MVŠO

POSLOUPNOSTI A ŘADY

STUDIJNÍ OPORA

ČÍSELNÉ POSLOUPNOSTI A ČÍSELNÉ ŘADY

Řešené příklady

RNDr. Vladimíra MÁDROVÁ, CSc.

Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., 2021

Obsah

Číselné posloupnosti

Zadání a graf posloupnosti

Úmluva.

Termín posloupnost budeme v textu zkracovat: p - st.

Pokud tomu nebude jinak, budeme místo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ psát stručně $\{a_n\}$.

Sestrojením grafu p-sti budeme rozumět znázornění zadaného či potřebného konečného počtu členů p-sti.

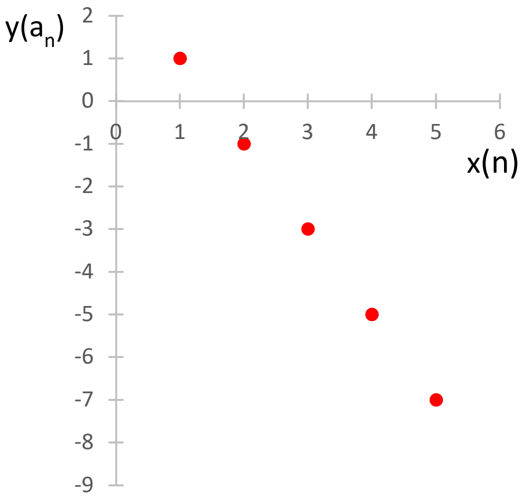
Příklad 1.1 *Nechť $a_n = 3 - 2n$. Napišme prvních 5 členů této p-sti a nakresleme její graf.*

Řešení

P-st je zadaná vzorcem pro n-tý člen. Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$; potom

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 - 2 \cdot 1 = 1 \\ a_2 &= 3 - 2 \cdot 2 = -1 \\ a_3 &= 3 - 2 \cdot 3 = -3 \\ a_4 &= 3 - 2 \cdot 4 = -5 \\ a_5 &= 3 - 2 \cdot 5 = -7 \end{aligned}$$

Výsledek: $\{3 - 2n\} = \{1, -1, -3, -5, -7, \dots\}$.



Obr 1.1 Graf p-sti {3 - 2n}

Grafem p-sti je množina izolovaných bodů ležících na přímce $y = 3 - 2x$. (Nahradili jsme n písmenem x a a_n písmenem y a získali tak rovnici přímky $y = 3 - 2x$.)

■

Příklad 1.2 *Určeme prvních 5 členů p – sti* $\left\{(-1)^n \frac{3n-1}{n}\right\}$ *a nakresleme její graf.*

Řešení

P-st je zadaná vzorcem pro n-tý člen. Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$; potom

$$a_1 = (-1)^1 = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1} = -2$$

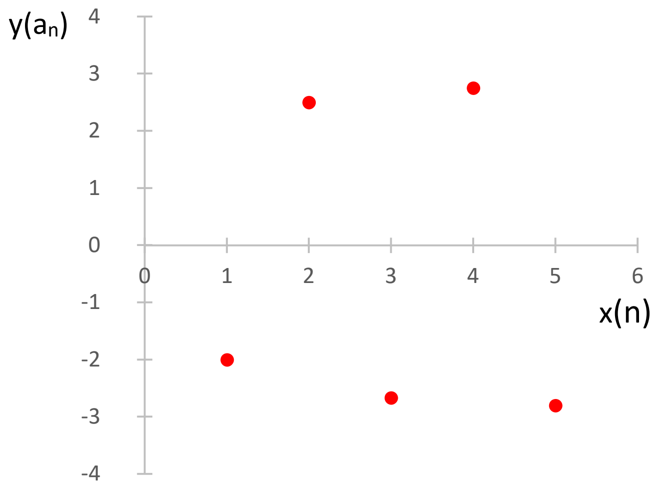
$$a_2 = (-1)^2 = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$a_3 = (-1)^3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{3} = -\frac{8}{3}$$

$$a_4 = (-1)^4 = \frac{3 \cdot 4 - 1}{4} = \frac{11}{4}$$

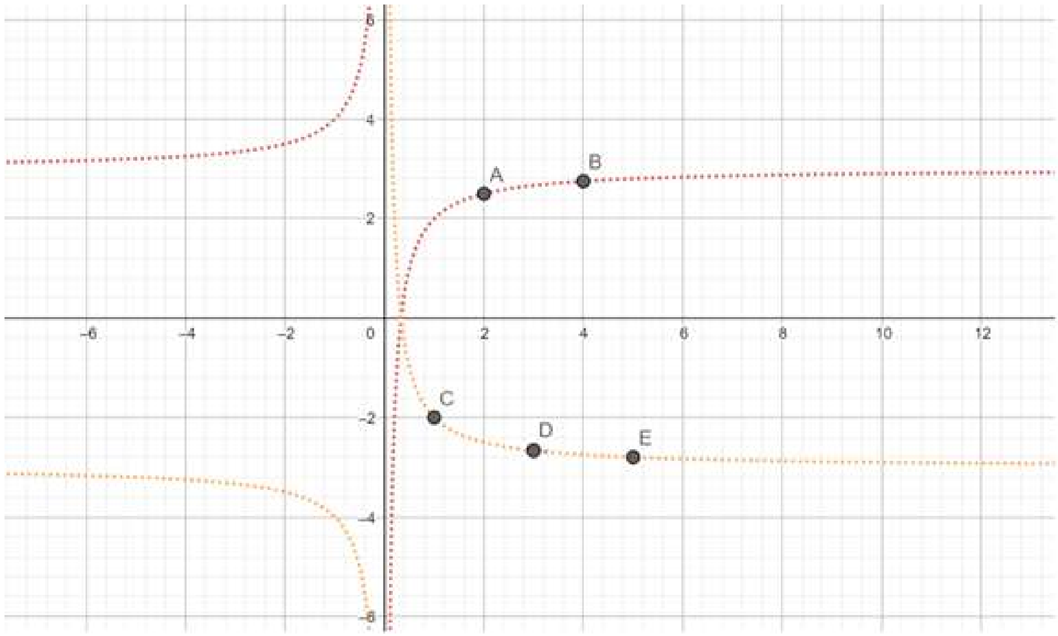
$$a_5 = (-1)^5 = \frac{3 \cdot 5 - 1}{5} = -\frac{14}{5}$$

Výsledek: $\left\{(-\mathbf{1})^{n} \frac{\mathbf{3}n-\mathbf{1}}{n}\right\} = \left\{-\mathbf{2},\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}},\ -\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}},\ \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{4}},\ -\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{5}},\ \ldots\right\}$.



Obr 1.2 Graf p-sti $\left\{(-1)^n \frac{3n-1}{n}\right\}$

Grafem p-sti jsou body, které leží vždy na jedné větvi hyperbol $y = \frac{3x-1}{x}$ a $y = \frac{1-3x}{x}$.



Obr 1. 3 Hyperboly $y = \frac{3x-1}{x}$ a $y = \frac{1-3x}{x}$

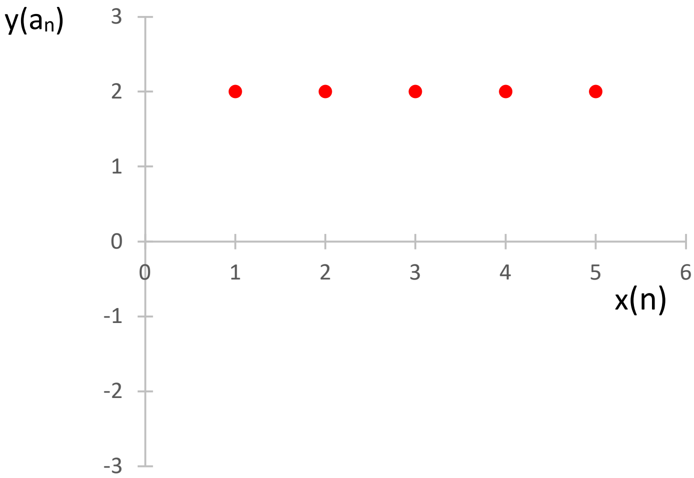
■

Příklad 1.3 *Napišme prvních 5 členů p-sti* $\{2\}_{n=1}^{\infty}$ *a nakresleme její graf.*

Řešení

P-st je zadaná vzorcem pro n-tý člen a v něm se n nevyskytuje, což znamená, že všechny členy p-sti jsou rovny číslu 2; daná p-st je stacionární (konstantní).

Výsledek: $\{2\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 2, 2, 2, 2\ , \dots\}$.



Obr. 1. 4 Graf p-sti $\{2\}_{n=1}^{\infty}$

Grafem p-sti je množina izolovaných bodů ležících na přímce $y = 2$, tj. na rovnoběžce s osou x ve vzdálenosti 2.

■

Příklad 1.4 *Určeme prvních 5 členů p-sti* $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *a nakresleme její graf.*

Řešení

P-st je zadaná vzorcem pro n-tý člen. Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$; potom

$$a_1 = \frac{1+(-1)^1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

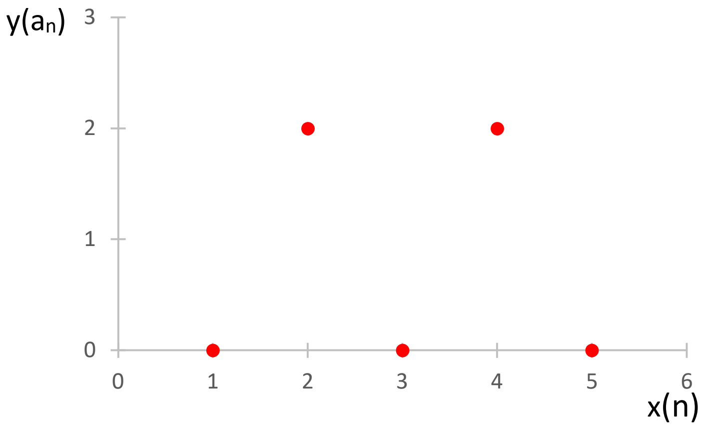
$$a_2 = \frac{1+(-1)^2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_3 = \frac{1+(-1)^3}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$a_4 = \frac{1+(-1)^4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_5 = \frac{1+(-1)^5}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Výsledek: $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\} = \{0, 2, 0, 2, 0, \dots\}$



Obr. 1.5 Graf p-sti $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Liché členy leží na ose x ($y = 0$), sudé na rovnoběžce $y = 2$ s osou x.

■

Příklad 1.5 *Určeme prvních 5 členů p-sti* $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ *a nakresleme její graf.*

Řešení

P-st je zadaná vzorcem pro n-tý člen. Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$; potom

$$a_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

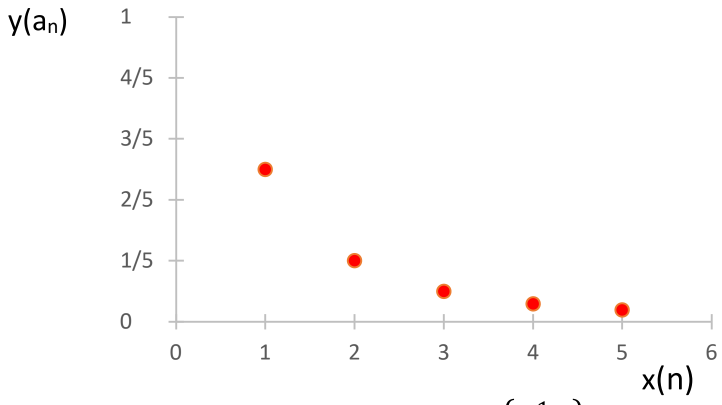
$$a_2 = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{1}{3^2+1} = \frac{1}{10}$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2+1} = \frac{1}{17}$$

$$a_5 = \frac{1}{5^2+1} = \frac{1}{26}$$

Výsledek: $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \dots\right\}$.



Obr. 1.6 Graf p-sti $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$

■

Příklad 1.6 *Určeme prvních 5 členů p-sti* $\left\{\frac{1-cos\quad\pi}{2}\right\}$ *a nakresleme její graf.*

Řešení

P-st je zadaná vzorcem pro n-tý člen. Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$; potom

$$a_1 = \frac{1-\cos\pi}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

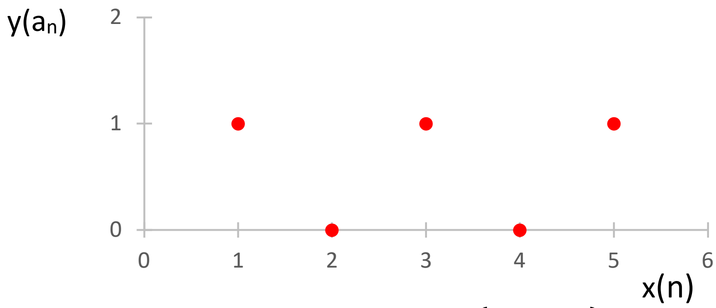
$$a_2 = \frac{1-\cos 2\pi}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$a_3 = \frac{1-\cos 3\pi}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

$$a_4 = \frac{1-\cos 4\pi}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$a_5 = \frac{1-\cos 5\pi}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

Výsledek: $\left\{\frac{1-cosn\,\pi}{2}\right\} = \{1, 0, 1, 0{,}1, \dots\}$.



Obr. 1.7 Graf p-sti $\left\{\frac{1-cosn\,\pi}{2}\right\}$

Liché členy p-sti leží na přímce $y = 1$, sudé na ose $x(y = 0)$.

■

Příklad 1.7 *Určeme prvních 5 členů p-sti* $\{2^n\}$ *a nakresleme její graf.*

Řešení

P-st je zadaná vzorcem pro n-tý člen. Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$; potom

$$a_1 = 2^1 = 2$$

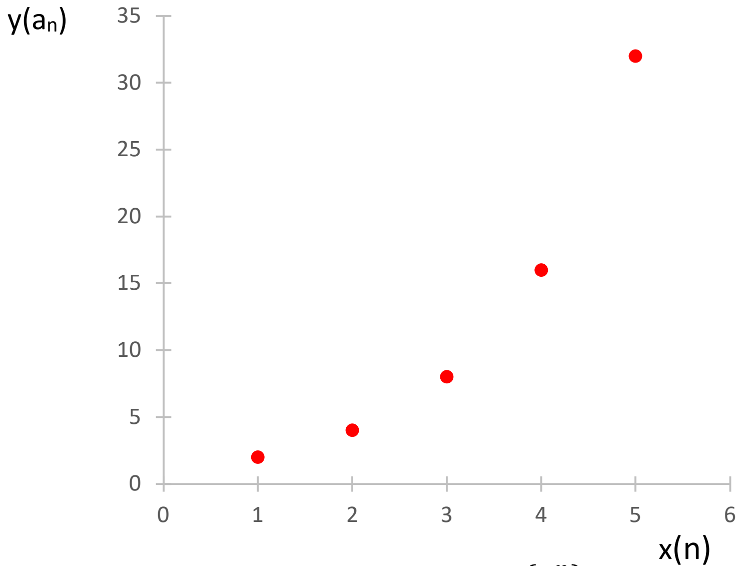
$$a_2 = 2^2 = 4$$

$$a_3 = 2^3 = 8$$

$$a_4 = 2^4 = 16$$

$$a_5 = 2^5 = 32$$

Výsledek: $\{2^n\} = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$.



Obr. 1.8 Graf p-sti $\{2^n\}$

Členy p-sti leží na exponenciále $y = 2^x$.

■

Příklad 1.8 *Napišme prvních 5 členů p-sti* $\{a_n\}$*:*

$$a_1 = -1, a_2 = 2, a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1,}\, n \geq 2.$$

Řešení

P-st je zadaná rekurentně. Za n postupně dosazujeme čísla $2, 3, 4$; potom

$$a_3 = 2a_2 - a_1 = 2 \cdot 2 - (-1) = 5$$

$$a_4 = 2a_3 - a_2 = 2 \cdot 5 - 2 = 8$$

$$a_5 = 2a_4 - a_3 = 2 \cdot 8 - 5 = 11$$

Výsledek: $\{a_n\} = \{-1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$.

Jistě jste poznali, že je to aritmetická p-st s diferencí $d = 3$ a prvním členem $a_1 = -1$.

■

Příklad 1.9 *Napišme prvních 5 členů p-sti* $\{a_n\}$*:*

$$a_1 = -2, a_{n+1} = a_n - n, n \geq 1.$$

Řešení

P-st je zadaná rekurentně. Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2. 3, 4$; potom

$$a_2 = a_1 - 1 = -2 - 1 = -3$$

$$a_3 = a_2 - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$a_4 = a_3 - 3 = -5 - 3 = -8$$

$$a_5 = a_4 - 4 = -8 - 4 = -12$$

Výsledek: $\{a_n\} = \{-2, -3, -5, -8, -12, \dots\}$.

■

Příklad 1.10 *Napišme prvních 5 členů p-sti $\{a_n\}$:*

$$a_1 = \frac{1}{6}, a_{n+1} = 3(n+1)a_n, n \geq 1.$$

Řešení

P-st je zadaná rekurentně. Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2. 3, 4$; potom

$$a_2 = 3\,(1+1)a_1 = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$a_3 = 3\,(2+1)a_2 = 9 \cdot 1 = 9$$

$$a_4 = 3\,(3+1)a_3 = 12 \cdot 9 = 108$$

$$a_5 = 3\,(4+1)a_4 = 15 \cdot 108 = 1620$$

Výsledek: $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{6}, 1, 9, 108, 1620, \ldots\right\}$.

■

Příklad 1.11 *Napišme prvních 5 členů p-sti $\{a_n\}$:*

$$a_1 = -4, a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}, n \geq 1.$$

Řešení

P-st je zadaná rekurentně. Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2. 3, 4$; potom

$$a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = 1 + \frac{2}{a_2} = 1 + \frac{2}{\frac{3}{4}} = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$

$$a_4 = 1 + \frac{3}{a_3} = 1 + \frac{3}{\frac{11}{3}} = 1 + \frac{9}{11} = \frac{20}{11}$$

$$a_5 = 1 + \frac{4}{a_4} = 1 + \frac{4}{\frac{20}{11}} = 1 + \frac{44}{20} = 1 + \frac{11}{5} = \frac{16}{5}$$

Výsledek: $\{a_n\} = \left\{-4, \frac{3}{4}, \frac{11}{3}, \frac{20}{11}, \frac{16}{5}, \ldots\right\}$.

■

Příklad 1.12 *Napišme prvních 5 členů p-sti* $\{a_n\}$*:*

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_{n-1}}, n \geq 2.$$

Řešení

P-st je zadaná rekurentně. Za n postupně dosazujeme čísla $2, 3, 4$; potom

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{a_1} = 2 - \frac{1}{1} = 1$$

$$a_4 = a_3 - \frac{1}{a_2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = a_4 - \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$$

Výsledek: $\{a_n\} = \left\{1, 2, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots\right\}$.

■

Příklad 1.13 *Napišme prvních 5 členů p-sti* $\{a_n\}$*:*

$$a_{n+1} = 3\,a_n - 2n, a_5 = 7.$$

Řešení

P-st je zadaná rekurentně a známe její člen a_5, pomocí něhož vypočítáme a_4.

Člen

$$a_5 = 3a_4 - 2 \cdot 4$$
$$7 = 3a_4 - 8$$
$$3a_4 = 15 \Rightarrow a_4 = 5$$

Dále

$$a_4 = 3a_3 - 2 \cdot 3$$
$$5 = 3a_3 - 6$$
$$3a_3 = 11 \Rightarrow a_3 = \frac{11}{3}$$

Potom

$$a_3 = 3a_2 - 2 \cdot 2$$
$$\tfrac{11}{3} = 3a_2 - 4$$
$$3a_2 = \frac{23}{3} \Rightarrow a_2 = \frac{23}{9}$$

Dále

$$a_2 = 3a_1 - 2 \cdot 1$$
$$\tfrac{23}{9} = 3a_1 - 2$$
$$3a_1 = \frac{41}{9} \Rightarrow a_1 = \frac{41}{27}$$

Výsledek: $\{a_n\} = \left\{\frac{41}{27}, \frac{23}{9}, \frac{11}{3}, 5, 7, \dots\right\}$.

■

Příklad 1.14 *Napišme prvních 5 členů p-sti* $\{a_n\}$*:*

$$a_{n+1} = a_{n-1} + n\, a_n, a_4 = -3, a_3 = 2.$$

Řešení

P-st je zadaná rekurentně a známe její členy a_4 a a_3, pomocí nichž vypočítáme člen a_2.

Člen

$$a_4 = a_2 + 3 \cdot a_3$$
$$-3 = a_2 + 3 \cdot 2 \Rightarrow a_2 = -9$$

Dále

$$a_3 = a_1 + 2 \cdot a_2$$
$$2 = a_1 + 2 \cdot (-9) \Rightarrow a_1 = 20$$

Potom

$$a_5 = a_3 + 4 \cdot a_4$$
$$a_5 = 2 + 4 \cdot (-3) \Rightarrow a_5 = -10$$

Výsledek: $\{a_n\} = \{20, -9, 2, -3, -10, \dots\}$.

■

Příklad 1.15 *Určeme člen* a_n *posloupnosti* $\{-1, 1, -1, 1 - 1, \dots\}$.

Řešení

Všimněme si, že jednotlivé členy p – sti jsou mocniny čísla -1.

Výsledek: $a_n = (-1)^n$.

■

Příklad 1.16 *Určeme člen a_n posloupnosti* $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right\}$.

Řešení

V čitateli jsou postupně rostoucí přirozená čísla, ve jmenovateli je přirozené číslo o jedničku větší než v čitateli.

Výsledek: $a_n = \frac{n}{n+1}$.

■

Příklad 1.17 *Určeme člen a_n posloupnosti* $\left\{1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots\right\}$.

Řešení

Ve jmenovatelích jsou druhé mocniny přirozených čísel a střídají se znaménka.

Výsledek: $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

■

Příklad 1.18 *Určeme člen a_n posloupnosti* $\left\{27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \dots\right\}$*:*

Řešení

Členy jsou mocniny čísla 3.

Výsledek: $a_n = 3^{4-n}$.

■

Příklad 1.19 *Přepišme následující rekurentní vzorec pro člen $a_n = n \cdot a_{n-1}$ tak, aby udával vztah pro členy a_5, a_{n+2}, a_{n-1}.*

Řešení

Za n postupně dosazujeme $5, n+2, n-1$.

$$a_5 = 5 \cdot a_{5-1} = 5 \cdot a_4$$

$$a_{n+2} = (n+2) \cdot a_{n+2-1} = (n+2) \cdot a_{n+1}$$

$$a_{n-1} = (n-1) \cdot a_{n-1-1} = (n-1) \cdot a_{n-2}$$

Výsledek: $a_5 = 5a_4,\ a_{n+2} = (n+2)a_{n+1},\ a_{n-1} = (n-1)a_{n-2}$.

■

Příklad 1.20 *Přepišme následující rekurentní vzorec pro člen* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n$ *tak, aby udával vztah pro členy* a_5, a_{n+2}, a_{n-1}.

