

MATEMATICKÉ APLIKACE V EKONOMII

STUDIJNÍ OPORTA PRO KOMBINOVANÉ
STUDIUM

MATEMATICKÉ APLIKACE V EKONOMII

doc. RNDr. **Martina Pavlačková**, Ph.D.

Mgr. **Veronika Říhová**, Ph.D.

© Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s.

Autoři: doc. RNDr. Martina PAVLAČKOVÁ, Ph.D.,

Mgr. Veronika ŘÍHOVÁ, Ph.D.

Olomouc 2024

Obsah

Úvod	7
Časové řady a jejich aplikace	8
1.1 Časové řady – základní pojmy	9
1.2 Míry dynamiky časových řad	11
1.3 Rozklad časových řad	13
Indexy	19
2.1 Základy indexní analýzy	20
2.2 Jednoduché individuální indexy	21
2.3 Složené individuální indexy	22
2.4 Souhrnné indexy	24
2.4.1 Cenové indexy	24
2.4.2 Objemové indexy	25
Základní pojmy ve finanční matematice	29
3.1 Základní definice	30
Jednoduché úročení	33
4.1 Jednoduché polhůtní úročení	34
4.1.1 Současná a budoucí hodnota kapitálu	37
4.1.2 Kontokorentní účet	38
4.2 Jednoduché předlhůtní úročení	39
Složené úročení	41
5.1 Základní pojmy	42
5.2 Častější připisování úroků	44
5.3 Smíšené úročení	45
Investiční rozhodování	47
6.1 Pravidlo čisté současné hodnoty	48
6.2 Pravidlo vnitřní míry výnosnosti	49
Spoření	52

7.1	Základní pojmy	53
7.2	Krátkodobé spoření	53
7.2.1	Krátkodobé předlhůtní spoření	54
7.2.2	Krátkodobé polhůtní spoření	54
7.3	Dlouhodobé spoření	55
7.3.1	Dlouhodobé předlhůtní spoření	55
7.3.2	Dlouhodobé polhůtní spoření	55
7.4	Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření	56
7.5	Spoření s častějším připisováním úroků	57
Důchody		60
8.1	Základní pojmy	61
8.2	Důchody dočasné	62
8.3	Důchody věčné	65
8.4	Důchody odložené	66
Úvěry		68
9.1	Základní pojmy	69
9.2	Splácení dluhu splátkami stejné výše	70
9.3	Splácení dluhu při konstantním úmoru	71
9.4	Měsíční splácení úvěru	72
9.5	RPSN	74
Obligace		77
10.1	Základní pojmy	78
10.2	Klasifikace obligací	78
10.3	Cena kupónové obligace	79
10.4	Výnosnost obligace	80
Akcie		83
11.1	Základní pojmy	84
11.2	Cena akcie	85
11.3	Výnosnost akcií	86
Využití Wolfram Alpha v matematických aplikacích		88

12.1	Úvod	89
12.2	Wolfram Alpha ve finanční matematice	89
	Seznam literatury a použitých zdrojů	97
	Seznam obrázků	99

Úvod

Studijní text vysvětluje matematické postupy, které jsou spojeny s časovými řadami, indexní analýzou a základními finančními produkty a instrumenty s důrazem na jejich porozumění. Cílem studijního textu je poskytnout studentům exaktní nástroje pro oblast aplikací matematiky ve finanční sféře, které jsou bezprostředně využitelné v oblasti ekonomiky a managementu.

Studijní text je vhodný jak pro začátečníky, kteří se chtějí seznámit se základními finančními výpočty a časovými řadami, tak pro pokročilejší hledající vysvětlení i složitějších finančně-matematických postupů. První část textu vysvětluje základy časových řad a indexní analýzy a jejich využití v praktických aplikacích. Druhá část studijní opory se věnuje matematickým metodám a postupům využívaným v oblasti financí a jejich konkrétním aplikacím u běžně využívaných bankovních a finančních produktů (jakými jsou např. běžné účty, spoření, hypoteční a spotřebitelské úvěry, dluhopisy, akcie atd.). Výklad, demonstrováný na řadě konkrétních příkladů, umožní snadnou praktickou aplikaci jak při finančním rozhodování v podnikání, tak při správě soukromých financí.

