

Zadání příkladů k zápočtu z UIM/YLA

doc. RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.

Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., 2021

Příklad 1 Jsou následující tvrzení výroky, výrokové formy nebo hypotézy (popř. ani jedno z toho)?

1. Olomouc je hlavní město ČR.
2. $3 < -3$
3. $3 < x$
4. $x + 3 = 4$
5. Kolik nohou má pavouk?
6. Na Vánoce bude v Olomouci sníh.

Příklad 2 Dokažte pomocí tabulky pravdivostních hodnot, že

- a) výrok $(p \vee q)' \Leftrightarrow (p' \wedge q')$ je tautologie.
- b) výrok $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q')$ je kontradikce.

Příklad 3 Zapište symbolicky negace následujících kvantifikovaných výroků.

- a) $\forall a \in \mathbb{R}: a^2 > 0$
- b) $\exists x \in \mathbb{R}: x = \sqrt{1-x}$

Příklad 4 Uvažujme množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{-6, -5, 1, 4\}$. Určete množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Příklad 5 Zjistěte, je-li výraz definován a pokud ano, tak jej vypočítejte:

1.

$$-3 \cdot \infty + \frac{-\infty}{5} + \frac{3}{\infty},$$

2.

$$-10 \cdot \infty + \frac{1}{\infty} - \infty \cdot \infty.$$

Příklad 6 Zapište pomocí intervalů nebo sjednocení intervalů:

1. $|x| = 5,$

2. $|x| \leq 5,$

3. $|x| \geq 5.$

Příklad 7 Vypočítejte okolí bodu a graficky jej znázorněte:

1. $\mathcal{U}(1, 3)$

2. $\mathcal{U}(1, 1)$

3. $\mathcal{U}^*(1, 2)$

4. $\mathcal{U}^*(-3, 2)$

Příklad 8 Uvažujme vektorový prostor \mathbb{R}^3 a jeho tři prvky $(1, 2, 4)$, $(2, 1, 5)$, $(1, -3, 5)$. Jsou tyto vektory lineárně závislé nebo nezávislé?

Příklad 9 Uvažujme vektorový prostor \mathbb{R}^3 a jeho tři prvky $(1, 0, 4)$, $(2, 2, 5)$, $(4, 2, 13)$. Jsou tyto vektory lineárně závislé nebo nezávislé?

Příklad 10 Uvažujme následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte jejich hodnoti.

Příklad 11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vypočítejte $A \cdot B$, $A^T \cdot B$, $C \cdot B$ (pokud to rozměry matic umožňují)

Příklad 12 Vypočítejte determinanty $\det(A)$, $\det(B)$ a $\det(C)$, je-li to možné:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 13 Vypočítejte determinant $\det(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 14 Řešte soustavu lineárních rovnic

a)

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 3,$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1.$$

b)

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1,$$

$$2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0,$$

$$3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = -1.$$

c)

$$x_1 - x_3 + x_4 = 3,$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3,$$

$$-x_2 - x_4 = 0.$$

Příklad 15 Určete první čtyři členy posloupnosti $\{a_n\} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ a nakreslete příslušnou část grafu této posloupnosti. Je tato posloupnost monotónní (tj. rostoucí nebo klesající)? Je omezená? Pokud ano, tak jakými čísly (shora, zdola)?

Příklad 16 Vypočítejte limity posloupností:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{18n+4}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^8 - n^3 + 150}{1 - 3n^4}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^n}{2 \cdot 5^n - 2^n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - n + 2}{-2n^3 + 4}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - n + 3)$

Příklad 17 Rozhodněte o konvergenci/divergenci řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+6}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+6)^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^3}$