Řešení

Za n postupně dosazujeme $5, n+2, n-1$.

$$a_5 = a_4 + a_3 + 5$$
$$a_{n+2} = a_{n+2-1} + a_{n+2-2} + n + 2 = a_{n+1} + a_n + n + 2$$
$$a_{n-1} = a_{n-1-1} + a_{n-1-2} + n - 1 = a_{n-2} + a_{n-3} + n - 1$$

Výsledek: $a_5 = a_4 + a_3 + 5, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n + 2, a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} + n - 1$.

■

Příklad 1.21 *Přepišme následující rekurentní vzorec pro člen* $a_{n+1} = 1 + \frac{2n}{a_n}$ *tak, aby udával vztah pro členy* a_5, a_{n+2}, a_{n-1}.

Řešení

Za n postupně dosazujeme $4, n+1, n-2$.

$$a_5 = 1 + \frac{2 \cdot 4}{a_4} = 1 + \frac{8}{a_4}$$
$$a_{n+1+1} = a_{n+2} = 1 + \frac{2 \cdot (n+1)}{a_{n+1}}$$
$$a_{n-2+1} = a_{n-1} = 1 + \frac{2 \cdot (n-2)}{a_{n-2}}$$

Výsledek: $a_5 = 1 + \frac{8}{a_4}, a_{n+2} = 1 + \frac{2\,(n+1)}{a_{n+1}}, a_{n-1} = 1 + \frac{2\,(n-2)}{a_{n-2}}$.

■

Příklad 1.22 *Zapišme členy* a_{n-1}, a_{n+1} *a určeme* $a_n + 1$ *a* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, *je-li člen* $a_n = \frac{2^n}{n^2}$.

Řešení

$$a_{n-1} = \frac{2^{n-1}}{(n-1)^2}$$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$$

Srovnej člen a_{n+1} a výraz $a_n + 1$!

$$a_n + 1 = \frac{2^n}{n^2} + 1 = \frac{2^n + n^2}{n^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$$

■

Příklad 1.23 *Definujme rekurentně p-st* $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Řešení

$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right\}$.

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{a_n}$

Potom

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + 1} = \frac{1}{\frac{1 + a_n}{a_n}} = \frac{a_n}{1 + a_n}, a_1 = 1$$

Ověříme pro několik prvních členů.

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$$a_3 = \frac{a_2}{1 + a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{1 + \frac{1}{a_3}} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4} \ \ atd.$$

Výsledek: Rekurentní vzorec pro p-st $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$, $a_1 = 1$.

■

Poznámka.

Nejčastěji bývá p-st zadaná symbolicky, tj. vzorcem pro n-tý člen. „Uhodnout“ funkční vzorec pro $\mathrm{a_n}$ z rekurentního vzorce či výčtu členů p-sti se podaří jen v jednoduchých případech.

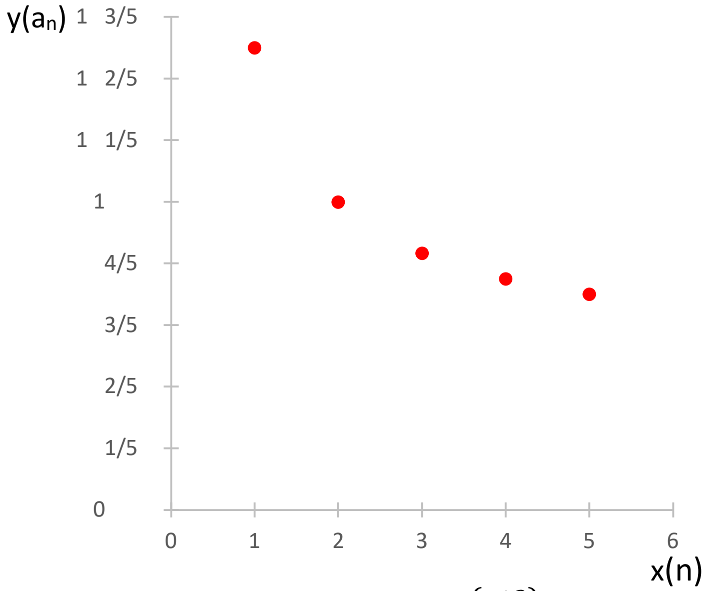
Vlastnosti posloupnosti

Příklad 1.24 *Zjistěme, zda je p-st* $\left\{\frac{n+2}{2n}\right\}$ *monotónní a omezená.*

Řešení

Vypočítáme prvních pět členů p-sti a nakreslíme její graf. Užitečné bývá určit také některý z členů s velkým indexem, např. $n = 100,\ n = 1000$ apod.

$$\left\{\frac{n+2}{2n}\right\} = \left\{\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}, \dots, \frac{102}{200}, \dots \frac{1002}{2000}, \dots\right\}$$



Obr. 1.9 Graf p-sti $\left\{\frac{n+2}{2n}\right\}$

Ze znalosti členů a grafu dané p-sti usoudíme, že p-st je klesající. Tuto naši domněnku však musíme dokázat. Přesvědčíme se, zda pro všechna $n \in N$ je

$$a_n > a_{n+1},$$

tj. $$\frac{n+2}{2n} > \frac{(n+1)+2}{2(n+1)} = \frac{n+3}{2(n+1)} \qquad / \cdot 2n(n+1) > 0$$

$$(n+2)(n+1) > (n+3)n$$

$$n^2 + 3n + 2 > n^2 + 3n$$

$$2 > 0 \text{ , což platí,}$$

tím je důkaz toho, že p-st $\left\{\frac{n+2}{2n}\right\}$ je klesající, a tedy ryze monotónní a také monotónní proveden.

Vzhledem k tomu, že je daná p-st klesající, je shora omezená členem $a_1 = \frac{3}{2}$. Výpočtem několika členů s velkým indexem n odhadneme číslo, kterým je p-st omezena zdola. Z členů p-sti $a_{100} = \frac{102}{200}$ a $a_{1000} = \frac{1002}{1000}$ lze usoudit, že $a_n > \frac{1}{2}$ pro všechna $n \in N$.

Přesvědčíme se tedy, že pro každé $n \in N$ je:

$$a_n \leq \frac{3}{2} \qquad \text{a} \qquad a_n > \frac{1}{2}$$

$$\frac{n+2}{2n} \leq \frac{3}{2} \qquad\qquad \frac{n+2}{2n} > \frac{1}{2}$$

$$n + 2 \leq 3n \qquad\qquad n + 2 > n$$

$$2n \geq 2 \qquad\qquad 2 > 0$$

$$n \geq 1$$

Dokazované nerovnosti jsou splněny pro všechna $n \in N$. Dokázali jsme, že pro všechna $n \in N$ je $\frac{1}{2} < a_n \leq \frac{3}{2}$, což znamená, že p-st je omezená shora i zdola, a proto je omezená.

Závěr: P-st $\left\{\frac{n+2}{2n}\right\}$ je monotónní, a to ryze monotónní – klesající, a omezená.

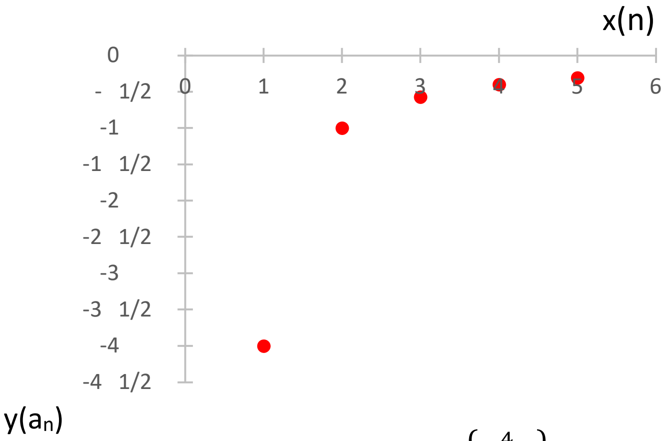
■

Příklad 1.25 *Zjistěme, zda je p-st* $\left\{\frac{4}{2-3n}\right\}$ *monotónní a omezená.*

Řešení

Vypočítáme prvních 5 členů p-sti, člen a_{100} a a_{1000}; načrtneme graf.

$$\left\{\frac{4}{2-3n}\right\} = \left\{-4, -1, -\frac{4}{7}, -\frac{2}{5}, -\frac{4}{13}, \dots, -\frac{4}{298}, \dots, -\frac{4}{2998}, \dots\right\}$$



Obr. 1.10 Graf p-sti $\left\{\frac{4}{2-3n}\right\}$

Ze znalosti členů a grafu dané p-sti usoudíme, že p-st je rostoucí. Tuto naši domněnku však musíme dokázat.

Přesvědčíme se, zda pro všechna $n \in N$ je $a_n < a_{n+1}$, tj.

$$\frac{4}{2-3n} < \frac{4}{2-3(n+1)} = \frac{4}{-3n-1} \qquad /\frac{1}{4} \cdot (2-3n)(-3n-1) > 0$$

$$-3n - 1 < 2 - 3n$$

$-1 < 2$, což platí

Tím je důkaz toho, že p-st $\left\{\frac{4}{2-3n}\right\}$ je rostoucí, a tedy ryze monotónní a také monotónní proveden.

Vzhledem k tomu, že je daná p-st rostoucí, je zdola omezená členem $a_1 = -4$. Z členů p-sti $a_{100} = -\frac{4}{298}$ a $a_{1000} = -\frac{4}{2998}$ lze usoudit, že $a_n < 0$ pro každé $n \in N$.

Přesvědčíme se tedy, že pro každé $n \in N$ je

$a_n \geq -4$ a $a_n < 0$

$$\frac{4}{2-3n} \geq -4 \qquad /\cdot \frac{1}{4}(2-3n) < 0$$

$$1 \leq -1(2-3n)$$

$$1 \leq -2 + 3n$$

$$3n \geq 3$$

$$n \geq 1$$

$$\frac{4}{2-3n} < 0 \qquad /\cdot (2-3n) < 0$$

$$4 > 0$$

Dokazované nerovnosti jsou splněny pro všechna $n \in N$. Dokázali jsme, že pro všechna $n \in N$ je $-4 \leq a_n < 0$, což znamená, že p-st je omezená zdola i shora, a proto je omezená.

Závěr: P-st $\left\{\frac{4}{2-3n}\right\}$ je monotónní, a to ryze monotónní – rostoucí a omezená.

■

Příklad 1.26 *Zjistěme, zda je p-st* $\left\{n + \frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ *monotónní a omezená.*

Řešení

Vypočítáme prvních 6 členů p-sti.

$$a_1 = 1 + \frac{1+(-1)^1}{2} = 1 + 0 = 1$$

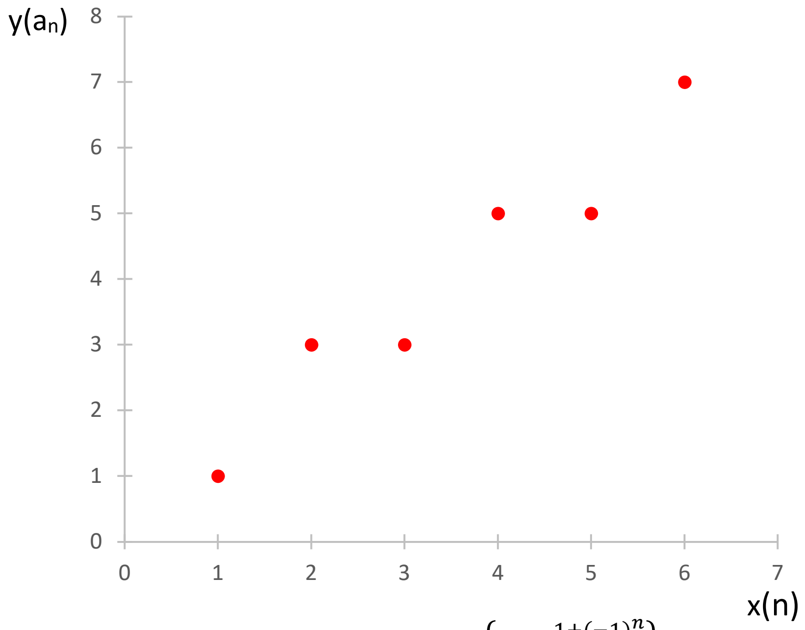
$$a_2 = 2 + \frac{1+(-1)^2}{2} = 2 + 1 = 3$$

$$a_3 = 3 + \frac{1+(-1)^3}{2} = 3 + 0 = 3$$

$$a_4 = 4 + \frac{1+(-1)^4}{2} = 4 + 1 = 5$$

$$a_5 = 5 + \frac{1+(-1)^5}{2} = 5 + 0 = 5$$

$$a_6 = 6 + \frac{1+(-1)^6}{2} = 6 + 1 = 7$$



Obr. 1.11 Graf p-sti $\left\{n+\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$

Roste-li n, pak členy p-sti buď také rostou nebo zůstanou stejné. Dá se tedy usoudit, že p-st je neklesající.

Přesvědčíme se, zda pro všechna $n \in N$ je

$$a_n \leq a_{n+1}$$

$$n+\frac{1+(-1)^n}{2} \leq n+1+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \qquad / \cdot 2$$

$$1+(-1)^n \leq 2+1+(-1)^{n+1}$$

$$(-1)^n \leq 2+(-1)^{n+1}$$

$$(-1)^n-(-1)^{n+1} \leq 2$$

$$(-1)^n[1-(-1)] \leq 2$$

$$(-1)^n \cdot 2 \leq 2$$

$$(-1)^n \leq 1$$

což platí pro každé $n \in N$, protože $(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ pro sudá n, tj. } (-1)^n = 1 \\ -1 \text{ pro lichá n, tj. } (-1)^n < 1. \end{cases}$

Tím, je důkaz toho, že p-st je neklesající, tedy monotónní, proveden.

Poněvadž je p-st neklesající, je omezená zdola číslem $a_1 = 1$.

Pro každé $n \in N$ je

$$a_n \geq 1$$

$$n + \frac{1 + (-1)^n}{2} \geq 1$$

$$2n + 1 + (-1)^n \geq 2$$

n liché:

$$2n + 1 - 1 \geq 2$$

$$n \geq 1$$

n sudé:

$$2n + 1 + 1 \geq 2$$

$$n \geq 0$$

Dokazovaná nerovnost je splněna pro všechna $n \in N$. Shora p-st omezená není, je omezená pouze zdola, není tedy omezená:

Závěr: *P-st* $\left\{n + \frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ *je monotónní, a to neklesající, není omezená.*

■

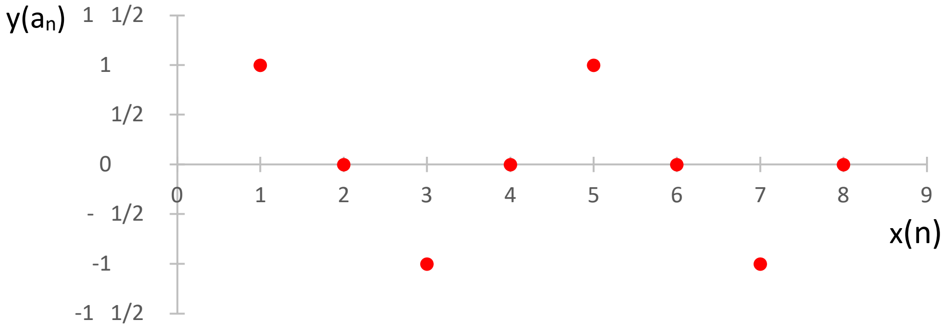
Příklad 1.27 *Zjistěme, zda je p-st* $\left\{sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ *monotónní a omezená.*

Řešení

Vypočteme 8 prvních členů p-sti.

$$\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\} = \left\{\sin\frac{\pi}{2}, \sin\pi, \sin\frac{3\pi}{2}, \sin 2\pi, \sin\frac{5\pi}{2}, \sin 3\pi, \sin\frac{7\pi}{2}, \sin 4\pi, \dots\right\} =$$

$$= \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$$



Obr. 1.12 Graf p-sti $\left\{sin\frac{n\pi}{2}\right\}$

Posloupnost není monotónní, protože např. $a_2 > a_3$ a $a_3 < a_4$.

Z vlastností funkce sinus dostaneme, že platí $\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right| \leq 1$, tj. $-1 \leq \sin\frac{n\pi}{2} \leq 1$, pro ∀ n ∈ N.

Závěr: P-st $\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ není monotónní a je omezená.

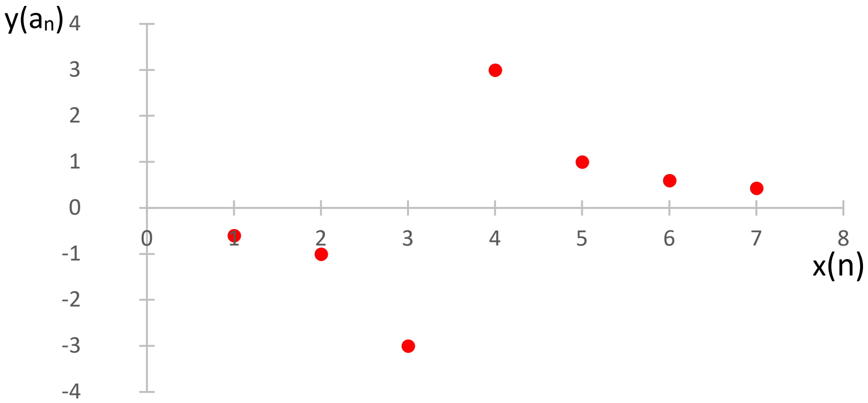
■

Příklad 1.28 *Zjistěme, zda je p-st* $\left\{\frac{3}{2n-7}\right\}$ *monotónní a omezená.*

Řešení

Určíme několik prvních členů p-sti.

$$\left\{\frac{3}{2n-7}\right\} = \left\{-\frac{3}{5}, -1, -3, 3, 1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \dots\right\}$$



Obr. 1. 12. Graf p-sti $\left\{\frac{3}{2n-7}\right\}$

P-st není monotónní, protože např. $a_2 > a_3$ a $a_3 < a_4$.

Počínaje členem a_4 je p-st zřejmě klesající – ověříme.

Pro ∀ $n \geq 4$ je

$a_{n+1} < a_n$ a $a_n > 0$

$\frac{3}{2(n+1)-7} < \frac{3}{2n-7}$ $\qquad$ $\frac{3}{2n-7} > 0 \quad /.\frac{1}{3}(2n-7) > 0$

$\frac{3}{2n-5} < \frac{3}{2n-7} \quad /.\frac{1}{3}(2n-5)(2n-7) > 0$ $\qquad$ 2n – 7 > 0

$2n-7 < 2n-5$ $\qquad$ $2n > 7$

$-7 < -5, \textit{což platí}$ $\qquad$ $n > \frac{7}{2}$

Z grafu i členů p-sti usuzujeme, že je p-st omezená. Pro $\forall\, n \in N$ je $-3 \leq a_n \leq 3$ – ověříme.

$-3 \leq \frac{3}{2n-7} \leq 3 \;/ : 3$

$-1 \leq \frac{1}{2n-7} \leq 1$

$-1 \leq \frac{1}{2n-7} \leq 1 \;/ .\,(2n-7) > 0 \Leftrightarrow n > \frac{7}{2}$

$-2n + 7 \leq 1 \leq 2n - 7$

$-2n + 7 \leq 1 \wedge 1 \;\leq 2n - 7$

$2n \geq 6 \wedge 2n \geq 8$

$n \geq 3 \wedge n \geq 4$

$n \geq 4$

Nerovnost $-3 \leq \frac{3}{2n-7} \leq 3$
je splněna pro $n \geq 4$.

$-1 \leq \frac{1}{2n-7} \leq 1 \;/ .\,(2n-7) < 0 \Leftrightarrow n < \frac{7}{2}$

$-2n + 7 \geq 1 \geq 2n - 7$

$-2n + 7 \geq 1 \wedge 1 \;\geq 2n - 7$

$2n \leq 6 \wedge 2n \leq 8$

$n \leq 3 \wedge n \leq 4$

$n \leq 3$

Nerovnost $-3 \leq \frac{3}{2n-7} \leq 3$
je splněna pro $n = 1, 2, 3$.

Nerovnost $-3 \leq \frac{3}{2n-7} \leq 3$ je splněna pro všechna $n \in N$.

Závěr: P-st $\left\{\frac{3}{2n-7}\right\}$ není monotónní a je omezená.

■

Příklad 1.29 *Dokažme, že p-st* $\{a_n\} = \left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ *je klesající.*

Řešení

Je-li klesající, pak $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0$ pro $\forall\, n \in N$.

Stačí ukázat, že rozdíl $a_{n+1} - a_n < 0$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)(n^2+1) - n\,(n^2 + 2n + 1 + 1)}{[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1)} =$$

$$= \frac{n^3 + n^2 + n + 1 - n^3 - 2n^2 - 2n}{[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1)} = \frac{1 - n - n^2}{[(n+1)^2 + 1](n^2 + 1)} < 0,$$

protože čitatel zlomku $1 - n - n^2 < 0$ a jmenovatel zlomku je kladný, poněvadž $(n+1)^2 + 1 > 0$ a $n^2 + 1 > 0$.
Tím je důkaz proveden.

Výpočet limit

Poznámka.
Limita p–sti se určuje vždy pro $n \longrightarrow \infty$, proto místo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ můžeme psát stručně $\lim a_n$.

Připomínáme: Přehled limit význačných p-stí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad [1]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad [2]$$

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 \; pro \; |a| < 1 \\ 1 \; pro \; a = 1 \\ +\infty \; pro \; a > 1 \\ neexistuje \; pro \; a \leq -1 \end{cases} \qquad [3]$$

Člen a_n posloupnosti je mnohočlen

Postup řešení
Výsledkem je vždy nevlastní limita. Můžeme ji obdržet přímým výpočtem, pokud jsou operace s nevlastními čísly definovány. Pokud při výpočtu dospějeme k neurčitému výrazu $\infty - \infty$, pak jej odstraníme tak, že vytkneme nejvyšší mocninu n.

Příklad 1.30 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}(5n^4+3n^3-7)$.

Řešení

$\lim\limits_{n\to\infty}(5n^4+3n^3-7)=5\cdot\infty^4+3\cdot\infty^3-7=5\cdot\infty+3\cdot\infty-7=\infty+\infty-7=+\infty$

Operace s nevlastními čísly byly definovány, nevlastní limitu $+\infty$ jsme obdrželi přímým výpočtem.

■

Příklad 1.31 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(253n^3-0{,}1n^2+\frac{1}{100}n\right)$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(253n^3-0{,}1n^2+\frac{1}{100}n\right)=253\cdot\infty^3-0{,}1\cdot\infty^2+\frac{1}{100}\infty=\infty-\infty+\infty=(\infty-\infty)$$

Obdrželi jsme neurčitý výraz.

Vytkneme nejvyšší mocninu n, tj. n^3a užijeme vzorec [1], potom

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^3\left(253-\frac{0{,}1}{n}+\frac{1}{100n^2}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}n^3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(253-0{,}1\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{n^2}\right)=$$
$$=\infty^3\cdot\left(253-0{,}1\cdot0+\frac{1}{100}\cdot0\right)=\infty\cdot253=+\infty$$

■

Poznámka.