Student je po pročtení textu schopen definovat pojem časová řada, nakreslit její graf a analyzovat základní složky časových řad. Také dokáže pomocí nalezené trendové funkce predikovat další vývoj zkoumané časové řady.

Rovněž je schopen vysvětlit základy finanční matematiky a různé principy úročení, využít tyto principy u základních oblastí finanční matematiky a aplikovat získané znalosti i na další oblasti ve finanční a bankovní praxi.

Pomocí pravidla čisté současné hodnoty a pravidla vnitřní míry výnosnosti je čtenář textu schopen rozhodnout o (ne)výhodnosti investice a porovnávat výnosnost investic mezi sebou. Také dokáže sestavit splátkový kalendář v případě splácení dluhu konstantními splátkami i při konstantním úmoru.

V rámci studijního textu je kladen důraz na analýzu jednotlivých možností pro správné finanční rozhodování a na softwarové nástroje využitelné pro tyto aplikace.

Jednotlivé kapitoly studijního textu obsahují náhled učiva, které se v dané kapitole bude probírat, klíčová slova, cíle kapitoly i čas přibližně potřebný k jejímu prostudování. Na konci kapitoly jsou vždy uvedeny kontrolní otázky a neřešené příklady s výsledky.

Kapitola 1

Časové řady a jejich aplikace



Po prostudování kapitoly budete umět:

- prakticky analyzovat časové řady s využitím běžně používaných přístupů;
- vybrat vhodnou metodu pro efektivní analýzu dané časové řady;
- analyzovat časovou řadu při řešení konkrétních úloh v praxi.



Klíčová slova:

Časová řada, ukazatel, průměr, trend, sezónní složka, cyklická složka, náhodná složka, přírůstky, koeficienty.

Náhled kapitoly

V této kapitole bude čtenář seznámen se základními pojmy týkajícími se časových řad, jejich složkami a mírami dynamiky. Také zde bude pozornost věnována interpolaci a extrapolaci u časových řad.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je zavedení základních pojmů týkajících se časových řad a jejich složek a popsání způsobů, jak lze časové řady analyzovat.

