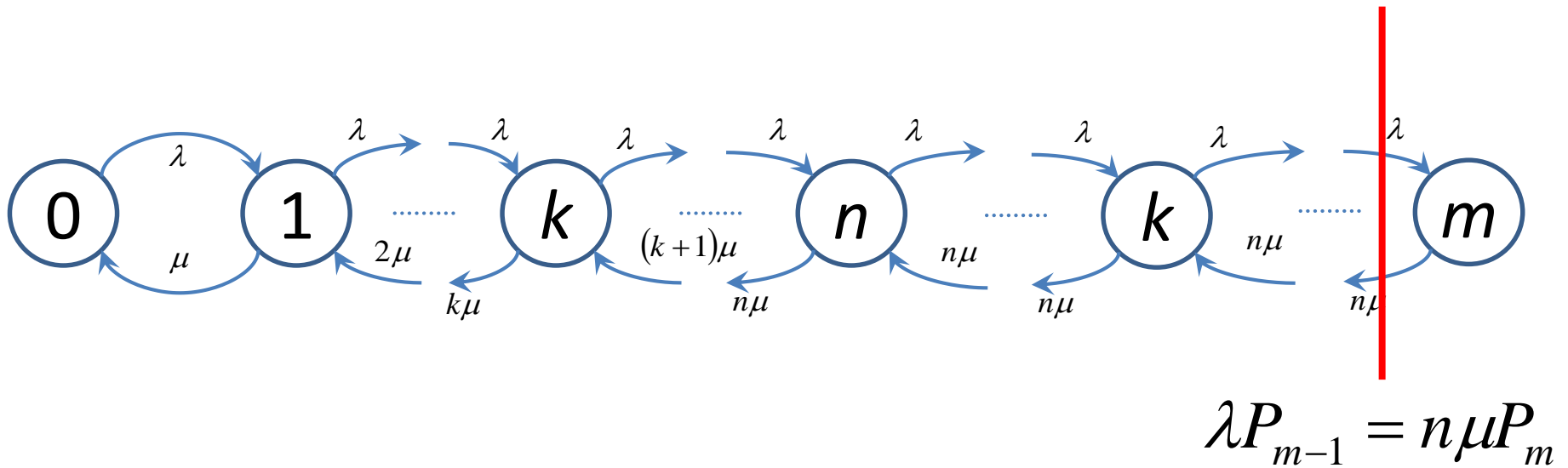
Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO



Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO



Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO



Rovnice globální rovnováhy – M/M/n/m SHO

- V tomto případě dostáváme soustavu $m+1$ lineárních rovnic s $m+1$ neznámými pravděpodobnostmi P_k , kde $k=0,1,2,\dots,m$:

$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k \text{ pro } k = 1,2,\dots,n,$$

$$\lambda P_{k-1} = n\mu P_k \text{ pro } k = n+1,\dots,m.$$

Analytické řešení M/M/n/m SHO

- Z těchto rovnic získáme přímo rekurentní vztahy:

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n ,$$

$$P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} \text{ pro } k = n, n + 1, \dots, m .$$

pozn. U druhého rekurentního vztahu uvádíme platnost i pro $k=n$, což neodpovídá příslušné rovnici globální rovnováhy. Lze se ale snadno přesvědčit (dosazením $k=n$ do prvního rekurentního vztahu), že druhý rekurentní vztah platí i v tomto případě.

Analytické řešení $M/M/n/m$ SHO

- Nyní si opět vyjádříme vztahy, pomocí kterých jsme schopni stanovit hodnotu pravděpodobnosti stavu k , kde $k=1, \dots, m$ pomocí pravděpodobnosti stavu 0. Využijeme k tomu odvozené rekurentní vztahy.

Analytické řešení M/M/n/m SHO

$$P_1 = \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3\mu} P_2 = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot \frac{\lambda}{2\mu} \cdot \frac{\lambda}{1\mu} P_0 = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

⋮

$$P_k = \frac{\lambda}{k\mu} P_{k-1} = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n$$

Analytické řešení M/M/n/m SHO

$$P_n = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$P_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} P_n = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} P_0$$

$$P_{n+2} = \frac{\lambda}{n\mu} P_{n+1} = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{1}{n^2 \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+2} P_0$$

⋮

$$P_k = \frac{\lambda}{n\mu} P_{k-1} = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} P_n = \rho^{k-n} P_n \text{ pro } k = n, n+1, \dots, m$$

$$P_k = \rho^{k-n} P_n = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{1}{n^{k-n} \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 \text{ pro } k = n, n+1, \dots, m$$

Analytické řešení M/M/n/m SHO

Pravděpodobnost P_0 opět stanovíme z normativní podmínky pravděpodobnosti.

$$P_0 + P_1 + \dots + P_k + \dots + P_n + P_{n+1} + \dots + P_m = 1$$

$$\sum_{k=0}^n P_k + \sum_{k=n+1}^m P_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 + \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{n^{k-n} \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0 = 1$$

$$P_0 \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + P_0 \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \rho \cdot \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho}} \text{ pro } \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (m-n)} \text{ pro } \rho = 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} &= \sum_{k=n+1}^m \rho^{k-n} = \\ &= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{m-n} = \rho \cdot \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} &= \sum_{k=n+1}^m \rho^{k-n} = \\ &= \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{m-n} = \rho \cdot (m-n) = \\ &= (m-n) \text{ pro } \rho = 1 \end{aligned}$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m SHO