Jistě jste si všimli, že po vytknutí nejvyšší mocniny n jsme v závorce kromě koeficientu (konstanty) u této mocniny n obdrželi nulové limity. Je tedy zřejmé, že výsledky výpočtu limity tohoto typu p-sti můžeme psát ihned. Limita je vždy nevlastní; je to nekonečno opatřené stejným znaménkem jaké má koeficient u nejvyšší mocniny čísla n.

Příklad 1.32 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}(-5n^4+3n+10^{10})$.

Řešení

Výpočtem:

$$\lim_{n\to\infty}(-5n^4+3n+10^{10})=(-\infty+\infty)=\lim_{n\to\infty}\left[n^4\left(-5+\frac{3}{n^3}+\frac{10^{10}}{n^4}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^4\cdot\lim_{n\to\infty}\left(-5+\frac{3}{n^3}+\frac{10^{10}}{n^4}\right)=+\infty(-5+3\cdot0+10^{10}\cdot0)=$$

$$=+\infty\cdot(-5)=-\infty$$

Stručně: U nejvyšší mocniny n, tj. u n^4, je koeficient -5, proto je výsledná limita $-\infty$.

■

Příklad 1.33 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n}-3\sqrt{n}+10\right)$.

Řešení

Výpočtem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n}-3\sqrt{n}+10\right)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{4}}-3n^{\frac{1}{2}}+10\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n^{\frac{1}{2}}\left(n^{-\frac{1}{4}}-3+10n^{-\frac{1}{2}}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}-3+\frac{10}{n^{\frac{1}{2}}}\right)=+\infty\cdot(0-3+0)=-\infty$$

Stručně: Koeficient u nejvyšší mocniny n, tj. u $n^{\frac{1}{2}}$, je -3, proto je výsledná limita $-\infty$.

■

Příklad 1.34 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{n^{-\frac{3}{2}}}+\frac{15}{7\sqrt[4]{n}}+5\sqrt[3]{n^5}\right)$.

Řešení

Výpočtem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{n^{-\frac{3}{2}}}+\frac{15}{7\sqrt[4]{n}}+5\sqrt[3]{n^5}\right)=(-\infty+0+\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{15}{7\sqrt[4]{n}}+\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1000}\cdot n^{\frac{3}{2}}+5n^{\frac{5}{3}}\right)=$$

$$=0+\lim_{n\to\infty}\left[n^{\frac{5}{3}}\left(-\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{n}}+5\right)\right]=$$

$$=\infty\,(0+5)=+\infty$$

Stručně: Koeficient u nejvyšší mocniny n, tj. u $n^{\frac{5}{3}}$, je 5, proto je výsledná limita $+\infty$.

■

Příklad 1.35 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5\sqrt[5]{n^3}-13\sqrt[4]{n^7}-\frac{3}{10^7}\sqrt[3]{n}\right)$.

Řešení

Výpočtem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(5\sqrt[5]{n^3}-13\sqrt[4]{n^7}-\frac{3}{10^7}\sqrt[3]{n}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\left(5n^{\frac{3}{5}}-13n^{\frac{7}{4}}-\frac{3}{10^7}n^{\frac{1}{3}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n^{\frac{7}{4}}\left(5n^{\frac{-23}{20}}-13-\frac{3}{10^7}n^{-\frac{17}{12}}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{7}{4}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{\sqrt[20]{n^{23}}}-13-\frac{3}{10^7\sqrt[12]{n^{17}}}\right)=\infty\cdot(0-13-0)=-\infty$$

Stručně: Koeficient u nejvyšší mocniny n, tj. u $n^{\frac{7}{4}}$, je -13, proto je výsledná limita $-\infty$.

■

Příklad 1.36 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{8n^5-3n^2+15}$.

Řešení

Výpočtem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{8n^5-3n^2+15}=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^5\left(8-\frac{3}{n^3}+\frac{15}{n^5}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{5}{3}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{8-\frac{3}{n^3}+\frac{15}{n^5}}=\infty\cdot\sqrt[3]{8-0+0}=\infty\cdot 2=+\infty$$

Stručně: Koeficient u nejvyšší mocniny n, tj. u $n^{\frac{5}{3}}$, je 8, proto je výsledná limita $+\infty$.

■

Člen a_n posloupnosti je zlomek, v jehož čitateli i jmenovateli jsou mnohočleny

Podle věty o limitě podílu obdržíme při výpočtu neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$.

Postup řešení

Čitatele i jmenovatele dělíme člen po členu nejvyšší mocninou n ve jmenovateli nebo nejvyšší mocniny v čitateli a ve jmenovateli vytkneme a zkrátíme. Tím jednotlivé členy převedeme na nulové limity užitím vzorce [1].

Příklad 1.37 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3-5n^2+4}{5n^3-3}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele n^3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-5n^2+4}{5n^3-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^3-5n^2+4}{n^3}}{\frac{5n^3-3}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^3}}{5-\frac{3}{n^3}} = \frac{1-0+0}{5-0} = \frac{1}{5}$$

Vytkneme nejvyšší mocniny n v čitateli i ve jmenovateli.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-5n^2+4}{5n^3-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(5-\frac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^3}}{5-\frac{3}{n^3}} = \frac{1-0+0}{5-0} = \frac{1}{5}$$

■

Příklad 1.38 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n+4}{2n^3+7n+2}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-2n+4}{2n^3+7n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^2-2n+4}{n^3}}{\frac{2n^3+7n+2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{2+\frac{7}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = \frac{0-0+0}{2+0+0} = \frac{0}{2} = 0.$$

■

Příklad 1.39 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7-5n^4}{3n+2n^2}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7-5n^4}{3n+2n^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7-5n^4}{n^2}}{\frac{3n+2n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n^2}-5n^2}{\frac{3}{n}+2}=\frac{0-5\cdot\infty}{0+2}=-\infty.$$

■

Příklad 1.40 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{22n^3-5n}{6n^2+4}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\frac{22n^3-5n}{6n^2+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{22n^3-5n}{n^2}}{\frac{6n^2+4}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{22n-\frac{5}{n}}{6+\frac{4}{n^2}}=\frac{22\cdot\infty-0}{6+0}=+\infty.$$

■

Poznámka.

Na základě postupu výpočtu lze odvodit tento závěr:

Nechť k je stupeň mnohočlenu v čitateli a l stupeň mnohočlenu ve jmenovateli a $\mathrm{a_k}$ a $\mathrm{b_l}$ jsou koeficienty u $\mathrm{n^k}$a $\mathrm{n^l}$, pak platí:

Limita podílu mnohočlenů je, tj.

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\mathrm{a_k n^k}+\cdots+\mathrm{a_0}}{\mathrm{b_l n^l}+\cdots+\mathrm{b_0}}=\begin{cases}\frac{\mathrm{a_k}}{\mathrm{b_l}},\mathrm{je-li\ k=l}\\ 0,\mathrm{je-li\ k<l},\\ +\infty,\mathrm{je-li\ k>l\ a\ sgn\ a_k=sgn\ b_l},\\ -\infty,\mathrm{je-li\ k>l\ a\ sgn\ a_k=-sgn\ b_l}.\end{cases}$$

Výsledky příkladů výše uvedeného typu mohou zdatnější studenti psát tedy přímo, bez výpočtu, musí však umět výsledek zdůvodnit. V tomto textu budou příklady řešeny většinou podrobným postupem.

Poznámka.

Pří výpočtu některých limit je potřebné nejprve provést naznačené úpravy ve vzorci pro n-tý člen p-sti a teprve pak určit limitu.

Příklad 1.41 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2-(2n+1)^2}{(n+2)^2+(n-2)^2}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2-(2n+1)^2}{(n+2)^2+(n-2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n+1-4n^2-4n-1}{n^2+4n+4+n^2-4n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8n}{2n^2+8}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{8}{n}}{2+\frac{8}{n^2}}=\frac{0}{2+0}=0.$$

■

Příklad 1.42 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4n-3)(6-2n)}{(n+4)^2}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)(6-2n)}{(n+4)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8n^2+30n-18}{n^2+8n+16}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-8+\frac{30}{n}-\frac{18}{n^2}}{1+\frac{8}{n}+\frac{16}{n^2}}=\frac{-8+0-0}{1+0+0}=-8.$$

■

Příklad 1.43 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n-2)(n^2+2n-1)}{(n+2)(2n-1)(3n+1)}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)(n^2+2n-1)}{(n+2)(2n-1)(3n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+4n^2-7n+2}{6n^3+11n^2-3n-2}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{7}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{6+\frac{11}{n}-\frac{3}{n^2}-\frac{2}{n^3}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Násobení v čitateli a ve jmenovateli je zdlouhavé. Výpočet lze provést snadněji: Stupeň mnohočlenu v čitateli i ve jmenovateli je 3. Nebudeme roznásobovat, ale hned budeme čitatele i jmenovatele dělit n^3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)(n^2+2n-1)}{(n+2)(2n-1)(3n+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n-2}{n}\cdot\frac{n^2+2n-1}{n^2}}{\frac{n+2}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{3n+1}{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3-\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{3\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2}$$

Ještě stručnější postup – o výsledku rozhodují koeficienty u nejvyšších mocnin, tj. n^3, ostatní členy mají po vydělení limitu 0.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)(n^2+2n-1)}{(n+2)(2n-1)(3n+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+\cdots}{6n^3+\cdots}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

■

Příklad 1.44 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^6-4}{3n-n^6}\right)^3$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^6-4}{3n-n^6}\right)^3=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^6-4}{3n-n^6}\right)^3=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{4}{n^6}}{\frac{3}{n^5}-1}\right)^3=\left(\frac{2}{-1}\right)^3=-8$$

■

Příklad 1.45 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3+3n^2-3n+1}{n^2+2n+1+n^2-2n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+2}{2n^2+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{2}{n^2}}=3$$

■

Příklad 1.46 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{3n^3+1}{2-4n^3}\left(6-\frac{2}{n^2}+\frac{3n+5}{2n^2-4}\right)\right]$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n^3+1}{2-4n^3}\left(6-\frac{2}{n^2}+\frac{3n+5}{2n^2-4}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+1}{2-4n^3}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(6-\frac{2}{n^2}+\frac{3n+5}{2n^2-4}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^3}-4}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}6-\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{4}{n^2}}\right)=-\frac{3}{4}\cdot(6-0+0)=-\frac{9}{2}$$

■

Příklad 1.47 *Vypočtěme* $\underset{n\to\infty}{lim}\left[\frac{n(n^3-2n^2+4)}{4n^4-8}-\frac{2n-3n^3}{n(1+4n^2)}\right]$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n^3-2n^2+4)}{4n^4-8}-\frac{2n-3n^3}{n(1+4n^2)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^4\left(1-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^3}\right)}{n^4\left(4-\frac{8}{n^4}\right)}-\frac{n^3\left(\frac{2}{n^2}-3\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^2}+4\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)=1.$$

■

Příklad 1.48 *Vypočtěme* $\underset{n\to\infty}{lim}\left[\frac{n+4}{n^2-5n}+\frac{3-n^3}{2n^2-8n+1}\right]$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+4}{n^2-5n}+\frac{3-n^3}{2n^2-8n+15}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}{1-\frac{5}{n}}+\frac{\frac{3}{n^2}-n}{2-\frac{8}{n}+\frac{15}{n^2}}\right)=$$

$$=\frac{0}{1}+\frac{-\infty}{2}=0+(-\infty)=-\infty$$

■

Příklad 1.49 *Vypočtěme* $\underset{n\to\infty}{lim}\left[\frac{5}{4}-\frac{1+2n^4}{7n^3+8n^4+2}\right]$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{5}{4}-\frac{1+2n^4}{7n^3+8n^4+2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{4}-\lim_{n\to\infty}\frac{1+2n^4}{7n^3+8n^4+2}=$$

$$=\frac{5}{4}-\lim_{n\to\infty}\frac{n^4\left(\frac{1}{n^4}+2\right)}{n^4\left(\frac{7}{n}+8+\frac{2}{n^4}\right)}=\frac{5}{4}-\frac{2}{8}=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

■

Příklad 1.50 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{4n^4-n+2}{2+n^4}-2n\right]$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^4-n+2}{2+n^4}-2n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^4}}{\frac{2}{n^4}+1}-\lim 2n=4-\infty=-\infty$$

■

Příklad 1.51 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^7+16n}{n^4-5}+\frac{1}{n}\right)$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^7+16n}{n^4-5}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^7\left(2+\frac{16}{n^6}\right)}{n^4\left(1-\frac{5}{n^4}\right)}+\lim\frac{1}{n}=\frac{\infty^3\cdot 2}{1}+0=\infty+0=\infty$$

■

Příklad 1.52 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{4-3n^3+15n}{2n^2-30}\left(\frac{1}{10^{15}}-\frac{25}{4n^3}+\frac{7+5n^2}{3-2n}\right)\right]$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4-3n^3+15n}{2n^2-30}\left(\frac{1}{10^{15}}-\frac{25}{4n^3}+\frac{7+5n^2}{3-2n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^2}-3n+\frac{15}{n}}{2-\frac{30}{n^2}}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^{15}}-\lim_{n\to\infty}\frac{25}{4n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}+5n}{\frac{3}{n}-2}\right)=$$

$$=\frac{-\infty}{2}\cdot\left(\frac{1}{10^{15}}-0+\frac{\infty}{-2}\right)=-\infty\left(\frac{1}{10^{15}}-\infty\right)=-\infty\cdot(-\infty)=\infty$$

■

Příklad 1.53 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-n^3+15}{2n^3+2n^2+10}+\frac{4n^2-3n+5}{8n^2-5n}\right)$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-n^3+15}{2n^3+2n^2+10}+\frac{4n^2-3n+5}{8n^2-5n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-1+\frac{15}{n^3}}{2+\frac{2}{n}+\frac{10}{n^3}}+\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{8-\frac{5}{n}}=$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{4}{8} = 0$$

■

Příklad 1.54 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n-1} - \frac{2n^2+3}{n-2}\right)$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{2n-1} - \frac{2n^2+3}{n-2}\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n-2) - (2n^2+3)(2n-1)}{(2n-1)(n-2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3n^3 - 6n + 3}{2n^2 - 5n + 2} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-3n - \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

■

Příklad 1.55 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{n+4} - 3n\right)$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{n+4} - 3n\right) = (\infty - \infty) = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2 - 3n(n+4)}{n+4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-12n}{n+4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{-12}{1 + \frac{4}{n}} = -12$$

■

Příklad 1.56 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^4-3}{2n-3n^2} + \frac{5n^2}{6+5n}\right)$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4-3}{2n-3n^2} + \frac{5n^2}{6+5n}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^4-3)(6+5n) + 5n^2(2n-3n^2)}{(2n-3n^2)(6+5n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^5 - 9n^4 + 10n^3 - 15n - 18}{-15n^3 - 8n^2 + 12n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5\left(5 - \frac{9}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{15}{n^4} - \frac{18}{n^5}\right)}{n^3\left(-15 - \frac{8}{n} + \frac{12}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\infty^2 \cdot 5}{-15} = -\infty.$$

■

Funkční vzorec pro n-tý člen posloupnosti obsahuje podíl odmocnin o různých odmocnitelích, odmocněnec je mnohočlen

Postup řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou n ve jmenovateli.

Poznámka.

Předpokladem úspěšného řešení je znalost počítání s odmocninami, uvádění čísla pod odmocninu a převádění odmocniny na mocninu s lomeným exponentem.

Příklad 1.57 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-4n^2+5}}{n^2-2n+1}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele n. Užijeme: $n = \sqrt{n^2} = \sqrt[3]{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 5}}{\sqrt{n^2 - 2n + 1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 5}}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 - 2n + 1}}{\mathrm{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{n^3 - 4n^2 + 5}{n^3}}}{\sqrt{\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^3}}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt{1}} = 1$$

■

Příklad 1.58 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^4+3n-6}}{n+2}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele n, přičemž $n = \sqrt[4]{n^4}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^4+3n-6}}{n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[4]{n^4+3n-6}}{n^4+3n-6}}{\frac{n+2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{n^4+3n-6}{n^4}}}{\frac{n+2}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{1+\frac{3}{n^3}-\frac{6}{n^4}}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt{1}} = 1$$

■

Příklad 1.59 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n-3n^3+5}}{n+2}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele n; užijeme $\sqrt[3]{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n-3n^3+5}}{n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^2}-3+\frac{5}{n^3}}}{1+\frac{2}{n}} = -\sqrt[3]{3}$$

■

Příklad 1.60 Vypočtěme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{2n^2-5n^7-3}}{n^2+6n}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele n2; užijeme $n^2 = \sqrt[4]{n^8}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{2n^2-5n^7-3}}{n^2+6n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{2}{n^6}-\frac{5}{n}-\frac{3}{n^8}}}{1+\frac{6}{n}} = \frac{\sqrt[4]{0}}{1} = 0$$

■

Příklad 1.61 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{6n-64\ \ ^3+18}}{8-n}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele n; užijeme $n^2 = \sqrt[3]{n^3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{6n-64n^3+18}}{8-n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{6}{n^2}-64+\frac{18}{n^3}}}{\frac{8}{n}-1} = \frac{\sqrt[3]{-64}}{-1} = \frac{-4}{-1} = 4$$

■

Příklad 1.62 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{27\ \ ^3-2n^2}+\sqrt[4]{n^3-1}}{\sqrt[4]{n^4-3n^2}-\sqrt[5]{n^2+5n}}$.

Řešení

Čitatele i jmenovatele dělíme n; $n = \sqrt[4]{n^4} = \sqrt[3]{n^3} = \sqrt[5]{n^5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3-2n^2}+\sqrt[4]{n^3-1}}{\sqrt[4]{n^4-3n^2}-\sqrt[5]{n^2+5n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{27-\frac{2}{n}}+\sqrt[4]{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^4}}}{\sqrt[4]{1-\frac{3}{n^2}}+\sqrt[5]{\frac{1}{n^3}+\frac{5}{n^4}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[4]{1}} = \frac{3}{1} = 3$$

■

Příklad 1.63 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6-2n}}$.

Řešení

Zlomek upravíme a pak čitatele i jmenovatele dělíme n^2, přičemž $n^2 = \sqrt[3]{n^6}$ a $n = \sqrt{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6-2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-2n\sqrt{n^2+1}+n^2}{\sqrt[3]{n^6-2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-2n\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt[3]{n^6-2n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2-2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^5}}} =$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{1+0} + 0}{\sqrt[3]{1-0}} = \frac{2-2}{1} = 0$$

■

Příklad 1.64 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n-3\sqrt{2n-3\sqrt{n^3}}}}{\sqrt{4n+5}}$.

Řešení

Čitatele i jmenovatele dělíme $n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n - 3\sqrt{2n - 3\sqrt{n^3}}}}{\sqrt{4n+5}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9 - 3\sqrt{\frac{2}{n} - 3\sqrt{\frac{1}{\mathrm{n}}}}}}{\sqrt{4 + \frac{5}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9 - 3\sqrt{0 - 3\sqrt{0}}}}{\sqrt{4+0}} = \frac{3}{2}$$

■

Příklad 1.65 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^3-5+3\sqrt[3]{5n^8-2n\sqrt{13\quad^{9}}}}}{\sqrt{25n^2+16}}$.

Řešení

Čitatele i jmenovatele dělíme n; $n = \sqrt{n^2} = \sqrt[6]{n^6} = \sqrt[12]{n^{12}}$.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^3 - 5 + 3\sqrt[3]{5n^8 - 2n\sqrt{13n^9}}}}{\sqrt{25n^2 + 16}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n \quad - \frac{5}{n^2} + 3\sqrt[3]{5n^2 - 2\sqrt{\frac{13}{n}}}}}{\sqrt{25 \quad + \frac{16}{n^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\infty - 0 + 3\sqrt[3]{\infty - 2\sqrt{0}}}}{\sqrt{25 + 0}} = \frac{\sqrt{\infty}}{5} = \frac{\infty}{5} = \infty$$

■

Funkční vzorec pro n-tý člen posloupnosti obsahuje dvojčleny druhých nebo třetích odmocnin z mnohočlenu proměnné n

Postup řešení

Rozšíříme vhodným výrazem tak, abychom mohli využít vzorců:

$$\mathbf{A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)} \qquad [4]$$

$$\mathbf{A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)} \qquad [5]$$

Příklad 1.66 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + 4n} - n\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [4], přičemž $\sqrt{n^2 + 4n} - n = A - B$. Rozšíříme tedy výrazem $A + B = \sqrt{n^2 + 4n} + n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + 4n} - n\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2 + 4n} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 4n} + n\right)}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 + 4n - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1} = \frac{4}{\sqrt{1} + 1} = 2$$

■

Příklad 1.67 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-4n}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4n}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2+4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-4n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}}=\frac{4}{2}=2$$

■

Příklad 1.68 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3n}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3n}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-3n}\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-3n}\right)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2+3n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-3n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-3n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}=\frac{6}{2}=3$$

■

Příklad 1.69 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3n}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3n}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2+3n}\right)\left(n+\sqrt{n^2+3n}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+3n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n^2-3n}{n+\sqrt{n^2+3n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{n+\sqrt{n^2+3n}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}=-\frac{3}{2}$$

■

Příklad 1.70 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{1+2n}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{1+2n}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{1+n}-\sqrt{1+2n}\right)\left(\sqrt{1+n}+\sqrt{1+2n}\right)}{\sqrt{1+n}+\sqrt{1+2n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n-1-2n}{\sqrt{1+n}+\sqrt{1+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{1+n}+\sqrt{1+2n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}+\sqrt{\frac{1}{n}+2}}=\frac{-\infty}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=-\infty$$

■

Příklad 1.71 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1-n^2+n-1}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+1}=1$$

■

Příklad 1.72 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-n+1}-n\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4-n+1}-n\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-n+1-n^2}{\sqrt{n^4-n+1}+n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}}=$$

$$=\frac{\infty-1}{\sqrt{1}}=\infty$$

■

Příklad 1.73 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\right]$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)\right]=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2-n^2-1)}{n+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-\frac{1}{2}$$

■

Příklad 1.74 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+2n}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2+2n}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-n^2-2n}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+2n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2+2n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-4}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=\frac{-4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=-2$$

■

Příklad 1.75 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[2n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)\right]$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left[2n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)\right]=(\infty-\infty)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(4n^2+3-4n^2)}{\sqrt{4n^2+3}+2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{4n^2+3}+2n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}+2}=\frac{6}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{2}$$

■

Příklad 1.76 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-1}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-1}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+1}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+3\sqrt{\frac{1}{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{3}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{3}{2}$$

■

Příklad 1.77 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\right]$.

Řešení

Užijeme vzorec [4], přičemž $\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}=A-B$.

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\right]=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)\left(\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}\right)}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}(n^3+1-n^3+1)}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

■

Příklad 1.78 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+5n+2}-n-7\right)\right]$.

Řešení

Užijeme vzorec [4], přičemž $\sqrt{n^2+5n+2}-(n-7) = A - B$..

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+5n+2}-n+7\right)\right] = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^2+5n+2}-(n-7)\right]\left[\sqrt{n^2+5n+2}+(n-7)\right]}{\sqrt{n^2+5n+2}+n-7} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5n+2-(n^2-14n+49)}{\sqrt{n^2+5n+2}+n-7} = \lim_{n\to\infty} \frac{19n-47}{\sqrt{n^2+5n+2}+n-7} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{19-\frac{47}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+1-\frac{7}{n}} =$$

$$= \frac{19}{\sqrt{1}+1} = \frac{19}{2}$$

■

Příklad 1.79 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9n+5}-3\sqrt{n}}$.

Řešení

Užijeme vzorec [4].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9n+5}-3\sqrt{n}} = \left(\frac{1}{\infty-\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n+5}+3\sqrt{n}}{\left(\sqrt{9n+5}-3\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{9n+5}+3\sqrt{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n+5}+3\sqrt{n}}{9n+5-9n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n+5}+3\sqrt{n}}{5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\tfrac{1}{5}\left(\sqrt{9n+5}+3\sqrt{n}\right)\right] = \tfrac{1}{5}(\infty+\infty) = \infty$$

■

Příklad 1.80 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}-n\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [5], přičemž $\sqrt[3]{n^2+n^3}-n = A-B$. Rozšíříme tedy výrazem
$A^2+AB+B^2 = \sqrt[3]{(n^2+n^3)^2}+n\sqrt[3]{n^2+n^3}+n^2$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}-n\right) = (\,\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}-n\right)\left(\sqrt[3]{(n^2+n^3)^2}+n\sqrt[3]{n^2+n^3}+n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^2+n^3)^2}+n\sqrt[3]{n^2+n^3}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(n^2+n^3)^3}-n^3}{\sqrt[3]{(n^2+n^3)^2}+n\sqrt[3]{n^2+n^3}+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2+n^3)^2}+n\sqrt[3]{n^2+n^3}+n^2} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2}+1\sqrt[3]{\frac{1}{n}+1}+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+1\sqrt[3]{1}+1} = \frac{1}{3}$$

■

Příklad 1.81 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-5}-\sqrt[3]{n+5}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [5], přičemž $A-B = \sqrt[3]{n-5}-\sqrt[3]{n+5}$. Rozšíříme výrazem
$A^2+AB+B^2 = \sqrt[3]{(n-5)^2}+\sqrt[3]{n-5}\cdot\sqrt[3]{n+5}+\sqrt[3]{(n+5)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-5}-\sqrt[3]{n+5}\right) = (\,\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n-5}-\sqrt[3]{n+5}\right)\left(\sqrt[3]{(n-5)^2}+\sqrt[3]{n-5}\,\sqrt[3]{n+5}+\sqrt[3]{(n+5)^2}\right)}{\sqrt[3]{(n-5)^2}+\sqrt[3]{\mathrm{n}-5}\,\sqrt[3]{(n+5)}+\sqrt[3]{(n+5)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n-5)^3} - \sqrt[3]{(n+5)^3}}{\sqrt[3]{(n-5)^2} + \sqrt[3]{n^2-25} + \sqrt[3]{(n+5)^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-10}{\sqrt[3]{(n-5)^2} + \sqrt[3]{n^2-25} + \sqrt[3]{(n+5)^2}} = \left[\frac{-10}{\infty}\right] = 0$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-10}{\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{5}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1-\frac{25}{n^2}} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{5}{n}\right)^2}} = \frac{0}{3} = 0 \right)$$

■

Příklad 1.82 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{2n^2-3} - \sqrt[3]{4n^2+1}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [5], přičemž $A - B = \sqrt[3]{2n^2-3} - \sqrt[3]{4n^2+1}$. Rozšíříme výrazem $A^2 + AB + B^2 = \sqrt[3]{(2n^2-3)^2} + \sqrt[3]{2n^2-3} \cdot \sqrt[3]{4n^2+1} + \sqrt[3]{(4n^2+1)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{2n^2-3} - \sqrt[3]{4n^2+1}\right) = (\infty - \infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{2n^2-3} - \sqrt[3]{4n^2+1}\right)\left(\sqrt[3]{(2n^2-3)^2} + \sqrt[3]{(2n^2-3)(4n^2+1)} + \sqrt[3]{(4n^2+1)^2}\right)}{\sqrt[3]{(2n^2-3)^2} + \sqrt[3]{(2n^2-3)(4n^2+1)} + \sqrt[3]{(4n^2+1)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3-4n^2-1}{\sqrt[3]{(2n^2-3)^2} + \sqrt[3]{(2n^2-3)(4n^2+1)} + \sqrt[3]{(4n^2+1)^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2-4}{\sqrt[3]{(2n^2-3)^2} + \sqrt[3]{(2n^2-3)(4n^2+1)} + \sqrt[3]{(4n^2+1)^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-2\sqrt[3]{n^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{n^4}}}{\sqrt[3]{\left(2-\frac{3}{n^2}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(2-\frac{3}{n^2}\right)\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} + \sqrt[3]{\left(4+\frac{1}{n^2}\right)^2}} =$$

$$= \frac{-\infty - 0}{\sqrt[3]{4} + 2 + \sqrt[3]{4}} = -\infty$$

■

Příklad 1.83 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3}{\sqrt[3]{3n^2+n^3}-n}$.

Řešení

Užijeme vzorec [5], přičemž $A - B = \sqrt[3]{3n^2 + n^3} - n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3}{\sqrt[3]{3n^2+n^3}-n} = \frac{-3}{(\infty - \infty)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3\left(\sqrt[3]{(3n^2+n^3)^2} + n\sqrt[3]{3n^2+n^3} + n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{3n^2+n^3} - n\right)\left(\sqrt[3]{(3n^2+n^3)^2} + n\sqrt[3]{3n^2+n^3} + n^2\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3\left(\sqrt[3]{(3n^2+n^3)^2} + n\sqrt[3]{3n^2+n^3} + n^2\right)}{\sqrt[3]{(3n^2+n^3)^3} - n^3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3\left(\sqrt[3]{(3n^2+n^3)^2} + n\sqrt[3]{3n^2+n^3} + n^2\right)}{3n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3\left(\sqrt[3]{\left(\frac{3}{n}+1\right)^2} + 1 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{n}+1} + 1\right)}{3} =$$

$$= \frac{-3(1+1+1)}{3} = -3$$

■

Funkční vzorec pro n-tý člen posloupnosti obsahuje faktoriály nebo součet členů aritmetické či geometrické posloupnosti

Postup řešení

Užijeme definici faktoriálu a vzorce pro součet prvních n členů aritmetické nebo geometrické p-sti, případně další vhodné vzorce.

Připomínáme:

Aritmetická p-st: $\boldsymbol{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$. [6]

Geometrická p-st: $\boldsymbol{s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1}$. [7]

Faktoriál: $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$. [8]

Příklad 1.84 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!-(n-1)!}$.

Řešení

Užijeme vzorec [8].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!-(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, n\, (n-1)!}{(n+1)\, n\, (n-1)! - (n-1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, n\, (n-1)!}{(n-1)!\,[(n+1)n-1]} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+n-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = 1$$

■

Příklad 1.85 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+3(n-1)!}{(n+2)!}$.

Řešení

Užijeme vzorec [8].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+3(n-1)!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\, n\, (n-1)! + 3\,(n-1)!}{(n+2)\,(n+1)\, n(n-1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\ [n^2+n+3]}{(n+2)\,(n+1)n(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{n^3+3n^2+2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

■

Příklad 1.86 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n-2)!}{n!}$.

Řešení

Užijeme vzorec [8].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n-2)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n-2)!}{n(n-1)(n-2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2-n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0$$

■

Příklad 1.87 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

Řešení

Užijeme vzorec [8].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)!+(n+1)!}{(n+2)(n+1)!-(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,[n+2+1]}{(n+1)!\,[n+2-1]} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

■

Příklad 1.88 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4(n+2)!-2n!}{8(n+2)!}$.

Řešení

Užijeme vzorec [8].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4(n+2)!-2n!}{8(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+2)(n+1)n!-2n!}{8(n+2)(n+1)n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n!\,[2(n+2)(n+1)-1]}{8(n+2)(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n^2+3n+2)-1}{4(n^2+3n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+6n+3}{4n^2+12n+8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{12}{n}+\frac{8}{n^2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

■

Příklad 1.89 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!-(2n-2)!}{(2n)!}$.

Řešení

Užijeme vzorec [8].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!-(2n-2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)!-(2n-2)!}{2n(2n-1)(2n-2)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-2)!\,[(2n+1)2n(2n-1)-1]}{2n(2n-1)(2n-2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^3-2n-1}{4n^2-2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(8-\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(4-\frac{2}{n}\right)} = \frac{\infty\cdot 8}{4} = \infty$$

■

Příklad 1.90 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{25\quad{}^2-4n}}$.

Řešení

Užijeme vzorec [6].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{25n^4-4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}(1+n)}{\sqrt{25n^4-4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2\sqrt{25n^4-4n}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2\sqrt{25-\frac{4}{n^3}}} = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$$

■

Příklad 1.91 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)\right]$.

Řešení

Užijeme vzorec [6].

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)\right]=(0\cdot\infty)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{2}(1+n)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

■

Příklad 1.92 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

Řešení

Užijeme vzorec [6].

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{2}(1+n)}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+n^2}{2(n+2)}-\frac{n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2-n^2-2n}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2+\frac{4}{n}}=-\frac{1}{2}$$

■

Příklad 1.93 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n-1)(n+2)}$.

Řešení

Užijeme vzorec $\mathbf{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n-1)(n+2)}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}\ n(n+1)(2n+1)}{n(n-1)(n+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}\cdot 1\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot 2}{1} = \frac{1}{3}$$

■

Příklad 1.94 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Řešení

Užijeme vzorec [6].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3+\cdots+2n-1-(2+4+6+\cdots+2n)}{\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}\ (1+2n-1)-\frac{n}{2}(2+2n)}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}\cdot 2n-\frac{n}{2}\cdot 2(1+n)}{\sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = -1$$

■

Příklad 1.95 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5^n}}$.

Řešení

Užijeme vzorec [3] a [7].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{3}-1}}{1\cdot\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{5}-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1\right]}{-\frac{5}{4}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}-1\right]} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2}[0-1]}{\frac{5}{4}[0-1]} = \frac{6}{5}$$

■

Příklad 1.96 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{3}{2^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 6^2}+\frac{1}{5\cdot 6^3}+\cdots+\frac{1}{5\cdot 6^n}}$.

Řešení

Užijeme vzorec [7].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{3}{2^n}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 6^2}+\frac{1}{5\cdot 6^3}+\cdots+\frac{1}{5\cdot 6^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}{\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\cdots+\frac{1}{6^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} 15\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}}{1\cdot \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{6}-1}} =$$

$$= 15\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{-2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]}{-\frac{6}{5}\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}-1\right]} = 15\cdot \frac{2(0-1)}{\frac{6}{5}(0-1)} = 25$$

■

Příklad 1.97 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\cdots a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$; $a, b \in R, a \in (0,1), b \in (0,1)$.

Řešení

Užijeme vzorec [7].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\cdots a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot \frac{a^{n+1}-1}{a-1}}{1\cdot \frac{b^{n+1}-1}{b-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-1)(a^n-1)}{(a-1)(b^n-1)} =$$

$$= \frac{(b-1)(0-1)}{(a-1)(0-1)} = \frac{1-b}{1-a}$$

■

Funkční vzorec pro n-tý člen posloupnosti obsahuje exponenciální výrazy $\boldsymbol{a^n}$, $\boldsymbol{a \in R}$.

Postup řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem a^n, který se nachází ve jmenovateli a má největší absolutní hodnotu základu (pokud je to zlomek a pokud nelze počítat přímo) a užijeme vzorec [3], tj.

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 \ pro\ |a| < 1 \\ 1 \ pro\ a = 1 \\ +\infty \ pro\ a > 1 \\ neexistuje\ pro\ a \le -1 \end{cases}$$

Příklad 1.98 Vypočtěme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n-3\cdot 7^n}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 7^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n - 3\cdot 7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{7^n}}{\frac{2^n}{7^n} - 3\cdot\frac{7^n}{7^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^n}{\left(\frac{2}{7}\right)^n - 3\cdot 1} = \frac{0}{0-3} = 0$$

■

Příklad 1.99 Vypočtěme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+6^n}{3\cdot 5^n}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 5^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 6^n}{3\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{5^n} + \frac{6^n}{5^n}}{3\cdot\frac{5^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{6}{5}\right)^n}{3\cdot 1} = \frac{2\cdot 0 + \infty}{3} = \infty$$

■

Příklad 1.100 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^{n-1}+3\cdot 5^n}{4\cdot 2^n-6\cdot 5^{n-1}}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 5^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{n-1}+3\cdot 5^n}{4\cdot 2^n-6\cdot 5^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-2)^{n-1}}{5^n}+3\frac{5^n}{5^n}}{4\frac{2^n}{5^n}-6\frac{5^{n-1}}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}+3\cdot 1}{4\left(\frac{2}{5}\right)^n-6\cdot\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}\cdot 0+3}{4\cdot 0-\frac{6}{5}} =$$

$$= \frac{3}{-\frac{6}{5}} = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$$

■

Příklad 1.101 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 3^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-2)^n}{3^n}+\frac{3^n}{3^n}}{\frac{-2(-2)^n}{3^n}+\frac{3^{n+1}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n+1}{-2\left(\frac{-2}{3}\right)^n+3} = \frac{0+1}{-2\cdot 0+3} =$$

$$= \frac{1}{3}$$

■

Příklad 1.102 Vypočtěme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-3)^{n+1}-6\cdot 7^{n-1}}{5\cdot 7^n-3^{n+2}}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 7^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^{n+1}-6\cdot 7^{n-1}}{5\cdot 7^n-3^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-3)^{n+1}}{7^n}-6\cdot\frac{7^{n-1}}{7^n}}{5\frac{7^n}{7^n}-\frac{3^{n+2}}{7^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-3\left(-\frac{3}{7}\right)^n-\frac{6}{7}\cdot\frac{7^{n-1}}{7^{n-1}}}{5\cdot 1-3^2\left(\frac{3}{7}\right)^n} =$$

$$= \frac{-3 \cdot 0 - \frac{6}{7} \cdot 1}{5 - 9 \cdot 0} = -\frac{\frac{6}{7}}{5} = -\frac{6}{35}$$

■

Příklad 1.103 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3\cdot5^{n+1}}{3\cdot2^{n+2}+6\cdot5^n}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 5^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3 \cdot 5^{n+1}}{3 \cdot 2^{n+2} + 6 \cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{5^n} + 3 \cdot \frac{5^{n+1}}{5^n}}{3\frac{2^{n+2}}{5^n} + 6\frac{5^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 3 \cdot 5 \cdot 1}{3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 6 \cdot 1} =$$

$$= \frac{0 + 15}{12 \cdot 0 + 6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

■

Příklad 1.104 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}3^n-2\cdot5^{n+1}}{8\cdot5^n+2\cdot3^{n-2}}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 5^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{8 \cdot 5^n + 2 \cdot 3^{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3^n}{5^n} - 2 \cdot \frac{5^{n+1}}{5^n}}{8 \cdot \frac{5^n}{5^n} + 2\frac{3^{n-2}}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 2 \cdot 5 \cdot 1}{8 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot 0 - 10}{8 + \frac{2}{5^2} \cdot 0} = \frac{-10}{8} = \frac{-5}{4}$$

■

Příklad 1.105 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^{n-1}+5\cdot 4^{2n+1}}{3^{n+1}-2\cdot 4^{n+1}}$.

Řešení

Čitatele i jmenovatele dělíme výrazem 4^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^{n-1}+5\cdot 4^{2n+1}}{3^{n+1}-2\cdot 4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-2)^{n-1}}{4^n}+5\cdot\frac{4^{2n+1}}{4^n}}{\frac{3^{n+1}}{4^n}-2\cdot\frac{4^{n+1}}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+5\cdot 4^{n+1}}{3\left(\frac{3}{4}\right)^n-2\cdot 4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot 0+\infty}{3\cdot 0-8} = -\infty$$

■

Příklad 1.106 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n-5\cdot 7^{n-1}+9^{n+2}}{2\cdot 7^n-4\cdot 9^{n-1}}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 9^{n-1}.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n-5\cdot 7^{n-1}+9^{n+2}}{2\cdot 7^n-4\cdot 9^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}-5\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}+9^3}{2\cdot 7\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}-4\cdot 1} =$$

$$= \frac{4\cdot 0-5\cdot 0+9^3}{14\cdot 0-4} = -\frac{9^3}{4} = -\frac{729}{4}$$

■

Příklad 1.107 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5(-\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{5})^{n+1}-(-\frac{1}{4})^n}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem $(-\frac{1}{4})^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5(-\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{5})^{n+1}-(-\frac{1}{4})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}}\right)^n}{\frac{1}{5}\left(\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{1}{4}}\right)^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^n}{\frac{1}{5}\left(\frac{-4}{5}\right)^n - 1} =$$

$$= \frac{5\cdot\infty}{\frac{1}{5}\cdot 0 - 1} = -\infty$$

■

Příklad 1.108 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-\frac{1}{5})^{n-1}+(\frac{5}{2})^{n+1}}{(\frac{1}{4})^{n+1}+6^n}$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 6^n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+6^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{-\frac{1}{5}}{6}\right)^{n-1}+\frac{5}{2}\left(\frac{\frac{5}{2}}{6}\right)^n}{\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{4}}{6}\right)^n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{30}\right)^{n-1}+\frac{5}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^n}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{24}\right)^n+1} = \frac{\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{5}{2}\cdot 0}{\frac{1}{4}\cdot 0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

■

Příklad 1.109 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n$ *a proveďme diskusi vzhledem k* $x \in R$.

Řešení

Dle vzorce [3].

Je-li $\frac{x+2}{4} > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n = \infty$.

Je-li $\frac{x+2}{4} = 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.

Je-li $\left|\frac{x+2}{4}\right| < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n = 0$.

Je-li $\frac{x+2}{4} \leq -1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n$ neexistuje.

$$\frac{x+2}{4} > 1 \Longrightarrow x+2 > 4 \Longrightarrow x > 2$$

$$\frac{x+2}{4} = 1 \Longrightarrow x+2 = 4 \Longrightarrow x = 2$$

$$\left|\frac{x+2}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x+2}{4} < 1 \Rightarrow -4 < x+2 < 4 \Rightarrow -6 < x < 2$$

$$\frac{x+2}{4} \leq -1 \Rightarrow x+2 \leq -4 \Rightarrow x \leq -6$$

Výsledek sestavíme do přehledné tabulky:

x	$x \leq -6$	$-6 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
limita	neexistuje	0	1	$+\infty$

■

Příklad 1.110 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-3^n}$ *a proveďme diskusi vzhledem k* $x \in R$.

Řešení

Dělíme čitatele i jmenovatele výrazem 3^n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^n}{3^n}}{\frac{1}{3^n}-\frac{3^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n}{0-1} = -\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Je-li $\frac{x}{3} > 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = +\infty \implies \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-3^n} = -\infty$

Je-li $\frac{x}{3} = 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-3^n} = -1$

Je-li $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-3^n} = 0$

Je-li $\frac{x}{3} \leq -1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ neexistuje $\implies \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-3^n}$ neexistuje

Výsledek sestavíme do přehledné tabulky:

x	$x \leq -3$	$-3 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
limita	neexistuje	0	-1	$-\infty$

■

Výpočty limit užitím vzorce $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Postup řešení

Provedeme vhodné úpravy abychom mohli užít výše uvedený vzorec, případně další vzorce, které z něho substitucí získáme.

Připomínáme:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k} = e$$

Předpokladem úspěšného řešení je znalost počítání s mocninami.

Příklad 1.111 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n}+\frac{3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = e^3$$

■

Příklad 1.112 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e\cdot(1+0)^{-1} = e\cdot 1 = e$$

■

Příklad 1.113 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-4}\right)^n, n\neq 4$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4+4+2}{n-4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n-4}+\frac{6}{n-4}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-4}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-4}\right)^{n-4+4} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{n-4}\right)^{n-4}\cdot\left(1+\frac{6}{n-4}\right)^{4}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-4}\right)^{n-4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{n-4}\right)^{4} = e^6\cdot(1+0)^4 = e^6$$

■

Příklad 1.114 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-2-3}{n+2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{n+2-2}\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\left(1+\frac{-5}{n+2}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= [e^{-5} \cdot (1+0)^{-2}]^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{5}{2}}$$

■

Příklad 1.115 *Vypočtěme limitu* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-8}{n+3}\right)^{\frac{n-1}{3}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-8}{n+3}\right)^{\frac{n-1}{3}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3-11}{n+3}\right)^{\frac{n-1}{3}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-11}{n+3}\right)^{\frac{n}{3}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-11}{n+3}\right)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-11}{n+3}\right)^{n+3-3}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot (1+0)^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-11}{n+3}\right)^{n+3}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{-11}{n+3}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot 1 =$$

$$= (e^{-11})^{\frac{1}{3}} \cdot (1+0)^{-1} = e^{-\frac{11}{3}}$$

■

Příklad 1.116 *Vypočtěme limitu* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n-5}\right)^{\frac{n+2}{4}}$.

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n-5}\right)^{\frac{n+2}{4}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-5+5+3}{n-5}\right)^{\frac{n+2}{4}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{\frac{n+2}{4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{\frac{n}{4}} \cdot \left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{\frac{2}{4}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{4}} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{n-5+5}\right]^{\frac{1}{4}} \cdot (1+0)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{n-5} \cdot \left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{5}\right]^{\frac{1}{4}} \cdot 1 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{n-5}\right]^{\frac{1}{4}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{8}{n-5}\right)^{\frac{5}{4}} = (e^8)^{\frac{1}{4}} \cdot (1+0)^{\frac{5}{4}} = e^{\frac{8}{4}} = e^2$$

■

Příklad 1.117 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}[n^{-3n}(n+1)^{3n-5}]$.

Řešení

Úpravou mocnin postupně dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty}[n^{-3n}(n+1)^{3n-5}] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{3n-5}}{n^{3n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\right]^{3} \cdot \lim_{n\to\infty}(n+1)^{-5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3} \cdot \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{(n+1)^5} = e^3 \cdot 0 = 0$$

■

Příklad 1.118 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{-\frac{2}{3}n}(n+1)^{\frac{2}{3}n}\right]$.

Řešení

Úpravou mocnin postupně dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-\frac{2}{3}n}(n+1)^{\frac{2}{3}n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\frac{2}{3}n}}{n^{\frac{2}{3}n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$$

■

Příklad 1.119 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\frac{3}{8}n+6}n^{-\frac{3}{8}n}\right]$.

Řešení

Úpravou mocnin postupně dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\frac{3}{8}n+6}n^{-\frac{3}{8}n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\frac{3}{8}n}(n+1)^6}{n^{\frac{3}{8}n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{3}{8}} \cdot \lim_{n\to\infty}(n+1)^6 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{3}{8}}\cdot\infty = e^{\frac{3}{8}}\cdot\infty = \infty$$

■

Příklad 1.120 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Řešení

Úpravou mocnin postupně dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot2\cdot\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{4}} = (e^5)^{\frac{1}{4}}\cdot= e^{\frac{5}{4}}$$

■

Příklad 1.121 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{n}$.