- Pravděpodobnost odmítnutí zákazníka P_{ODM} :
 - Přicházející zákazník bude odmítnut, najde-li v okamžiku svého příchodu m zákazníků v systému (tedy jsou obsazena všechna místa v obsluze i ve frontě). Můžeme tedy psát:

$$P_{ODM} = P_m = \frac{1}{n^{m-n} \cdot n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m P_0.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m SHO

- Střední počet zákazníků v obsluze ES stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou S je počet zákazníků v obsluze. Tedy platí:

$$\begin{aligned}
 ES &= \sum_{s=0}^n sP_s = \sum_{k=0}^{n-1} kP_k + n \sum_{k=n}^m P_k = \sum_{k=0}^{n-1} s \cdot \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k P_0 + n \sum_{k=n}^m \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n} P_n = \\
 &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-2} + P_{n-1} + P_n + P_{n+1} + \dots + P_{m-1}) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_m).
 \end{aligned}$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m

SHO

$$* \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k P_0 = \frac{\lambda}{\mu} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{k-1} P_0 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (P_0 + P_1 + \dots + P_{n-2}).$$

$$\begin{aligned} ** n \sum_{k=n}^m \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n} P_n &= n P_n + n \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n} P_n = n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 + n \cdot \frac{\lambda}{n\mu} \cdot \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n-1} P_n = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-1} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{k-n-1} P_n = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_{n-1} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot \left[\left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^0 P_n + \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^1 P_n + \dots + \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^{m-n-1} P_n \right] = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot P_{n-1} + \frac{\lambda}{\mu} \cdot (P_n + P_{n+1} + \dots + P_{m-1}) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (P_{n-1} + P_n + P_{n+1} + \dots + P_{m-1}). \end{aligned}$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m SHO

- Střední počet zákazníků v obsluze ES lze také odvodit z rovnic globální rovnováhy, které sečteme:

$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k \text{ pro } k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\lambda P_{k-1} = n\mu P_k \text{ pro } k = n + 1, \dots, m.$$

$$\lambda \cdot \sum_{k=1}^n P_{k-1} + \lambda \cdot \sum_{k=n+1}^m P_{k-1} = \mu \cdot \sum_{k=1}^n k P_k + \mu \cdot \sum_{k=n+1}^m n P_k.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m SHO

- Získaný vztah upravujeme:

$$\lambda \cdot \sum_{k=1}^n P_{k-1} + \lambda \cdot \sum_{k=n+1}^m P_{k-1} = \mu \cdot \sum_{k=1}^n kP_k + \mu \cdot \sum_{k=n+1}^m nP_k,$$

$$\lambda \cdot \left(\sum_{k=1}^n P_{k-1} + \sum_{k=n+1}^m P_{k-1} \right) = \mu \cdot \left(\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^m nP_k \right),$$

$$\lambda \cdot \sum_{k=1}^m P_{k-1} = \mu \cdot \left(\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^m nP_k \right),$$

$$\lambda \cdot (P_0 + P_1 + \dots + P_{m-1}) = \mu \cdot \left(\sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^m nP_k \right).$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m SHO

- Pro ES musí z definičního vztahu pro výpočet střední hodnoty platit:

$$ES = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + \dots + (n-1) \cdot P_{n-1} + n \cdot P_n + \\ + n \cdot P_{n+1} + \dots + n \cdot P_m = \sum_{k=1}^n kP_k + \sum_{k=n+1}^m nP_k .$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m SHO

- Použitím tohoto vztahu dostáváme:

$$\lambda \cdot (P_0 + P_1 + \dots + P_{m-1}) = \mu \cdot ES.$$

- Z normativní podmínky pravděpodobnosti plyne, že výraz v závorce na levé straně musí být roven $1 - P_m$, proto dostáváme:

$$ES = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_m).$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m SHO

- Střední počet zákazníků ve frontě EL opět stanovíme podle vzorce pro výpočet střední hodnoty DNP, kde náhodnou proměnnou L je počet zákazníků ve frontě. Můžeme tedy psát:

$$EL = \sum_{l=0}^{m-n} lP_l = 0 \cdot \sum_{k=0}^n P_k + \sum_{l=1}^{m-n} lP_{n+l}.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m SHO

- Střední počet zákazníků v systému EK je roven součtu středního počtu požadavků v obsluze a středního počtu požadavků ve frontě. Můžeme tedy psát:

$$EK = ES + EL = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_m) + \sum_{l=1}^{m-n} l P_{n+l}.$$

Provozní charakteristiky M/M/n/m SHO

- Využití obslužných linek (systému) κ stanovíme na základě následující úvahy. Systém průměrně obsluhuje ES zákazníků a je schopen obsluhovat n zákazníků, tedy platí:

$$\kappa = \frac{ES}{n} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - P_m)}{n} = \rho \cdot (1 - P_m).$$