Řešení

Úpravou mocnin postupně dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2-2+1}{3n+2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{3n\cdot\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2-2}{3}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{3n+2}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{-\frac{2}{3}} = (e^{-1})^{\frac{1}{3}}\cdot(1+0)^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

■

Výpočet limit, při nichž užíváme věty o limitě posloupností

Připomínáme:

Věta (o limitě tří p-stí): [a]

Mějme tři posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$.

Nechť

1. $a_n \leq c_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in$ N,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a, a \in \boldsymbol{R}^*$.

Potom existuje i limita posloupnosti $\{c_n\}$ a platí $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Věta (o limitě součinu nulové a omezené p-sti): [b]

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, pak $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Věta (o limitě vybrané p-sti): [c]

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu a, $a \in \boldsymbol{R}^*$, pak každá posloupnost $\{a_{k_n}\}$ z ní vybraná má také limitu a, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Příklad 1.122 *Vypočtěme limitu* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-\cos}{5-3n}$.

Řešení

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-\cos}{5-3n} = \left[\frac{\infty-\text{nee}}{-\infty}\right]$. Upravíme n-tý člen p-sti a užijeme větu o limitě rozdílu p-stí.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-\cos 4n}{5-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5-3n} - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cos 4n}{5-3n}\right)$$

Vypočteme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{5-3n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{5}{n}-3} = -\frac{1}{3}$

Podle věty $[b]$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos 4n}{5-3n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5-3n} \cdot \cos 4n\right) = 0,$$

protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5-3n} = 0$ a $p - st\ \{\cos 4n\}$ je omezená, neboť pro každé $n \in$ N je $|\cos 4n| \leq 1$.

Potom $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{n-\cos}{5-3n}=\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{n}{5-3n}-\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{\cos 4n}{5-3n}=-\frac{1}{3}+0=-\frac{1}{3}$

Výsledek: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\cos}{5-3n}=-\frac{1}{3}$

■

Příklad 1.123 *Vypočtěme* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-sin\, n}{2n+7}$.

Řešení

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-\mathrm{si}}{2n+7}=\left[\frac{\infty-neex}{-\infty}\right]$. Užijeme větu $[a]$.

Pro $\forall\ n\in N$ je $|\sin n|\leq 1$, tedy $-1\leq\sin n\leq 1$.

Provedeme takové „strategické" úpravy nerovnosti $-1\leq\sin n\leq 1$, abychom „uvnitř" nerovnosti získali požadovaný výraz $\frac{3n-\mathrm{si}}{2n+7}$.

$$1\leq\sin n\leq 1\ /.\,(-1)$$
$$1\geq-\sin n\geq-1\ /+3n$$
$$3n+1\geq 3\mathrm{n}-\sin n\geq 3n-1\ /{:}\ (2n+7)>0$$
$$\frac{3n+1}{2n+7}\geq\frac{3\mathrm{n}-\sin n}{2n+7}\geq\frac{3n-1}{2n+7},$$

což je splněno pro všechna $n\in N$.

Dále $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{7}{n}}=\frac{3}{2}$ a také $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\frac{3n-1}{2n+7}=\frac{3}{2}$

Jsou splněny oba předpoklady věty $[a]$, proto hledaná limita existuje a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-\sin n}{2n+7}=\frac{3}{2}$.

Jiný postup – užitím věty [b].

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-\sin n}{2n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+7}-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+7}\cdot\sin n\right)=\frac{3}{2}-0=\frac{3}{2}$$

Zdůvodnění: Protože $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+7}=0$ a $|\sin n|\leq 1$ pro $\forall\ n\in N$, je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+7}\cdot\sin n\right)=0$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+7}=\frac{3}{2}$.

Výsledek: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-\sin n}{2n+7}=\frac{3}{2}$

■

Příklad 1.124 *Dokažme, že p-st* $\{(-1)^n\,n\}$ *nemá limitu.*

Řešení

K důkazu užijeme větu $[c]$.

$$\{(-1)^n\, n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$$

Uvažujme vybranou p-st $\{b_n\}$ lichých členů $\{-1, -3, -5, \dots\}$, její limita $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$

a vybranou p-st $\{c_n\}$ sudých členů $\{2, 4, 6, \dots\}$, její limita $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty \neq +\infty = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, limita p-sti $\{(-1)^n\, n\}$ podle věty [c] neexistuje.

■

Příklad 1.125 *Dokažme, že p-st* $\left\{\frac{\sqrt[3]{n^4+1}-sin\frac{n}{5}}{n+2}\right\}$ *má nevlastní limitu.*

Řešení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+1} - \sin\frac{n}{5}}{n+2} = \left[\frac{\infty - neex.}{\infty}\right]$$

Nejprve upravíme $\frac{\sqrt[3]{n^4+1}-\sin\frac{n}{5}}{n+2} = \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n+2} - \frac{1}{n+2} \cdot \sin\frac{n}{5}$.

Zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n+\frac{1}{n^3}}}{1+\frac{2}{n}} = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+2} \cdot \sin\frac{n}{5}\right) = 0$, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$ a p-st $\left\{\sin\frac{n}{5}\right\}$ je omezená (věta$[b]$).

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}-\sin\frac{n}{5}}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n+2} - \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+2} \cdot \sin\frac{n}{5}\right) = \infty - 0 = \infty.$

Výsledek: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+1}-\sin\frac{n}{5}}{n+2} = \infty$

■

Příklad 1.126 *Vypočtěme* $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} \frac{e^{sin}}{n^3}$.

Řešení

Užijeme větu $[b]$.

P-st $\{\sin n\}$ je omezená, pro $\forall n \in N$ je $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{\sin n} \leq e^1 \Rightarrow$ p-st $\{e^{\sin n}\}$ je omezená a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$.

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\sin n}}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3} e^{\sin n}\right) = 0$

Výsledek: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\sin n}}{n^3} = 0$

■

Příklad 1.127 *Dokažme, že* $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{2^n}$ *neexistuje.*

Řešení

K důkazu užijeme větu $[c]$.

$$\left\{\frac{2^n + (-2)^n}{2^n}\right\} = \{0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots\}$$

Vybraná p-st $\{b_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$ lichých členů je stacionární a má limitu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Vybraná p-st $\{c_n\} = \{2, 2, 2, \dots\}$ sudých členů je stacionární a má limitu $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 2$.

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \neq 2 = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, limita p-sti $\left\{\frac{2^n+(-2)^n}{2^n}\right\}$ podle věty [c] neexistuje.

■

Číselné řady

Zadání řady

Připomínáme.

Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n + \ldots$, $n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}$

Úmluva.

Pokud tomu nebude jinak, budeme místo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ psát také stručně $\sum a_n$.

Příklad 2.1 *Napišme prvních 5 členů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Řešení

Za n postupně dosazujeme čísla 1, 2, 3, 4, 5 a obdržíme členy:

$$\mathrm{a}_1 = \frac{1}{2\cdot 1 - 1} = 1 \qquad \mathrm{a}_4 = \frac{1}{2\cdot 4 - 1} = \frac{1}{7}$$
$$\mathrm{a}_2 = \frac{1}{2\cdot 2 - 1} = \frac{1}{3} \qquad \mathrm{a}_5 = \frac{1}{2\cdot 5 - 1} = \frac{1}{9}$$
$$\mathrm{a}_3 = \frac{1}{2\cdot 3 - 1} = \frac{1}{5}$$

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

■

Příklad 2.2 *Napišme prvních 5 členů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1}$.

Řešení

Za n postupně dosazujeme čísla 1, 2, 3, 4, 5 a obdržíme členy:

$$\mathrm{a}_1 = \frac{3\cdot 1 - 2}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{a}_4 = \frac{3\cdot 4 - 2}{4^2 + 1} = \frac{10}{17}$$
$$\mathrm{a}_2 = \frac{3\cdot 2 - 2}{2^2 + 1} = \frac{4}{5} \qquad \mathrm{a}_5 = \frac{3\cdot 5 - 2}{5^2 + 1} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{a}_3 = \frac{3\cdot 3 - 2}{3^2 + 1} = \frac{7}{10}$$

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{10}{17} + \frac{1}{2} + \cdots$

■

Příklad 2.3 *Napišme prvních 5 členů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

Řešení

Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$ a obdržíme členy:

$$\mathrm{a}_1 = \frac{1!}{2^1} = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{a}_4 = \frac{4!}{2^4} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^4} = \frac{3}{2}$$
$$\mathrm{a}_2 = \frac{2!}{2^2} = \frac{2 \cdot 1}{2^2} = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{a}_5 = \frac{5!}{2^5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^5} = \frac{15}{4}$$
$$\mathrm{a}_3 = \frac{3!}{2^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2^3} = \frac{3}{4}$$

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{15}{4} + \cdots$

■

Příklad 2.4 *Napišme prvních 5 členů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} [4 + 3(n-1)]$.

Řešení

Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$ a obdržíme členy:

$$\mathrm{a}_1 = 4 + 3(1-1) = 4 \qquad \mathrm{a}_4 = 4 + 3(4-1) = 13$$
$$\mathrm{a}_2 = 4 + 3(2-1) = 7 \qquad \mathrm{a}_5 = 4 + 3(5-1) = 16$$
$$\mathrm{a}_3 = 4 + 3(3-1) = 10$$

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty} [4 + 3(n-1)] = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + \cdots$

■

Příklad 2.5 *Napišme prvních 5 členů řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+2^{n-1}}$.

Řešení

Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$ a obdržíme členy:

$$\mathrm{a}_1 = \frac{e^1}{1 + 2^{1-1}} = \frac{e}{2} \qquad \mathrm{a}_4 = \frac{e^4}{1 + 2^{4-1}} = \frac{e^4}{9}$$
$$\mathrm{a}_2 = \frac{e^2}{1 + 2^{2-1}} = \frac{e^2}{3} \qquad \mathrm{a}_5 = \frac{e^5}{1 + 2^{5-1}} = \frac{e^5}{17}$$
$$\mathrm{a}_3 = \frac{e^3}{1 + 2^{3-1}} = \frac{e^3}{5}$$

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+2^{n-1}} = \frac{e}{2} + \frac{e^2}{3} + \frac{e^3}{5} + \frac{e^4}{9} + \frac{e^5}{17} + \cdots$

■

Příklad 2.6 *Napišme prvních 5 členů řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}$.

Řešení

Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$ a obdržíme členy:

$$a_1=\frac{(-1)^1\ \cdot 1}{2^1}=-\frac{1}{2} \qquad a_4=\frac{(-1)^4\ \cdot 4}{2^4}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

$$a_2=\frac{(-1)^2\ \cdot 2}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad a_5=\frac{(-1)^5\ \cdot 5}{2^5}=-\frac{5}{32}$$

$$a_3=\frac{(-1)^3\ \cdot 3}{2^3}=-\frac{3}{8}$$

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{2^n}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}-\frac{5}{32}+\cdots$

■

Příklad 2.7 *Napišme prvních 5 členů řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi}{n!}$.

Řešení

Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$ a obdržíme členy:

$$a_1=\frac{\sin 1\pi}{1!}=\frac{0}{1!}=0 \qquad a_4=\frac{\sin 4\pi}{4!}=\frac{0}{4!}=0$$

$$a_2=\frac{\sin 2\pi}{2!}=\frac{0}{2!}=0 \qquad a_5=\frac{\sin 5\pi}{5!}=\frac{0}{5!}=0$$

$$a_3=\frac{\sin 3\pi}{3!}=\frac{0}{3!}=0$$

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi}{n!}=0+0+0+0+0+\cdots$

■

Příklad 2.8 *Napišme prvních 5 členů řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.

Řešení

Za n postupně dosazujeme čísla $1, 2, 3, 4, 5$ a obdržíme členy:

$$a_1=\frac{\left(2+sin\frac{1\pi}{2}\right)\cos 1\pi}{1!}=\frac{(2+1)\cdot(-1)}{1}=-3$$

$$a_2 = \frac{\left(2 + sin\frac{2\pi}{2}\right)\cos 2\pi}{2!} = \frac{(2+0)\cdot 1}{2\cdot 1} = 1$$
$$a_3 = \frac{\left(2 + sin\frac{3\pi}{2}\right)\cos 3\pi}{3!} = \frac{(2-1)\cdot(-1)}{3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{1}{6}$$
$$a_4 = \frac{\left(2 + sin\frac{4\pi}{2}\right)\cos 4\pi}{4!} = \frac{(2+0)\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{1}{12}$$
$$a_5 = \frac{\left(2 + sin\frac{5\pi}{2}\right)\cos 5\pi}{5!} = \frac{(2+1)\cdot(-1)}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{1}{60}$$

Výsledek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!} = -3 + 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{60} + \cdots$

■

Příklad 2.9 *Napišme člen a_n (n-tý člen) řady* $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots$

Řešení

Ve jmenovatelích zlomků jsou sudá čísla 2, 4, 6, ..., která zapíšeme $2n$, kde $n \in N$.

Výsledek: Člen $a_n = \frac{1}{2n}$; příslušnou řadu zapíšeme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$.

■

Příklad 2.10 *Napišme člen a_n řady* $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$

Řešení

V čitateli je přirozené číslo, ve jmenovateli přirozená mocnina čísla 2.

Výsledek: Člen $a_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

■

Příklad 2.11 *Napišme člen a_n řady* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$

Řešení

Ve jmenovateli jsou druhé mocniny přirozených čísel.

Výsledek: Člen $a_n = \frac{1}{n^2}$.

■

Příklad 2.12 *Napišme člen a_n řady* $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\cdots$

Řešení

V čitatelích jsou přirozená čísla $n \geq 3$, ve jmenovatelích, druhá mocnina přirozeného čísla počínaje 2^2.

Výsledek: Člen $a_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}$.

■

Příklad 2.13 *Napišme člen a_n řady* $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots$

Řešení

Ve jmenovateli je vždy součin po sobě jdoucích lichých čísel, tj. $(2n-1)$ a $(2n+1)$.

Výsledek: Člen $a_n = \frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}$.

■

Příklad 2.14 *Napišme člen a_n řady* $3+\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{6}+\frac{3^4}{24}+\frac{3^5}{120}+\cdots$

Řešení

V čitateli je přirozená mocnina čísla 3, ve jmenovateli součin přirozených čísel $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots$

Výsledek: Člen $a_n = \frac{3^n}{n!}$.

■

Příklad 2.15 *Napišme člen a_n řady* $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\cdots$

Řešení

Liché členy řady jsou lichá přirozená čísla. Sudé členy řady jsou převrácené hodnoty sudých přirozených čísel.

Výsledek: Člen $a_n = n^{(-1)^{n-1}}$.

■

Příklad 2.16 *Napišme první dva členy a n-tý člen řady, známe-li posloupnost jejích částečných součtů* $\{s_n\} = \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. *Pokud řada konverguje, určíme i její součet.*

Řešení

Člen $a_1 = s_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$

Člen $a_2 = s_2 - s_1 = s_2 - a_1 = \frac{(-1)^2}{2} - (-1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

Člen $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} = (-1)^n \frac{n-1-(-1)n}{n(n-1)} = (-1)^n \frac{2n-1}{n(n-1)}$ pro $n > 1$.

Součet řady

$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n} \cdot (-1)^n\right] = 0$, protože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená.

Výsledek: Členy řady jsou: $a_1 = -1, a_2 = \frac{3}{2}, a_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n(n-1)}$ pro $n > 1$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n(n-1)}$ konverguje a má součet $s = 0$.

■

Příklad 2.17 *Napišme první dva členy a n-tý člen řady, známe-li posloupnost jejích částečných součtů* $\{s_n\} = \left\{\frac{2}{n} - \frac{5n}{n+1}\right\}$. *Určíme i součet řady.*

Řešení

Člen $a_1 = s_1 = \frac{2}{1} - \frac{5\cdot 1}{1+1} = 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$.

Člen $a_2 = s_2 - s_1 = s_2 - a_1 = \frac{2}{2} - \frac{5\cdot 2}{2+1} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{10}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{11}{6}$

Člen $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{2}{n} - \frac{5n}{n+1} - \left(\frac{2}{n-1} - \frac{5(n-1)}{(n-1)+1}\right) = \frac{2}{n} - \frac{5n}{n+1} - \frac{2}{n-1} + \frac{5n-5}{n} =$

$$= 5 - \frac{3}{n} - \frac{5n}{n+1} - \frac{2}{n-1} =$$

$$= \frac{5n(n^2-1) - 3(n^2-1) - 5n^2(n-1) - 2n(n+1)}{n(n-1)(n+1)} =$$

$$= \frac{5n^3 - 5n - 3n^2 + 3 - 5n^3 + 5n^2 - 2n^2 - 2n}{n(n^2-1)} = \frac{3-7n}{n(n^2-1)}$$

Součet řady $\mathrm{s} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{s_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\mathrm{n}} - \frac{5\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\mathrm{n}} - \lim_{n\to\infty} \frac{5}{1+\frac{1}{\mathrm{n}}} = 0 - 5 = -5$

Výsledek: Členy řady jsou: $a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = -\frac{11}{6}$, $a_n = \frac{3-7n}{n(n-1)}$ pro $n > 1$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-7n}{n(n-1)}$ konverguje a má součet $s = -5$.

■

Příklad 2.18 *Napišme první dva členy a n-tý člen řady, známe-li posloupnost $\{s_n\}$ jejích částečných součtů: $s_1 = 0$ a $s_n = \frac{1}{(n-1)^2}$ pro $n > 2$. Určíme i součet řady.*

Řešení

Víme, že $s_1 = 0$, tedy $a_1 = s_1 = 0$

Člen $a_2 = s_2 - s_1 = \frac{1}{(2-1)^2} - 0 = 1$

Člen $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{[(n-1)-1]^2} = \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{(n-2)^2} = \frac{(n-2)^2-(n-1)^2}{(n-1)^2(n-2)^2} = \frac{3-2n}{(n-1)^2(n-2)^2}$

Součet řady $\mathrm{s} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{s_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\mathrm{n}-1)^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Výsledek: Členy řady jsou: $a_1 = 0, a_2 = 1$, $a_n = \frac{3-2n}{(n-1)^2(n-2)^2}$ pro $n > 2$.

Řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3-2n}{(n-1)^2(n-2)^2}$ konverguje a má součet $s = 0$.

■

Příklad 2.19 *Napišme první dva členy a n-tý člen řady, známe-li posloupnost jejích částečných součtů $\{s_n\} = \{arctg\, n\}$. Určíme i součet řady.*

Řešení

Člen $a_1 = s_1 = arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$.

Člen $a_2 = s_2 - s_1 = arctg\ 2 - \frac{\pi}{4}$.

Člen $a_n = s_n - s_{n-1} = arctg\, n - arctg\, (n-1)$.

Součet řady $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} arctg \quad = [arctg\ \infty] = \frac{\pi}{2}$.

Výsledek: Členy řady jsou: $a_1 = \frac{\pi}{4}, a_2 = arctg\ 2 - \frac{\pi}{4}$, $a_n = arctg\, n - arctg\, (n-1)$.

Řada $\sum_{n=3}^{\infty}[arctg\, n - \ arctg\, (n-1)]$ konverguje a má součet $s = \frac{\pi}{2}$.

■

Příklad 2.20 *Užitím definice součtu* s *řady vyšetříme konvergenci řady* $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Řešení

Zlomek $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ rozložíme na parciální (částečné) zlomky.

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{A}{3n-2}+\frac{B}{3n+1};A,B\in R$$

$$1=A(3n+1)+B(3n-2)$$

Dosadíme do rovnice $n=-\frac{1}{3}$ a $n=\frac{2}{3}$ a vypočítáme A a B.

$$n=-\frac{1}{3}:1=A\cdot 0+B(-1-2)\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

$$n=\frac{2}{3}:1=A(2+1)+B\cdot 0\Rightarrow A=\frac{1}{3}$$

Potom $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{\frac{1}{3}}{3n-2}-\frac{\frac{1}{3}}{3n+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$

N-tý člen posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$ je

$$s_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\cdots+\frac{1}{3n-5}-\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{s_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)\right]=\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}=s$$

Limita p-sti $\{s_n\}$ je vlastní.

Výsledek: Řada $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ konverguje a má součet $s=\frac{1}{3}$.

Geometrická řada

Připomínáme:

Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{aq^{n-1}}$

konverguje pro $|\boldsymbol{q}| < \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{q} \in (-\mathbf{1}; \mathbf{1})$ **a má součet** $\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{q}}$

diverguje pro $|\boldsymbol{q}| \geq \mathbf{1}$

Podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q, q \in R$ je kvocient geometrické řady; q nezávisí na n, je to konstanta.

Příklad 2.21 *Rozhodněme, zda je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ *geometrická*; pokud ano, stanovíme její součet.

Řešení

Zjistíme, zda je podíl dvou po sobě následujících členů řady konstantní.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2(n+1)-1}}{\frac{1}{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

Podíl se mění v závislosti na n, není tedy konstantní, řada není geometrická.

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ není geometrická řada.

$\blacksquare$

Příklad 2.22 *Rozhodněme, zda je řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5 \cdot 4^{n+1}}$ *geometrická; pokud ano, stanovíme její součet.*

Řešení

Podíl
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{5 \cdot 4^{(n+1)+1}}}{\frac{3^n}{5 \cdot 4^{n+1}}} = \frac{3^{n+1} \cdot 5 \cdot 4^{n+1}}{5 \cdot 4^{n+2} \cdot 3^n} = \frac{3}{4} = q$$

je konstantní (nezávisí na n), řada je geometrická. Její kvocient je $q = \frac{3}{4}$.

Řada konverguje, protože $q = \frac{3}{4} \in (-1; 1)$. Její součet vypočteme podle vzorce $s = \frac{a_1}{1-q}$.

$$a_1 = \frac{3^1}{5 \cdot 4^{1+1}} = \frac{3}{80}$$

$$s=\frac{\frac{3}{80}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{80}}{\frac{1}{4}}=\frac{3\cdot 4}{80}=\frac{3}{20}$$

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5\cdot 4^{n+1}}$ je geometrická a má součet $s=\frac{3}{20}$.

■

Příklad 2.23 *Rozhodněme, zda je řada* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n\cdot 3^n}$ *geometrická; pokud ano, stanovíme její součet.*

Řešení

Podíl $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2^{(n+1)+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{2^{(n+1)}}{n\cdot 3^n}}=\frac{2^{n+2}\cdot n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\cdot 2^{(n+1)}}=\frac{2n}{3(n+1)}$$

závisí na n, řada není geometrická.

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n\cdot 3^n}$ není geometrická řada.

■

Příklad 2.24 Rozhodněme, zda je řada $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\mathrm{n}}.3^{\mathrm{n}-1}}$ geometrická; pokud ano, stanovíme její součet.

Řešení

Podíl $$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}\cdot 3^{(n+1)-1}}}{\frac{1}{2^n\cdot 3^{n-1}}}=\frac{2^n\cdot 3^{n-1}}{2^{n+1}\cdot 3^n}=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}=q$$

je konstantní (nezávisí na n), řada je geometrická. Její kvocient je $q=\frac{1}{6}$.

Protože $q=\frac{1}{6}\in(-1;1)$, řada konverguje a má součet

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2^1\cdot 3^{1-1}}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n.3^{n-1}}$ je geometrická a má součet $s=\frac{3}{5}$.

■

Příklad 2.25 Rozhodněme, zda je řada $\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} 7\cdot\frac{3^{\mathrm{n}}}{5\cdot 2^{\mathrm{n}+1}}$ geometrická; pokud ano, stanovíme její součet.

Řešení

Podíl
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{7\cdot\frac{3^{n+1}}{5\cdot 2^{(n+1)+1}}}{7\cdot\frac{3^n}{5\cdot 2^{n+1}}}=\frac{3^{n+1}\cdot 2^{n+1}}{3^n\cdot 2^{n+2}}=\frac{3}{2}=q$$

je konstantní, nemění se v závislosti na n.

Řada je geometrická, ale její kvocient $q=\frac{3}{2}\notin(-1;1)$, což znamená, že řada diverguje k plus nekonečnu ($s=+\infty$).

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 7\cdot\frac{3^n}{5\cdot 2^{n+1}}$ je geometrická, diverguje.

■

Příklad 2.26 *Rozhodněme, zda je řada $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2n}$ geometrická; pokud ano, stanovíme její součet.*

Řešení

Podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{10^{-2(n+1)}}{10^{-2n}}=\frac{10^{-2n}\cdot 10^{-2}}{10^{-2n}}=10^{-2}=\frac{1}{100}=q$
je konstantní, řada je geometrická a konverguje, protože $q=\frac{1}{100}\in(-1;1)$.

Určíme součet:

$$a_1=10^{-2}=\frac{1}{100}$$

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{1}{99}$$

Výsledek: Řada$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-2n}$ je geometrická a má součet $s=\frac{1}{99}$.

■

Příklad 2.27 *Rozhodněme, zda je řada* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ *geometrická; pokud ano, stanovíme její součet.*

Řešení

Podíl
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{(n+1)-1}}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}}=\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=q$$

je konstantní, řada je geometrická a konverguje, protože $q=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1;1)$.

Určíme součet:

$$a_1=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1-1}=1$$

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

Výsledek Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$ je geometrická a má součet $s=\frac{2}{2+\sqrt{2}}$.

■

Příklad 2.28 *Rozhodněme, zda je řada* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n\, ln\ \, ^n}$ *geometrická; pokud ano, stanovíme její součet.*

Řešení

Upravíme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n\, ln3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n\, n\, ln3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\, ln3}$

Podíl
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{3^{n+1}\ln 3}}{\frac{1}{3^n\ln 3}}=\frac{1}{3}=q$$

je konstantní, řada je geometrická a konverguje, protože

$$|q|=\frac{1}{3}\in(-1{,}1).$$

$$a_1=\frac{1}{3^1\ln 3^1}=\frac{1}{3\ln 3}$$

Potom

$$s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3\ln 3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3\ln 3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2\ln 3}=\frac{1}{\ln 9}.$$

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n \ln 3^n}$ je geometrická a má součet $s = \frac{1}{\ln}$.

■

Příklad 2.29 *Napišme první 3 členy řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-3}\right)^n$, $x \in R$ *a rozhodněme, zda je geometrická. Udáme, pro která* x *existuje součet řady a stanovíme jej.*

Řešení

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-3}\right)^n = \frac{1}{x-3} + \left(\frac{1}{x-3}\right)^2 + \left(\frac{1}{x-3}\right)^3 + \cdots$, obor řady jsou reálná čísla, ale $x \neq 3$.

Podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{x-3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{x-3}\right)^n} = \frac{1}{x-3}$ při pevně zvoleném x nezávisí na n, řada je geometrická a její kvocient $q = \frac{1}{x-3}$.

Geometrická řada konverguje, když $|q| < 1$, tj. $\left|\frac{1}{x-3}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x-3} < 1$

Vyřešíme nerovnici:

Pro $x - 3 > 0$ obdržíme $-x + 3 < 1 < x - 3$, tj. $x > 3, x > 2$ a $x > 4$.

Určíme průnik intervalů: $(3, \infty) \cap (2, \infty) \cap (4, \infty)$, obdržíme $x \in (4, \infty)$.

Pro $x - 3 < 0$ obdržíme $-x + 3 > 1 > x - 3$, tj. $x < 3, x < 2$ a $x < 4$.

Určíme průnik intervalů: $(-\infty, 3) \cap (-\infty, 2) \cap (-\infty, 4)$, obdržíme $x \in (-\infty, 2)$.

Součet řady

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{x-3}}{1 - \frac{1}{x-3}} = \frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{x-3-1}{x-3}} = \frac{1}{x-4}.$$

Výsledek: Součet geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-3}\right)^n$ závisí na hodnotě x, proto jej označíme $s(x) = \frac{1}{x-4}$ a existuje pro $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$.

■

Příklad 2.30 *Rozhodněme, pro která* $k \in R$ *konverguje geometrická řada*

$$10k + 100k^2 + \cdots + 10^n k^n + \cdots$$

Řešení

Je to geometrická řada, protože podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}k^{n+1}}{10^n k^n} = 10k$ je konstantní pro pevné k.

Kvocient řady $q = 10k$.

Geometrická řada konverguje, je-li $|q| < 1 \Leftrightarrow |10k| < 1 \Rightarrow 10|k| < 1 \Rightarrow |k| < \frac{1}{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow k \in \left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right).$$

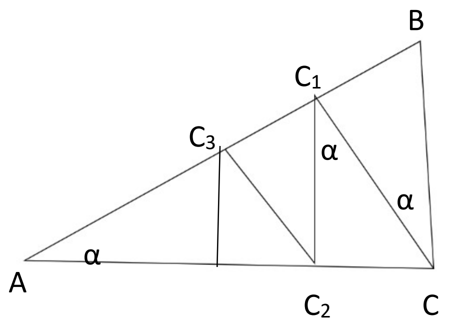
Poněvadž $a_1 = 10k, q = 10k$ je součet řady

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{10k}{1-10k}.$$

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n k^n = \sum_{n=1}^{\infty}(10k)^n$ konverguje pro $k \in \left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$ a má součet $s = \frac{10}{1-10k}$.

■

Příklad 2.31 *Vypočítejme délku l lomené čáry $CC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \cdots$ sestrojené v pravoúhlém trojúhelníku ABC, jehož jeden z ostrých úhlů je α, viz obrázek*



Řešení

V pravoúhlém trojúhelníku BCC_1 je $cos\alpha = \frac{CC_1}{BC} \Rightarrow CC_1 = BC \cdot cos\alpha$

v pravoúhlém trojúhelníku CC_1C_2 je $cos\alpha = \frac{C_1C_2}{CC_1} \Rightarrow C_1C_2 = CC_1 \cdot cos\alpha = BC \cdot cos^2\alpha$.

Zřejmě $C_2C_3 = BCcos^3\alpha$ atd. $C_{n-1}C_n = BCcos^n\alpha$.

Řada $CC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \cdots = BC \cdot cos\alpha + BC \cdot cos^2\alpha + BCcos^3\alpha + \cdots$
je geometrická řada s kvocientem $q = cos\alpha$, pro nějž platí $|cos\alpha| < 1$, poněvadž α je ostrý úhel a $a_1 = BCcos\alpha$. Tato řada konverguje a její součet $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{BCcos\alpha}{1-cos\alpha}$.

Např. je-li $\alpha = \frac{\pi}{3}$ a $BC = 4cm$, pak délka lomené čáry je $\frac{4cos\frac{\pi}{3}}{1-cos\frac{\pi}{3}} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

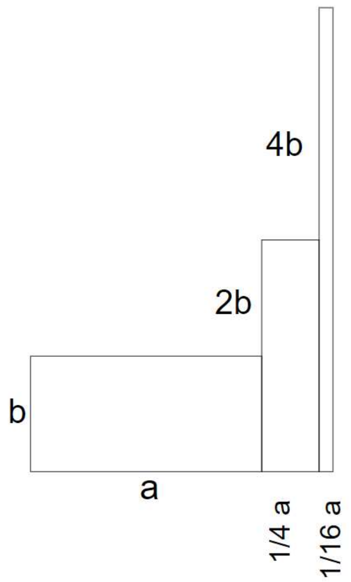
Délka lomené čáry $l = 4cm$.

Výsledek: Délka l lomené čáry je $l = \frac{BCcos\alpha}{1-cos}$.

■

Příklad 2.32 *Vypočítejme obsah obrazce utvořeného z nekonečně mnoha obdélníků, jestliže se délky jejich vodorovných stran zmenšují v poměru 4:1 a délky jejich svislých stran se zvětšují v poměru 1:2, přičemž obsah výchozího obdélníku je* $48cm^2$.

Řešení



Označme strany obdélníku a a b, tedy $ab = 48cm^2$, součet obsahů všech obdélníků P.

$$P = ab + \frac{a}{4} \cdot 2b + \frac{a}{16} \cdot 4b + \frac{a}{64} \cdot 8b + \frac{a}{4 \cdot 64} \cdot 16b + \cdots$$

$$P = ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}ab + \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}ab + \cdots$$

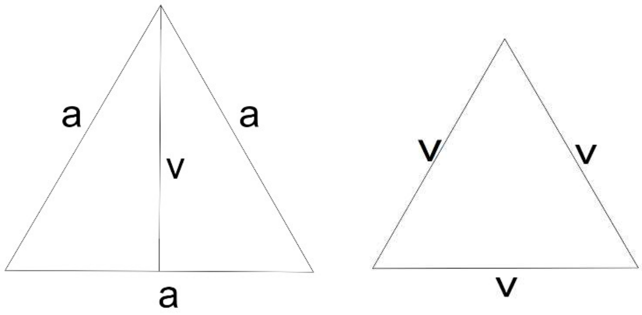
Obdrželi jsme geometrickou řadu, kde $a_1 = ab$ a kvocient $q = \frac{1}{2} \in (-1; 1)$. Tato řada konverguje a má součet $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{ab}{1-\frac{1}{2}} = 2ab$.

Výsledek: Hledaný obsah $P = 2 \cdot 48cm^2 = 96cm^2$.

■

Příklad 2.33 *Je dán rovnostranný trojúhelník o straně $a > 0$; z jeho tří výšek je sestaven nový trojúhelník, z jeho výšek pak další trojúhelník atd. Vypočítejme obsah P všech takových trojúhelníků.*

Řešení:



Pro rovnostranný trojúhelník o straně $a > 0$ platí vzorce:

Výška $v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2-a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$

Obsah $P = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

Výška trojúhelníku Δ_1 je $v_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, obsah P_1 trojúhelníka Δ_1 je $P_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$

Strana trojúhelníku Δ_2 je $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ a jeho obsah $P_2 = \frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}.\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$

Strana trojúhelníku Δ_3 je $\frac{a}{4}3 = \frac{3}{4}a$ a jeho obsah $P_3 = \frac{\left(\frac{3}{4}a\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{64}$ atd.

Potom $P_n = \frac{3^{n-1}a^2\sqrt{3}}{4^n}$

Obsah všech trojúhelníků $P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3a^2}{16}\sqrt{3} + \frac{9a^2}{64}\sqrt{3} + \cdots$

$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{3^n a^2\sqrt{3}}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{3^{n-1}a^2\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$, což je konstanta, řada je geometrická.

Obdrželi jsme geometrickou řadu v níž $a_1 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ a kvocient $q = \frac{3}{4} \in (-1; 1)$. Řada konverguje a má součet $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}{1-\frac{3}{4}} = \frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} = a^2\sqrt{3}.$

Výsledek: Obsah P všech trojúhelníků je P=$a^2\sqrt{3}$.

■

Věta o součtu řad a násobku řady číslem

Připomínáme:

Konvergují-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konvergují i řady $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konstanta $k \in R$.

Příklad 2.34 *Vypočítejme součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$.

Řešení

Nejprve upravíme n-tý člen řady.

$$a_n = \frac{2^n + 1}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Výraz $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ je n-tý člen řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Zřejmě $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ je geometrická řada, $a_1 = \frac{2}{3}$, $q = \frac{2}{3} \in (-1; 1)$, řada konverguje a má součet $s_1 = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

Obdobně: $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ je n-tý člen řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Zřejmě $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ je geometrická řada, $a_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3} \in (-1; 1)$, řada konverguje a má součet $s_2 = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

Z konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ plyne konvergence řady

$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$, jejíž součet $s = s_1 + s_2$, tedy $s = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n}$ konverguje a má součet $s=\frac{5}{2}$.

■

Příklad 2.35 *Vypočítejme součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+2}+3\cdot 5^n}{7\cdot 20^{n-1}}$.

Řešení

Nejprve upravíme n-tý člen řady.

$$a_n=\frac{4^{n+2}+3\cdot 5^n}{7\cdot 20^{n-1}}=\frac{4^{n+2}}{7\cdot 20^{n-1}}+\frac{3\cdot 5^n}{7\cdot 20^{n-1}}=\frac{4^3\cdot 4^{n-1}}{7\cdot 20^{n-1}}+\frac{3\cdot 5\cdot 5^{n-1}}{7\cdot 20^{n-1}}=$$
$$=\frac{64}{7}\cdot\left(\frac{4}{20}\right)^{n-1}+\frac{15}{7}\cdot\left(\frac{5}{20}\right)^{n-1}=\frac{64}{7}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{15}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Výraz $\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ je člen geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$; $a_1=1, q=\frac{1}{5}\in(-1;1)$. Tato řada konverguje a má součet $s_1=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}$

Výraz $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ je člen geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; $a_1=1, q=\frac{1}{4}\in(-1;1)$. Tato řada konverguje a má součet $s_2=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$, pak konverguje i její násobek číslem $\frac{64}{7}$ a platí, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ je $\frac{64}{7}s_1$. Totéž platí i pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$a její násobek, tj. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}==\frac{15}{7}s_2$.

Z konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{64}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ plyne konvergence řady

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{64}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+\frac{15}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+2}+3\cdot 5^n}{7\cdot 20^{n-1}}$ a ta má součet

$$s=\frac{64}{7}s_1+\frac{15}{7}s_2=\frac{64}{7}\cdot\frac{5}{4}+\frac{15}{7}\cdot\frac{4}{3}=\frac{80+20}{7}=\frac{100}{7}$$

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+2}+3\cdot 5^n}{7\cdot 20^{n-1}}$ konverguje a její součet $s=\frac{100}{7}$.

■

Příklad 2.36 *Vypočítejme součet řady* $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{16}+\frac{2}{27}-\frac{1}{64}+\cdots$

Řešení

Liché členy řady vyjádříme jako $\frac{2}{3^n}$ a sudé jako $\frac{1}{4^n}$.

Člen a_n dané řady můžeme zapsat takto: $a_n = \frac{2}{3^n} - \frac{1}{4^n}$. Potom symbolický zápis řady je $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{3^n} - \frac{1}{4^n}\right]$.

V řadě $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ můžeme konstantu 2 vytknout, tj. $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ je geometrická řada; $a_1 = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3} \in (-1; 1)$, řada konverguje a má součet $s_1 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ je geometrická řada; $a_1 = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{4} \in (-1; 1)$, řada konverguje a má součet $s_1 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Z konvergence řad $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{3^n} - \frac{1}{4^n}\right]$ a její součet $s = 2 \cdot s_1 - s_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Výsledek: Daná řada konverguje a má součet $s = \frac{2}{3}$.

■

Poznámka.

Užitím znalosti výpočtu součtu geometrické řady lze sečíst řadu tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$, kde $\{a_n\}$ je aritmetická posloupnost a $\{b_n\}$ posloupnost geometrická s kvocientem $|q| < 1$.

Příklad 2.37 *Určíme součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

Řešení

Řada splňuje výše uvedené podmínky, protože ji můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n-1) \cdot \frac{1}{2^n}\right].$$

Posloupnost $\{2n - 1\}$ je aritmetická, protože rozdíl jejích dvou po sobě jdoucích členů - diference d - je konstantní.

Vskutku $a_{n+1} - a_n = [2(n+1) - 1] - (2n - 1) = 2n + 1 - 2n + 1 = 2 = d$

Posloupnost $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ je geometrická, protože $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} = q \in (-1; 1)$.

Vyjádříme součet s řady jako součet jejich členů, vynásobíme jej kvocientem $q = \frac{1}{2}$ a odečteme jej od původního součtu s.

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \cdots / \\ \tfrac{s}{2} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{5}{16} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad \text{odečteme}$$

$$s - \frac{s}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\right) + \left(\frac{7}{16} - \frac{5}{16}\right) + \cdots$$

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \cdots$$

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)}_{\text{geometrická řada}}$$

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$s = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ konverguje a má součet $s = 3$.

■

Příklad 2.38 *Určeme součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$.

Řešení

Upravíme n-tý člen řady na tvar $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n \cdot \frac{1}{3^{n-1}}\right]$. Posloupnost $\{n\}$ je aritmetická, posloupnost $\left\{\frac{1}{3^{n-1}}\right\}$ je geometrická s kvocientem $q = \frac{1}{3} \in (-1; 1)$.

Užijeme postup uvedený podrobně v příkladu *2.36*

Vyjádříme součet řady

$$\left.\begin{aligned} s &= 1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{5}{3^4}+\cdots, \\ \frac{1}{3}s &= \quad\;\; \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots \end{aligned}\right\} \text{odečteme}$$

$$s-\frac{1}{3}s = \underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots}_{\text{geometrická řada}}$$

$$\frac{2}{3}s = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{2}{3}s = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$s = \frac{9}{4}$$

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$ konverguje a má součet $s=\frac{9}{4}$.

■

Příklad 2.39 *Určeme součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+1}}{5^n}$.

Řešení

Upravíme n-tý člen řady na tvar $\sum_{n=1}^{\infty}\left[3n\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$. Posloupnost $\{3n\}$ je aritmetická, s diferencí $d=3$, p-st $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}$ je geometrická s kvocientem $q=\frac{3}{5}\in(-1,1)$.

Vyjádříme součet řady

$$\left.\begin{aligned} s &= 3\left(\frac{3}{5}\right)+6\left(\frac{3}{5}\right)^2+9\left(\frac{3}{5}\right)^3+12\left(\frac{3}{5}\right)^4+\cdots \;/\cdot \\ \frac{3}{5}s &= 3\left(\frac{3}{5}\right)^2+6\left(\frac{3}{5}\right)^3+9\left(\frac{3}{5}\right)^4+\cdots \end{aligned}\right\} \text{odečteme}$$

$$s-\frac{3}{5}s = 3\left(\frac{3}{5}\right)+3\left(\frac{3}{5}\right)^2+3\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots$$

$$\frac{2}{5}s = 3\underbrace{\left[\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots\right]}_{\text{Geometrická řada}}$$

$$\frac{2}{5}s = 3 \cdot \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$s = \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{45}{4}$$

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n+1}}{5^n}$ konverguje a má součet $s = \frac{45}{4}$.

■

Příklad 2.40 *Určeme součet řady* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a+n}{2^n}$.

Řešení

Upravíme n-tý člen řady na tvar $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(a+n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$. Posloupnost $\{a+n\}$ je aritmetická, posloupnost $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ je geometrická s kvocientem $q = \frac{1}{2} \in (-1; 1)$.

Vyjádříme součet řady

$$\left.\begin{aligned} s &= a + \frac{a+1}{2} + \frac{a+2}{2^2} + \frac{a+3}{2^3} + \cdots / \\ \frac{s}{2} &= \qquad \frac{a}{2} + \frac{a+1}{2^2} + \frac{a+2}{2^3} + \cdots \end{aligned}\right\} \text{Odečteme}$$

$$s - \frac{s}{2} = a + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots}_{\text{geometrická řada}}$$

$$\frac{s}{2} = a + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = a + 1$$

$$s = 2(a+1)$$

Výsledek: Daná řada konverguje a má součet $s = 2(a+1)$.

■

Příklad 2.41 *Určeme součet řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log2^n}{2^n}$.

Řešení

Upravíme n-tý člen řady na tvar $\sum_{n=1}^{\infty} \left[nlog2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$. Posloupnost $\{nlog2\}$ je aritmetická $(d = log2)$, posloupnost $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ je geometrická s kvocientem $q = \frac{1}{2} \in (-1; 1)$.

Vyjádříme součet řady

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{log2}{2} + \frac{2log2}{2^2} + \frac{3log2}{2^3} + \frac{4log2}{2^4} + \cdots / \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{s}{2} &= \frac{log2}{2^2} + \frac{2log2}{2^3} + \frac{3log2}{2^4} + \cdots . \end{aligned}\right\} \text{odečteme}$$

$$s - \frac{s}{2} = \frac{log2}{2} + \frac{log2}{2^2} + \frac{log2}{2^3} + \frac{log2}{2^4} + \cdots$$

$$\frac{s}{2} = log2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots\right)}_{\text{geometrická řada}}$$

$$\frac{s}{2} = log2 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\right) = log2 \cdot 1 = log2$$

$$s = 2log2 = log2^2 = log4$$

Výsledek: Řada$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log2^n}{2^n}$ konverguje a má součet $s = log4$.

■

Nutná podmínka konvergence řady

Připomínáme:

Věta (nutná podmínka konvergence řady):

Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důsledek:

Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ nebo $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 2.40 *Rozhodněme o divergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n}{n^2+2}$.

Řešení

Vypočteme $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n}{n^2+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 3;$

Není splněna nutná podmínka konvergence řady, poněvadž $\lim a_n = 3 \neq 0$.

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n}{n^2+2}$ diverguje.

■

Příklad 2.42 *Rozhodněme o divergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3+2n^2+1}$.

Řešení

Vypočteme $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^3+2n^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}} = 0\,;\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Nutná podmínka konvergence řady je splněna, řada může, ale nemusí konvergovat.

Výsledek: O divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^3+2n^2+1}$ nelze rozhodnout.

■

Příklad 2.43 *Rozhodněme o divergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{arctg\, n}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{arctg\, n} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi};$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\pi} \neq 0.$$

Není splněna nutná podmínka konvergence řady.

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{arctg}\, n}$ diverguje.

■

Příklad 2.44 *Rozhodněme o divergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{5}{n}}$.

Řešení

Vypočteme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{5}{n}} = e^0 = 1$, protože $\lim \frac{5}{n} = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \neq 0.$$

Nutná podmínka konvergence řady není splněna.

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{5}{n}}$ diverguje.

■

Příklad 2.45 *Rozhodněme o divergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$.

Řešení

Vypočteme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ – ta neexistuje.

Nutná podmínka konvergence řady není splněna.

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ diverguje.

■

Příklad 2.46 *Rozhodněme o divergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$.

Řešení

Vypočteme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n+1}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1} = 0$

Nutná podmínka konvergence řady je splněna.

Výsledek: O divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n}$ nelze rozhodnout.

■

Příklad 2.47 *Rozhodněme, zda může být řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosn}{n(n+2)}$ *konvergentní.*

Řešení

Vypočteme

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n(n+2)} \cdot \cos n\right) = 0$, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$ a posloupnost $\{\cos n\}$ je omezená, neboť $\forall n \in N$ je $|\cos n| \leq 1$. Nutná podmínka konvergence řady je splněná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n(n+2)}$ může (ale nemusí) být konvergentní.

■

Příklad 2.48 *Rozhodněme, zda může být řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$ *konvergentní.*

Řešení

Vypočteme

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{1+4^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{4^n}}{\frac{1+4^n}{4^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} = 0$

Nutná podmínka konvergence řady je splněná.

Výsledek: Řada může (ale nemusí) být konvergentní.

■

Příklad 2.49 *Rozhodněme, zda může být řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{6n+2}$ *konvergentní.*

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-7}{6n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{7}{n}}{6 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Nutná podmínka konvergence řady není splněna, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, řada diverguje.

Výsledek: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{6n+2}$ nemůže být konvergentní, řada je divergentní.

■

Příklad 2.50 *Rozhodněme, zda může být řada* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+1)\cdot 5^{2n}}$ *konvergentní.*

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(3n+1)\cdot 5^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(3n+1)\cdot 5^{2n}} \cdot (-1)^{n+1}\right] = 0$$

Posloupnost $\{(-1)^{n+1}\}$ je omezená a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+1)\cdot 5^{2n}} = \left[\frac{1}{\infty}\right]$=0.

Nutná podmínka konvergence řady je splněna, $lim\ a_n = 0$.

Výsledek: Řada může (ale nemusí) být konvergentní.

■

Přehled význačných řad

(1) Geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

konverguje pro $|q| < 1$ a má součet $s = \frac{a}{1-q}$

diverguje pro $|q| \geq 1$

(2) „Užitečná“ řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \longrightarrow$$

konverguje a má součet $s = 1$

(3) Řada typu

$$\sum_{n\to\infty}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konverguje pro $k > 1$

diverguje pro $k \leq 1$ $(k \in \mathbb{R})$

(4) Harmonická řada (speciální případ řady (3))

$$\sum_{n\to\infty}^{\infty} \frac{1}{n} \longrightarrow$$

diverguje a má součet $s = +\infty$

(5) Leibnizova řada

$$\sum_{n\to\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} \longrightarrow$$ konverguje relativně a má součet $s = \ln 2$

(6) Grandiho řada

$$\sum_{n\to\infty}^{\infty}(-1)^{n} \longrightarrow$$ diverguje (osciluje) a nemá součet

(7) Aritmetická řada

$$\sum[a_1 + (n-1)d] \longrightarrow$$ konverguje pouze pro $a_1 = d = 0$, pak má součet $s = 0$;
jinak diverguje

Poznámky.

1) Geometrickou a harmonickou řadu často užíváme ve srovnávacím kritériu k porovnávání řad.
2) U geometrické řady dovedeme ihned rozhodnout podle jejího kvocientu q, zda konverguje či diverguje.
3) Konvergentní geometrická řada je jednou z mála řad, které umíme sečíst.
4) Stejný konvergenční charakter mají i řady, které vzniknou z výše uvedených řad dosazením $n + l$, $l \in \mathbb{R}$, za n.

Kritéria konvergence a divergence pro řady s nezápornými členy

Úmluva.

Často budeme užívat i stručný symbol $\sum$ místo $\sum_{n=1}^{\infty}$.

Srovnávací kritérium

Připomínáme:

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy takové, že pro skoro všechna n platí $a_n \leq b_n$.

- Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
- Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Příklad 2.51 *Vyšetřeme konvergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

Řešení

Pokusíme se srovnat danou řadu s některou z význačných řad.

Pro každé $n \in N$ platí

$$n^2-4n+5 > n^2-4n+4 = (n-2)^2$$

Potom

$$\frac{1}{n^2-4n+5} < \frac{1}{(n-2)^2}\ , n \neq 2$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-2)^2}$ je řada typu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$, $k = 2 > 1$, a ta je konvergentní. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-2)^2}$ je konvergentní majoranta dané řady, proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$ konverguje.

■

Příklad 2.52 *Vyšetřeme konvergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Řešení

Srovnáme danou řadu s řadou harmonickou. Pro každé $n \in N$ je $\sqrt{n} < n \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$.

Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje, je minorantou řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje.

■

Poznámka.

Je to současně i jedna z význačných řad – řada typu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$, kde $k = \frac{1}{2} < 1$, a ta diverguje.

Příklad 2.53 *Vyšetřeme konvergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

Řešení

Srovnáme danou řadu s řadou harmonickou, tj. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ o níž víme, že diverguje.

Pro každé $n \in N$ platí

$$\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ je divergentní, proto je divergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ a z nerovnosti $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$ plyne i divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

■

Příklad 2.54 *Vyšetřeme konvergenci řady* $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$

Řešení

Zkusíme srovnat naši řadu s některou z význačných řad.

Pro každé $n \in N$ platí

$$\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{1}{(2n-2)^2}=\frac{1}{[2(n-1)]^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(n-1)^2} \quad , n \neq 1$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ je konvergentní, je to řada typu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}, kde\ k=2>1$ tedy konverguje, viz (význačné řady). Proto také řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$ je konvergentní a odtud plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\,(n-1)^2}$ je konvergentní. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\,(n-1)^2}$ konverguje a platí nerovnost $\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{1}{(2n-2)^2}=\frac{1}{[2(n-1)]^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}$, proto řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ konverguje.

Nebo: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[2\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}$ konverguje, je to řada typu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$, kde $k=2>1$. Proto konverguje i její

násobek $\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

■

***Příklad* 2.55** *Zjistěme, zda konverguje řada* $\sum\frac{1}{\sqrt{4^n+n}}$.

Řešení

Pokusíme se srovnat danou řadu s některou z význačných řad.

Pro každé $n \in N$ je $\sqrt{4^n+n}>\sqrt{4^n}=\sqrt{(2^2)^n}=\sqrt{(2^n)^2}=2^n$, potom také

$$0<\frac{1}{\sqrt{4^n+n}}<\frac{1}{2^n}$$

Řada $\sum\frac{1}{2^n}$ je geometrická řada s kvocientem $q=\frac{1}{2}\in(-1,1)$, a ta je konvergentní. Je-li konvergentní majoranta – řada $\sum\frac{1}{2^n}$, pak je konvergentní i minoranta. Řada $\sum\frac{1}{\sqrt{4^n+n}}$ je konvergentní.

■

Příklad 2.56 *Zjistěme, zda konverguje řada* $\sum \frac{4}{\sqrt{n+2}}$.

Řešení

Užijeme srovnávací kritérium.

Pro každé $n \in N$ je $n + 2 \leq n + 2n = 3n$;

odtud $\sqrt{n+2} \leq \sqrt{3n}$

Potom $\frac{1}{\sqrt{n+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{3n}} /4$

$\frac{4}{\sqrt{n+2}} \geq \frac{4}{\sqrt{3n}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$

Řada $\sum \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje (typ řady $\sum \frac{1}{n^k}, k = \frac{1}{2} < 1$) a platí nerovnost $\frac{4}{\sqrt{n+2}} \geq \frac{4}{\sqrt{3n}}$, proto řada $\sum \frac{4}{\sqrt{n+2}}$ je divergentní.

Minoranta diverguje, proto i její majoranta diverguje.

■

Příklad 2.57 *Vyšetřeme konvergenci řady* $\frac{1}{1001} + \frac{1}{2001} + \frac{1}{3001} + \cdots + \frac{1}{1000n} + \cdots$

Řešení

Konvergenci vyšetříme užitím srovnávacího kritéria. Srovnáme danou řadu s harmonickou řadou $\sum \frac{1}{n}$, o níž víme, že diverguje. Odtud, na základě vět o konvergenci a divergenci řad dostaneme, že také řada $\sum \frac{1}{n+1}$ diverguje a násobek této řady, tj. řada $\sum \frac{1}{1000(n+1)}$ také diverguje.

Dále platí nerovnost

$\frac{1}{1000(n+1)} < \frac{1}{1000n+1}$ pro $\forall\, n \in N$. Z toho, že řada $\sum \frac{1}{1000(n+1)}$ diverguje a z nerovnosti $\frac{1}{1000(n+1)} < \frac{1}{1000n}$ plyne, že řada $\sum \frac{1}{1000n}$ diverguje.

■

Příklad 2.58 *Vyšetřeme konvergenci řady* $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \cdots$.

Řešení

Určíme člen a_n řady.

$$a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$$

Zřejmě pro každé $n \in N$ je

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}} \leq \frac{1}{2^{2n-1}}.$$

Řada $\sum \frac{1}{2^{2n-1}}$ je geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{4} \in (-1,1)$, a ta konverguje. Řada $\sum \frac{1}{2^{2n-1}}$ konverguje a platí nerovnost $\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}} \leq \frac{1}{2^{2n-1}}$, proto řada $\sum \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}$ konverguje.

■

D'Alembertovo (podílové) kritérium

Připomínáme limitní formu kritéria:

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a nechť existuje konečná nebo nevlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

- Je – li $L < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- je – li $L > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,
- je – li $L = 1$, pak o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze prostřednictvím limitního podílového kritéria rozhodnout.

Příklad 2.59 *Dokažme konvergenci řady* $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!} + \cdots$ *užitím limitního podílového kritéria.*

Řešení

Vypočítáme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{[2(n+1)+1]!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} =$$

$$= \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 < 1$$

Výsledek: Řada $\sum \frac{1}{(2n+1)!}$ konverguje, protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

■

Příklad 2.60 *Dokažme konvergenci řady* $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$ *užitím limitního podílového kritéria.*

Řešení

Vypočítáme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

Výsledek: Řada $\sum\frac{n}{2^n}$ konverguje, protože $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1.$

■

Příklad 2.61 *Zjistěme, zda konverguje řada* $\sum\frac{4^n n}{1-3^n}$ *.*

Řešení

Pro všechna $n\in N$ je $a_n=\frac{4^n n}{1-3^n}<0.$

Všechny členy řady jsou záporné, proto nejprve provedeme následující úpravu.

$$\sum\frac{4^n n}{1-3^n}=\sum-\frac{4^n n}{3^n-1}=-\sum\frac{4^n n}{3^n-1}$$

Získali jsme řadu $\sum\frac{4^n n}{3^n-1}$ s kladnými členy, o jejíž konvergenci rozhodneme užitím limitního podílového kritéria.

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{n+1}(n+1)}{3^{n+1}-1}}{\frac{4^n n}{3^n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}(n+1)(3^n-1)}{4^n n(3^{n+1}-1)}=$$

$$=4\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=4\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}>1$$

Řada $\sum \frac{4^n n}{3^n - 1}$ diverguje; vynásobíme-li ji číslem -1, pak i řada $\sum \frac{4^n n}{1-3^n}$ diverguje (viz věta o násobku řady konstantou).

Výsledek: Řada $\sum \frac{4^n n}{1-3^n}$ diverguje.

■

Příklad 2.62 *Vyšetřeme konvergenci řady* $\sum \frac{4n-3}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3}\right)^n}$.

Řešení

Užijeme limitní d'Alembertovo kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4(n+1)-3}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}}{\dfrac{4n-3}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n+1)\sqrt{n}\left(\sqrt{3}\right)^n}{(4n-3)\sqrt{n+1}\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(4n+1)\sqrt{n}}{(4n-3)\sqrt{n+1}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{4n-3} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \lim_{n\to\infty} \frac{4+\dfrac{1}{n}}{4-\dfrac{3}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot \sqrt{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

Výsledek: Řada $\sum \frac{4n-3}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3}\right)^n}$ konverguje.

■

Příklad 2.63 *Vyšetřeme konvergenci či divergenci řady* $\sum \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ *užitím vhodného kritéria.*

Řešení

Zvolíme limitní d'Alembertovo kritérium, protože v podílu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ výhodně vykrátíme.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1} 3^n \cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)n!\, n^n}{(n+1)(n+1)^n \cdot n!} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{e} = \frac{3}{e} > 1$$

Výsledek: Řada $\sum \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ diverguje.

■

Příklad 2.64 *Použitím limitního d'Alembertova kritéria vyšetřeme konvergenci či divergenci řady* $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} =$$

(Zjednodušíme složený zlomek a vhodně rozepíšeme faktoriály.)

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{[(n+1)!]^2 \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot (n!)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot (2n)! \cdot (n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)! \cdot (n!)^2} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{4n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{4 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{4} < 1$$

Výsledek: Řada $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konverguje.

■

Příklad 2.65 *Dokažme konvergenci řady* $\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \cdots + \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (4n-3)} + \cdots$ *užitím limitního podílového kritéria.*

Řešení

Vypočítáme $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, přičemž vzniklý složený zlomek upravíme ihned na součin dvou jednoduchých zlomků.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot\ (3n-1)[3(n+1)-1]}{1\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot\ (4n-3)[4(n+1)-3]}\cdot\frac{1\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot\ (4n-3)}{2\cdot 5\cdot\ \dots\ \cdot\ (3n-1)}\right)=$$

Po zkrácení zlomků obdržíme:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}}=\frac{3}{4}<1$$

Výsledek: Řada konverguje, protože $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$.

■

Příklad 2.66 *Dokažme konvergenci řady* $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}+\cdots$ *užitím limitního podílového kritéria.*

Řešení

Vypočítáme $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, přičemž vzniklý složený zlomek ihned zjednodušíme.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot\ (2n-1)[2(n+1)-1]}{3^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{3^n\cdot n!}{1\cdot 3\cdot\ \dots\ \cdot\ (2n-1)}\right)=$$

Po zkrácení zlomků a úpravě $(n+1)!=(n+1)n!$ obdržíme:

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot n!}{3(n+1)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{3}{n}}=\frac{2}{3}<1$$

Výsledek: Daná řada konverguje, protože $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$.

■

Příklad 2.67 *Rozhodněme, pro která* $a,b\in R$ *konverguje nebo diverguje řada*

$$\sum\frac{(a+1)\cdot(2a+1)\cdot\dots\cdot(na+1)}{(b+1)\cdot(2b+1)\cdot\dots\cdot(nb+1)}\ ,a>,b>0.$$

Řešení

Užijeme limitní d'Alembertovo kritérium.

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{(a+1)\cdot(2a+1)\cdot\dots\cdot(na+1)[(n+1)a+1]}{(b+1)\cdot(2b+1)\cdot\dots\cdot(nb+1)[(n+1)b+1]}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(b+1)\cdot(2b+1)\cdot\dots\cdot(nb+1)}{(a+1)\cdot(2a+1)\cdot\dots\cdot(na+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{na+a+1}{nb+b+1}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{a}{n}+\frac{1}{n}}{b+\frac{b}{n}+\frac{1}{b}}=\frac{a}{b}$$

Je-li $\frac{a}{b} < 1$, tj. $a < b$, pak řada konverguje.

Je-li $\frac{a}{b} > 1$, tj. $a > b$, pak řada diverguje.

Pro $a = b$ obdržíme aritmetickou řadu $\sum 1$, a ta diverguje.

Závěr: Daná řada konverguje pro $a < b$ a diverguje pro $a \geq b$.

■

Příklad 2.68 *Dokažme, že platí* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0, k > 0$.

Řešení

Využijeme nutné podmínky konvergence řady.

Výraz $\frac{k^n}{n!}$ budeme považovat za n-tý člen řady $\sum \frac{k^n}{n!}$. Pokud je tato řada konvergentní, pak musí být splněna nutná podmínka konvergence řady, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0$.

Podle limitního podílového kritéria rozhodneme o konvergenci řady.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{k^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k^{n+1} \cdot n!}{k^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{k}{n+1} = \left[\frac{k}{\infty}\right] = 0 < 1$$

Řada $\sum \frac{k^n}{n!}$ konverguje, proto $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k^n}{n!} = 0$, $k > 0$. Tím je důkaz proveden.

■

Příklad 2.69 *Dokažme, že platí* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

Řešení

Využijeme nutné podmínky konvergence řady.

Výraz $\frac{n^n}{(2n)!}$ budeme považovat za n-tý člen řady $\sum \frac{n^n}{(2n)!}$. Pokud je tato řada konvergentní, pak musí být splněna nutná podmínka konvergence řady, tj. musí platit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

O konvergenci řady rozhodneme podle limitního podílového kritéria. Vypočteme $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, přičemž ihned upravíme složený zlomek.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n}{2(n+1)(2n+1)n^n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0\cdot e = 0 < 1$$

Řada $\sum \frac{n^n}{(2n)!}$ konverguje, proto musí platit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!} = 0$. Tím je důkaz proveden.

■

Cauchyovo (odmocninové) kritérium

Připomínáme limitní formu kritéria:

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť existuje konečná nebo nevlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L$.

- Je – li $L < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
- je – li $L > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,
- je – li $L = 1$ nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ prostřednictvím limitního podílového kritéria rozhodnout.

Příklad 2.70 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum\left(\frac{n+2}{2n-3}\right)^n$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n-3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{3}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Výsledek: Řada $\sum\left(\frac{n+2}{2n-3}\right)^n$ konverguje.

■

Příklad 2.71 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum\left(\frac{3n-2}{n+4}\right)^n$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n-2}{n+4}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n}}=3>1$$

Výsledek: Řada $\sum\left(\frac{3n-2}{n+4}\right)^n$ diverguje.

■

Příklad 2.72 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum\frac{1}{(arcsin\frac{1}{n})^n}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(arcsin\frac{1}{n})^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{arcsin\frac{1}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}arcsin\frac{1}{n}}$$

Spočteme limitu jmenovatele zlomku.

$$\lim_{n\to\infty}arcsin\frac{1}{n}=arcsin\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right]=arcsin\,0=0$$

Potom $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{arcsin\frac{1}{n}}=\infty>1$

Výsledek: Řada $\sum\frac{1}{(arcsin\frac{1}{n})^n}$ diverguje.

■

Příklad 2.73 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ \ )^n}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln n}$$

Určíme limitu jmenovatele.

$$\lim_{n\to\infty}\ln n=ln\left[\lim_{n\to\infty}n\right]=ln\,\infty=\infty$$

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0 < 1$

Výsledek: Řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ konverguje.

■

Příklad 2.74 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n^2}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n} = e^3 > 1$$

Výsledek: Řada $\sum \left(\frac{n+3}{n}\right)^{n^2}$ diverguje.

■

Příklad 2.75 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum \left(\frac{3n^2}{8n+5}\right)^{n}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2}{8n+5}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{8n+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{8 + \frac{5}{n}} = \infty > 1$$

Výsledek: Řada $\sum \left(\frac{3n^2}{8n+5}\right)^{n}$ diverguje.

■

Příklad 2.76 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(2+\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= \frac{1^2}{2+0} = \frac{1}{2} < 1$$

Užili jsme známou limitu: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Výsledek: Řada $\sum \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ konverguje.

■

Příklad 2.77 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot e = \frac{e}{3} < 1$$

Výsledek: Řada $\sum \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ konverguje.

■

Příklad 2.78 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum \frac{n}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^{2}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}} = \frac{9}{4} > 1$$

Užili jsme známou limitu: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Výsledek: Řada $\sum \frac{n}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$ diverguje.

■

Příklad 2.79 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum \left[arcsin\left(\frac{n\sqrt{3}}{2n+1}\right)\right]^{n}$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left[arcsin\left(\frac{n\sqrt{3}}{2n+1}\right)\right]^{n}} = \lim_{n\to\infty}\ arcsin\left(\frac{n\sqrt{3}}{2n+1}\right) = arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{3}}{2n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Výsledek: Řada $\sum \left[arcsin\left(\frac{n\sqrt{3}}{2n+1}\right)\right]^{n}$ diverguje.

■

Příklad 2.80 *Užitím limitního odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum arctg^n\left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)$.

Řešení

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{arctg^n\left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}arctg\frac{2n^2}{2n^2-1}=arctg1=\frac{\pi}{4}<1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{2n^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2-\frac{1}{n}}=1$$

Výsledek: Řada $\sum arctg^n\left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)$ konverguje.

■

Příklad 2.81 *Užitím srovnávacího a odmocninového kritéria rozhodněme o konvergenci řady* $\sum\frac{(n+2)^n}{(4n+1)^n+5}$.

Řešení

Pro každé $n\in N$ je $\frac{(n+2)^n}{(4n+1)^n+5}<\frac{(n+2)^n}{(4n+1)^n}=\left(\frac{n+2}{4n+1}\right)^n$

Užijeme limitní odmocninové kritérium pro řadu $\sum\left(\frac{n+2}{4n+1}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{4n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{4n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{1}{n}}=\frac{1}{4}<1$$

Na základě konvergence řady $\sum\left(\frac{n+2}{4n+1}\right)^n$ a srovnávacího kritéria dostáváme, že řada $\sum\frac{(n+2)^n}{(4n+1)^n+5}$ konverguje.

■

Raabeovo kritérium

Připomínáme limitní formu kritéria:

Nechť existuje konečná nebo nevlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]=L$.

- Je – li $L>1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje,
- je – li $L<1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ diverguje,
- je – li $L=1$ nelze o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ prostřednictvím limitního Raabeova kritéria rozhodnout.

Příklad 2.82 *Rozhodněme o konvergenci řady* $\sum\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Řešení

Zkusíme užít podílové kritérium. Vypočteme $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, přičemž ihned upravíme složený zlomek.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{[3(n+1)-2][3(n+1)+1]}\cdot(3n-2)(3n+1)=$$

$$=\frac{(3n-2)(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{9n^2-3n-2}{9n^2+15n+4}$$

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2-3n-2}{9n^2+15n+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{9+\frac{15}{n}+\frac{4}{n^2}}=1$$

Podílové kritérium nedává výsledek. Užijeme Raabeovo kritérium, které je „silnější."

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{9n^2+15n+4}{9n^2-3n-2}-1\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{9n^2+15n+4-9n^2+3n+2}{9n^2-3n-2}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(18n+6)}{9n^2-3n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{18n^2+6n}{9n^2-3n-2}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{18+\frac{6}{n}}{9-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}=2>1$$

Výsledek: Řada $\sum\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ konverguje.

■

Příklad 2.83 *Rozhodněme o konvergenci řady* $\sum \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{n})}$.

Řešení

Vypočteme $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, přičemž ihned upravíme složený zlomek.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{(n+1)!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{n})\cdot(2+\sqrt{n+1})}\cdot$$

$$\cdot\frac{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{n})}{\sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{(n+1)\cdot n!}}{(2+\sqrt{n+1})\cdot\sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{n+1})\cdot\sqrt{n!}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n+1}}{2+\sqrt{n+1}}$$

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2+\sqrt{n+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\frac{2}{\sqrt{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$$

Užitím podílového kritéria nelze rozhodnout. Užijeme Raabeovo kritérium, které je „silnější“.

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \infty > 1$$

Výsledek: Řada $\sum \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\cdot(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{n})}$ konverguje.

■

Příklad 2.84 *Rozhodněme, pro která $a, b, d \in R^+$ konverguje řada*

$$\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots\ .$$

Řešení

Určíme člen $a_n=\frac{a(a+d)(a+2d)\cdot\ldots\cdot(a+nd)}{b(b+d)(b+2d)\cdot\ldots\cdot(b+nd)}$.

Vypočteme $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, přičemž ihned upravíme složený zlomek.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a(a+d)(a+2d)\cdot\ldots\cdot(a+nd)[a+(n+1)d]}{b(b+d)(b+2d)\cdot\ldots\cdot(b+nd)[b+(n+1)d]}\cdot\frac{b(b+d)(b+2d)\cdot\ldots\cdot(b+nd)}{a(a+d)(a+2d)\cdot\ldots\cdot(a+nd)}$$

$$=\frac{a+(n+1)d}{b+(n+1)d}=\frac{a+nd+d}{b+nd+d}$$

Podílové kritérium nedává výsledek, poněvadž

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+nd+d}{b+nd+d}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{n}+d+\frac{d}{n}}{\frac{b}{n}+d+\frac{d}{n}}=\frac{d}{d}=1.$$

Užijeme Raabeovo kritérium.

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{b+nd+d}{a+nd+d}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(b+nd+d-a-nd-d)}{a+nd+d}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(b-a)}{a+nd+d}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{\frac{a}{n}+d+\frac{d}{n}}=\frac{b-a}{d}$$

Výsledek: Daná řada konverguje pro $\frac{b-a}{d}>1$.

■

Absolutně konvergentní řady

Připomínáme:

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, právě když je splněna některá z následujících podmínek:

- Existuje konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tak, že $|a_n| \leq b_n$ pro všechna $n \in N$,
- existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ pro všechna $n \in N$,
- existuje $q \in (0,1)$ tak, že $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ pro všechna $n \in N$,
- existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$.

Příklad 2.85 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{2^n}$.

Řešení

Rozepíšeme řadu

$$\sum(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{2^n} = (-1)^0 \frac{1}{2} + (-1)^1 \frac{1}{2^2} + (-1)^3 \frac{1}{2^3} + (-1)^6 \frac{1}{2^4} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Je to řada s libovolnými členy.

Řada $\sum\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{2^n}\right| = \sum \frac{1}{2^n}$ je geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{2} \in (-1,1)$ a ta konverguje.

Závěr: Řada $\sum(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{2^n}$ konverguje absolutně.

∎

Příklad 2.86 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum(-1)^{\binom{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Řešení

Členy řady nabývají kladných i záporných hodnot – je to řada s libovolnými členy.

Řada $\sum\left|(-1)^{\binom{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n^3}}\right| = \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ je řada typu $\sum \frac{1}{n^k}$, kde $k = \frac{3}{2} > 1$, a ta konverguje.

Závěr: Řada $\sum(-1)^{\binom{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ konverguje absolutně.

∎

Příklad 2.87 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum(-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$.

Řešení

Řada $\sum\left|(-1)^n \frac{1}{n(n+1)}\right| = \sum\frac{1}{n(n+1)}$ je uvedena v přehledu význačných řad. Je to „užitečná“ řada, a ta konverguje.

Závěr: Řada $\sum(-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.88 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3}$.

Řešení

Řada $\sum\left|(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3}\right| = \sum\frac{1}{(2n+1)^3} = \sum\frac{1}{\left[2\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^3} = \frac{1}{8}\sum\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^3}$.

Řada $\sum\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3}$ je řada typu $\sum\frac{1}{n^k}$, kde $k = 3 > 1$, a ta konverguje. Konverguje i násobek této řady, tedy řada $\sum\frac{1}{(2n+1)^3}$ konverguje.

Závěr: Řada $\sum(-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.89 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

Řešení

Členy řady nabývají kladných i záporných hodnot – je to řada s libovolnými členy. Použijeme srovnávací kritérium pro absolutní konvergenci.

Pro každé $n \in N$ je

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| = \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Řada $\sum\frac{1}{n^2}$ konverguje – typ řady $\sum\frac{1}{n^k}$, kde $k = 2 > 1$.

Závěr: Řada $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.90 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum(-1)^n \frac{3^n}{n!}$.

Řešení

Použijeme limitní podílové kritérium pro absolutní konvergenci

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{(-1)^n\frac{3^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-1\frac{3^{n+1}\,n!}{3^n\,(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n!}{(n+1)n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = \left[\frac{3}{\infty}\right] = 0 < 1$$

Závěr: Řada $\sum(-1)^n \frac{3^n}{n!}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.91 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum \frac{sin2^n}{6^n}$.

Řešení

Je to řada s libovolnými členy. Použijeme srovnávací kritérium pro absolutní konvergenci.

Pro každé $n \in N$ je

$$\left|\frac{\sin 2^n}{6^n}\right| = \frac{|\sin 2^n|}{6^n} \le \frac{1}{6^n}$$

Řada $\sum\frac{1}{6^n} = \sum\left(\frac{1}{6}\right)^n$ je geometrická řada, která konverguje, protože $q = \frac{1}{6} \in (-1,1)$.

Závěr: Řada $\sum \frac{\sin 2^n}{6^n}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.92 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady*

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{7}\right)^4 + \cdots.$$

Řešení

Člen $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$.

Použijeme limitní odmocninové kritérium pro absolutní konvergenci.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Závěr: Řada $\sum(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.93 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum(-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$.

Řešení

Vypočteme

$$\sum(-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n} = (-1)^1 \frac{1}{2} + (-1)^3 \frac{2}{4} + (-1)^6 \frac{3}{8} + (-1)^{10} \frac{4}{16} + \cdots =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} - \cdots$$

Použijeme limitní podílové kritérium pro absolutní konvergenci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{\frac{(n+1)^2+(n+1)}{2}}(n+1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \cdot n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Závěr: Řada $\sum(-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.94 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum(-1)^n \left(\frac{2n+1}{4n+3}\right)^n$.

Řešení

Užijeme limitní odmocninové kritérium pro absolutní konvergenci.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \left(\frac{2n+1}{4n+3}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{4n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n+3} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{4+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Závěr: Řada $\sum(-1)^n \left(\frac{2n+1}{4n+3}\right)^n$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.95 *Rozhodněme, zda absolutně konverguje řada* $\sum(-1)^n \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{13^n}$.

Řešení

Použijeme limitní odmocninové kritérium pro absolutní konvergenci.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{13^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{13} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{13} =$$

$$= \frac{e}{13} < 1$$

Závěr: Řada $\sum(-1)^n \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{13^n}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.96 *Rozhodněme, zda absolutně konverguje řada* $\sum(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{5^n}$.

Řešení

Použijeme limitní odmocninové kritérium pro absolutní konvergenci.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{5^n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}{5} = \frac{1}{5} < 1$$

Pro srovnání početních postupů použijeme i limitní podílové kritérium pro absolutní konvergenci.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}(n+1)^{100}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n^{100}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{100}}{5n^{100}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{5}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{5} < 1$$

Závěr: Řada $\sum(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{5^n}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.97 *Rozhodněme o absolutní konvergenci řady* $\sum(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

Řešení

Určíme

$$\sum(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{2^{n^2}}{n!}=(-1)^0\frac{2^1}{1!}+(-1)^1\frac{2^4}{2!}+(-1)^3\frac{2^9}{3!}+(-1)^6\frac{2^{16}}{4!}+(-1)^{10}\frac{2^{25}}{5!}-\cdots$$

$$=\frac{2}{1!}-\frac{2^4}{2!}-\frac{2^9}{3!}+\frac{2^{16}}{4!}+\frac{2^{25}}{5!}-\cdots$$

Jedná se o řadu s libovolnými členy. Použijeme limitní podílové kritérium pro absolutní konvergenci.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{\frac{(n+1)n}{2}}2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}2^{n^2}}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{2^{n^2+2n+1}n!}{2^{n^2}(n+1)n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=$$

$$=\infty>1$$

Závěr: Řada $\sum(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{2^{n^2}}{n!}$ diverguje.

■

Příklad 2.98 *Rozhodněme o konvergenci řady*

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\cdots.$$

Řešení

V řadě vždy po dvou kladných členech následují dva členy záporné. Řada není alternující – nelze použít Leibnizovo kritérium. Zkusíme zjistit, zda řada konverguje absolutně.

Vyšetření absolutní konvergence nám pomůže rozhodnout o konvergenci řad s libovolnými členy. Z absolutní konvergence řady totiž plyne „obyčejná“ konvergence řady.

Řada absolutních hodnot je $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum\frac{1}{n^2}$, což je řada typu $\sum\frac{1}{n^k}$, kde $k=2>1$, a ta konverguje.

Z absolutní konvergence řady plyne i její konvergence.

Závěr: Daná řada konverguje.

■

Alternující řady

Připomínáme Leibnizovo kritérium:

Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ konverguje, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Přitom součet řady splňuje nerovnosti $a_1 - a_2 < s < a_1$.

Příklad 2.99 *Rozhodněme o konvergenci alternující řady podle Leibnizova kritéria.*

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{\ln n}.$$

Řešení

Musíme zjistit, zda jsou splněny všechny podmínky Leibnizova kritéria.

1) P-st $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ je p-st kladných čísel, protože pro všechna přirozená čísla n větší nebo rovna číslu 2 je $\ln n > 0 \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > 0$
2) Pro všechna $n \in N$ dále platí, že $n < n + 1$. Fce $\ln x$ je rostoucí, proto $\ln n < \ln\,(n+1) \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}$, tj. $a_n > a_{n+1}$. P-st $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ je klesající, tedy nerostoucí.
3) Dále vypočteme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$

Všechny podmínky stanovené Leibnizovým kritériem, tj. podmínky 1), 2) a 3) jsou splněny, daná řada konverguje.

Závěr: Řada $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{\ln n}$ konverguje.

■

Příklad 2.100 *Rozhodněme, zda je daná řada alternující; pokud ano, pak pomocí Leibnizova kritéria rozhodneme o její konvergenci.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\,\frac{5}{(-1)^{n-2}\,n}.$$

Řešení

Upravíme člen a_n řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\,\frac{5}{(-1)^{n-2}\,n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1-n+2}\,\frac{5}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+3}\,\frac{5}{n}$$

Řada je alternující – platí $sgn\; a_{n+1} = -sgn\; a_n$.

Pro $\forall\, n \in N$ je $a_n = \frac{5}{n} > 0$.

P-st $\{a_n\} = \left\{\frac{5}{n}\right\}$ je klesající, protože $a_{n+1} < a_n$.

$\frac{5}{n+1} < \frac{5}{n} \Longrightarrow n + 1 > n \Longrightarrow 1 > 0$, což platí.

Dále $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n} = \left[\frac{5}{\infty}\right] = 0$.

Všechny předpoklady Leibnizova kritéria jsou splněny.

Závěr: Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\ \frac{5}{(-1)^{n-2}\,n}$ konverguje.

■

Příklad 2.101 *Rozhodněme, zda je daná řada alternující; pokud ano, pak pomocí Leibnizova kritéria rozhodneme o její konvergenci.*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{(-1)^n\, n}{(-1)^{2n}\,(n^2+1)}$$

Řešení

Upravíme n-tý člen řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ \frac{(-1)^n\, n}{(-1)^{2n}\,(n^2+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1+n-2n}\ \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{-1}\ \frac{n}{n^2+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{n^2+1} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

Všechny členy řady jsou záporné.

Závěr: Daná řada není alternující.

■

Příklad 2.102 *Rozhodněme, zda je daná řada alternující; pokud ano, pak pomocí Leibnizova kritéria rozhodneme o její konvergenci.*

$$\sum(-1)^{n-1}\ \frac{n^2}{3n^2+1}$$

Řešení

Řada je alternující – platí $sgn\ a_{n+1} = sgn\ a_n$.

Člen $a_n = \frac{n^2}{3n^2+1} > 0$, pro $\forall\, n \in N$.

Zjistíme, zda je p-st $\left\{\frac{n^2}{3n^2+1}\right\}$ klesající, tedy zda $a_n > a_{n+1}$ pro $\forall\, n \in N$.

$$\frac{n^2}{3n^2+1} > \frac{(n+1)^2}{3(n+1)^2+1} = \frac{n^2+2n+1}{3n^2+6n+4} \quad / \cdot\, (3n^2+1)(3n^2+6n+4)$$

$$3n^4+6n^3+4n^2 > 3n^4+6n^3+3n^2+n^2+2n+1$$
$$0 > 2n+1 \ \text{ neplatí}$$

P-st $\{a_n\}$ není nerostoucí, o konvergenci nelze podle Leibnizova kritéria rozhodnout.
Vyšetřeme, zda je splněna nutná podmínka konvergence řady.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{3n^2+1} \text{ neexistuje}$$

Závěr: Řada $\sum(-1)^{n-1} \frac{n^2}{3n^2+1}$ diverguje.

■

Příklad 2.103 *Rozhodněme o konvergenci řady* $\sum(-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$.

Řešení

Je to alternující řada, použijeme Leibnizovo kritérium.

$$\sum(-1)^n \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = -\frac{2}{2\sqrt{2}-1} + \frac{3}{3\sqrt{3}-1} - \frac{4}{4\sqrt{4}-1} + \cdots$$

Pro každé $n \in N$ je člen $a_n = \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} > 0$.

Vypočteme rozdíl $a_{n+1} - a_n$.

Pro $\forall\, n \in N$ je $a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{(n+2)\sqrt{n+2}-1} - \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} =$

$$= \frac{(n+2)\left[(n+1)\sqrt{n+1}-1\right] - (n+1)\left[(n+2)\sqrt{n+2}-1\right]}{\left[(n+2)\sqrt{n+2}-1\right] \cdot \left[(n+1)\sqrt{n+1}-1\right]}$$

Jmenovatel zlomku je kladný – je součinem dvou kladných čísel. O znaménku zlomku rozhoduje čitatel, který upravíme

$$(n+2)(n+1)\sqrt{n+1} - n - 2 - (n+1)(n+2)\sqrt{n+2} + n + 1 =$$
$$= (n+2)(n+1)\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}\right) - 1 < 0, \text{ protože výraz } \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} < 0.$$

P-st $\left\{\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}\right\}$ je klesající, protože jsme zjistili, že $a_{n+1}-a_n<0 \Longrightarrow a_{n+1}<a_n$.

Stačí vypočítat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n^3}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n^3}}} =$$

$$=\frac{0}{1}=0$$

Závěr: Řada $\sum(-1)^n \ \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ konverguje.

■

Příklad 2.104 *Rozhodněme o konvergenci či divergenci řady* $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \ \frac{1}{(2n-2)!}$.

V případě konvergence zjistíme, zda řada konverguje absolutně či relativně.

Řešení

Řada je alternující.

Nejprve podle Leibnizova kritéria zjistíme, zda řada konverguje.

P-st $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{(2n-2)!}\right\}$ je p-st kladných čísel.

Člen $a_n=\frac{1}{(2n-2)!}$, člen $a_{n+1}=\frac{1}{[2(n+1)-2]!}=\frac{1}{(2n)!}$

Pro $\forall\ n\in N, n>1$, je $2n>2n-2 \Longrightarrow (2n)!>(2n-2)!$

Odtud

$$\frac{1}{(2n)!}<\frac{1}{(2n-2)!}\text{, tj. } a_{n+1}<a_n\text{, p-st } \left\{\frac{1}{(2n-2)!}\right\} \text{ je klesající.}$$

Dále $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-2)!}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$

Podle Leibnizova kritéria daná řada konverguje. Zjistíme, zda řada konverguje absolutně.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n \ \frac{1}{(2n)!}}{(-1)^{n-1} \ \frac{1}{(2n-2)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-1\frac{(2n-2)!}{(2n)!}\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-2)!}{2n\,(2n-1)\,(2n-2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n\,(2n-1)}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0<1$$

Závěr: Řada$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} \ \frac{1}{(2n-2)!}$ konverguje absolutně.

■

Poznámka.

Leibnizovo kritérium je v tomto případě zdlouhavější a vyšetřili jsme jím jen konvergenci řady. Naproti tomu užitím podílového kritéria pro absolutní konvergenci jsme zjistili ihned, že řada konverguje absolutně, a tedy také konverguje.

Příklad 2.105 *Rozhodněme o konvergenci řady* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(n+2)}$.

V případě konvergence řady zjistíme, zda konverguje absolutně nebo relativně.

Řešení

Řada je alternující, o konvergenci rozhodneme podle Leibnizova kritéria.

Člen $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ pro $\forall\, n \in N$.

Pro $\forall\, n \in N$ je $(n+1)(n+2) < (n+2)(n+3)$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} > \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$a_n > a_{n+1}$$

P-st $\{a_n\}$ je klesající.

Limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$

Podle Leibnizova kritéria řada konverguje. Vyšetříme, zda řada konverguje absolutně.

$$\sum \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right| = \sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Užijeme limitní podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} \cdot (n+1)(n+2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{n^2+5n+6} =$$

$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^e}} = 1$, to však nedává výsledek.

Užijeme Raabeovo kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[n\left(\frac{n^2+5n+6}{n^2+3n+2}\right) - 1\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[n\frac{n^2+5n+6-n^2-3n-2}{n^2+3n+2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n+4)}{n^2+3n+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n}{n^2+3n+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = 2 > 1$$

Řada$\sum \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ konverguje.

Závěr: Řada $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(n+2)}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.106 *Rozhodněme, zda je daná řada alternující; pokud ano, pak pomocí Leibnizova kritéria rozhodneme o její konvergenci.*

$$\sum (-2)^{-n}\, n^{-3}.$$

Řešení

Upravíme n-tý člen řady.

$$\sum (-2)^{-n}\, n^{-3} = \sum (-1\cdot 2)^{-n}\, n^{-3} = \sum \frac{1}{(-1)^n}\cdot\frac{1}{2^n n^3} = \sum \frac{(-1)^n}{2^n n^3}.$$

Řada je alternující.

Pro $\forall\, n \in N$ je $a_n = \frac{1}{2^n n^3} > 0$.

Dále $\qquad 2^n n^3 < 2^{n+1} n^3 < 2^{n+1}(n+1)^3$

$$\frac{1}{2^n n^3} > \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^3}$$

$$a_n > a_{n+1}$$

Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2^n n^3}\right\}$ je klesající posloupnost kladných čísel a $\lim a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n n^3} =$

$= \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$

Všechny předpoklady Leibnizova kritéria jsou splněny.

Závěr: Řada $\sum (-2)^{-n}\, n^{-3}$ konverguje.

■

Poznámka.

Mohli jsme postupovat také takto:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)^3}}{\frac{(-1)^n}{2^n n^3}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|-1\frac{2^n n^3}{2^{n+1}(n+1)^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{2(n+1)^3} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} = \frac{1}{2} < 1$$

Limitním podílovým kritériem pro absolutní konvergenci jsme zjistili, že daná řada konverguje absolutně, tedy konverguje.

Příklad 2.107 *Rozhodněme o konvergenci řady* $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Konverguje-li, pak rozhodneme, zda konverguje absolutně nebo relativně.

Řešení

Řada je alternující, užijeme Leibnizovo kritérium.

Člen $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > 0$ pro $\forall\, n \in N$.

Pro $\forall\, n \in N$ je $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, tj $a_{n+1} < a_n$, což znamená, že posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$ je klesající.

Dále $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$

Podle Leibnizova kritéria řada konverguje.

Řada absolutních hodnot $\sum\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \sum\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ však diverguje, jak plyne ze srovnávacího kritéria.

Pro $\forall\, n \in N$ je

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n},$$

kde $\sum\frac{1}{n\sqrt{2}}$ je divergentní minoranta. ($\sum\frac{1}{n\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sum\frac{1}{n}$, $\sum\frac{1}{n}$ je harmonická řada, a ta diverguje).

Výsledek: Řada $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ konverguje relativně.

■

Příklad 2.108 *Rozhodněme o konvergenci alternující řady* $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}$.

Řešení

Nejprve zkusíme vyšetřit absolutní konvergenci řady.

Vypočteme

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{1}{[2(n+1)-1]^3}}{(-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n+1)^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^3}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^3} = 1$$

Použité kritérium nedává výsledek. Nezbývá než užít Leibnizovo kritérium.

Pro $\forall\, n \in N$ je $a_n = \frac{1}{(2n-1)^3} > 0$ a p-st $\left\{\frac{1}{(2n-1)^3}\right\}$ je klesající, protože $a_n > a_{n+1}$

$$\frac{1}{(2n-1)^3} > \frac{1}{(2n+1)^3}.$$

Dále $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$

Závěr: Řada $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}$ konverguje.

■

Poznámka.

Stručnější postup:

$$\sum \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}\right| = \sum \frac{1}{\left[2\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]^3} = \frac{1}{8} \sum \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3}$$

Řada $\sum \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3}$ je řada typu $\sum \frac{1}{n^k}$, kde $k = 3 > 1$, a ta konverguje. Odtud pak dostaneme, že i násobek této řady $\frac{1}{8}\sum \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3} = \sum \frac{1}{(2n-1)^3}$ konverguje a tedy řada $\sum(-1)^{n-1}\ \frac{1}{(2n-1)^3}$ absolutně konverguje, tedy konverguje.

Závěr: Řada $\sum \frac{1}{(2n-1)^3}$ konverguje absolutně.

■

Příklad 2.109 *Rozhodněme o absolutní či relativní konvergenci alternující řady* $\sum(-1)^{n-1}\ \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Řešení

Nejprve vyšetříme konvergenci řady absolutních hodnot.

$$\sum \left|(-1)^{n-1}\ \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

což je řada typu $\sum \frac{1}{n^k}$, kde $k = \frac{1}{2} < 1$, a ta diverguje.

Podle Leibnizova kritéria rozhodneme o konvergenci dané řady:

Pro $\forall\ n \in N$ je $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$.

Dále je $\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow a_n > a_{n+1}$.

Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ je klesající posloupnost kladných čísel.

$\lim\limits_{n\to\infty}\ a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$

Závěr: Řada $\sum(-1)^{n-1}\ \frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje relativně.

■

Příklad 2.110 *Rozhodněme o konvergenci či divergenci* $\sum(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n^2}$.

V případě konvergence zjistíme, zda řada konverguje absolutně či relativně.

Řešení

Zkusíme užít podílové kritérium pro absolutní konvergenci

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}}{(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|-1\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 1.$$

Zvolené kritérium nedává výsledek. Na základě tohoto kritéria nelze o konvergenci či divergenci rozhodnout. Řada je alternující, užijeme Leibnizovo kritérium.

Pro $\forall\, n \in N$ je $a_n = \frac{1}{n^2} > 0$.
Pro $\forall\, n \in N$ je $n < n + 1 \Longrightarrow n^2 < (n+1)^2$

A odtud

$$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$$
$$a_n > a_{n+1}$$

Posloupnost $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ je klesající posloupnost kladných čísel a $\lim\frac{1}{n^2} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$.

Podle Leibnizova kritéria řada $\sum(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Vyšetříme konvergenci řady
$\sum\left|(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n^2}\right| = \sum\frac{1}{n^2}$, a ta konverguje, protože je to význačná řada typu $\sum\frac{1}{n^k}$, kde
$k = 2 > 1$.

Závěr: Řada$\sum(-1)^{n-1}\ \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně.

■

Poznámka.
I v tomto případě jsme mohli ihned vyšetřit absolutní konvergenci řady a obešli bychom se bez Leibnizova kritéria.