Odhad času potřebného ke studiu

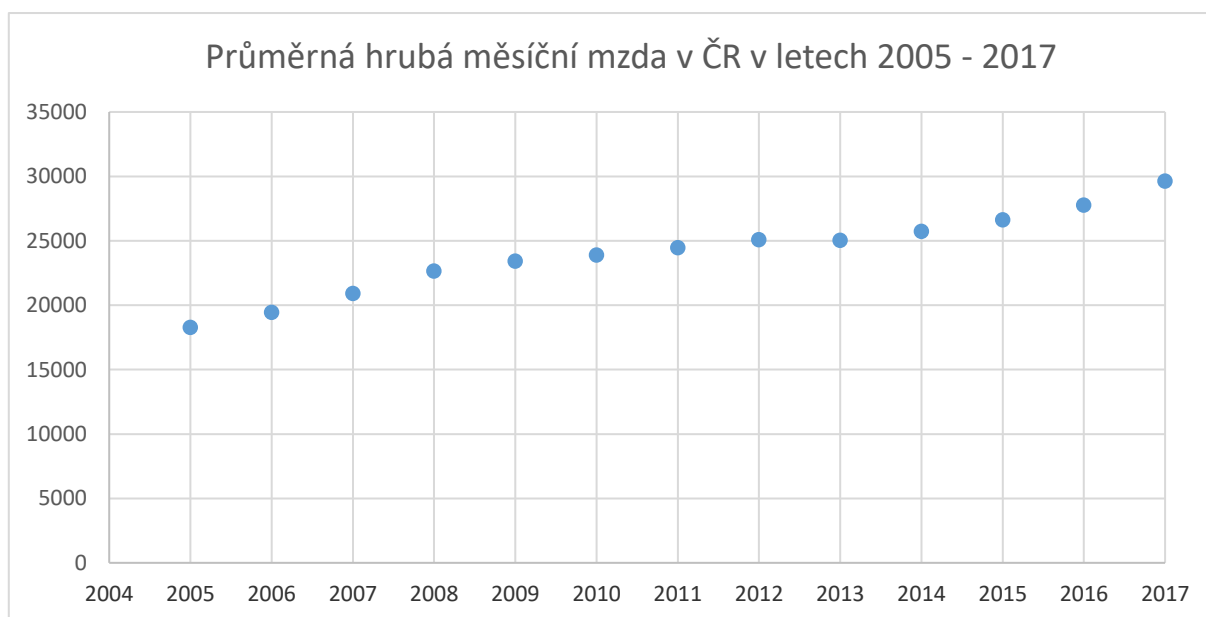
3 hodiny

1.1 Časové řady – základní pojmy

Důležitými statistických aparátů, pomocí něhož můžeme zkoumat dynamiku jevů v čase, jsou tzv. časové řady. Mají zásadní význam pro analýzu příčin, které na tyto jevy působily a ovlivňovaly jejich chování v minulosti, tak pro předvídání jejich budoucího vývoje. S chronologicky uspořádanými daty, která se pomocí časových řad zkoumají, se běžně setkáváme v nejrůznějších oblastech života. Např.: vývoj hrubého domácího produktu, míry inflace, nezaměstnanosti, kursů cizích měn, cen akcií atd.

Volba přístupu k analýze (výběr metody) závisí na celé řadě faktorů: účelu analýzy, typu sledované časové řady, zkušenostech statistika, jakož i dostupnosti výpočetní techniky a statistického software. V této části se omezíme jen na stručnou charakteristiku čtyř nejčastěji používaných přístupů k analýze časových řad.

Časové řady se dají znázornit pomocí **bodových grafů**. Na vodorovné ose je u nich vždy časová proměnná a na svislé ose hodnoty časové řady.



Obr. 1 Graf časové řady

Existují tyto tři typy časových řad:

1. **časová řada intervalových ukazatelů**
2. **časová řada okamžikových ukazatelů**
3. **časová řada odvozených charakteristik**

Pro ukazatele 1. typu platí, že jejich velikost přímo úměrně závisí na zvolené délce intervalu. V těchto případech se často musí data převést na srovnatelné hodnoty (např. přepočítání na stejně dlouhé úseky (čtvrtletí nemají stejný počet dní apod.)).

U tohoto typu řad lze hodnoty sčítat a má to smysl. Na rozdíl od časových řad okamžikových ukazatelů.

Příklady intervalových časových řad:

- Počet narozených dětí v ČR v letech 2010-2019
- Tržby firmy ABC v jednotlivých měsících roku 2019
- Počty automobilových nehod na Barrandovském mostě v jednotlivých dnech...

Z dat $y_1, y_2, \dots, y_n$ v intervalové časové řadě se počítá tzv. **aritmetický průměr** $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$$

Tímto jediným číslem pak charakterizujeme průměrnou úroveň ukazatele v rámci celého zkoumaného období.

U řad 2. typu se ukazatel vztahuje k přesně definovanému okamžiku. Hodnota ukazatele tedy nezávisí na délce intervalu, za který je sledován. Práce s těmito řadami je složitější. Na rozdíl od předchozího typu nemá reálný smysl např. sumace hodnot řady, přistupuje se tedy k různým druhům průměrování.

Příklady okamžikových časových řad:

- Počet zaměstnanců dané firmy k prvnímu dni v měsíci
- Míra nezaměstnanosti v Olomouci k 1.lednu v jednotlivých letech...

U okamžikových časových řad je používán tzv. **chronologický průměr**:

$$\bar{y} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n - 1}$$

Tímto jediným číslem pak charakterizujeme úroveň ukazatele za celé období. Je ale zřejmé, že tím dochází ke značnému zjednodušování reality (stejně jako u aritmetického průměru) zejména v případě, kdy zkoumaná data nemají monotónní charakter. Mimo průměrů jsou proto také využívány různé druhy jiných ukazatelů, kterými se budeme podrobněji zabývat dále.

Řady 3. typu se získají z intervalových nebo okamžikových časových řad, nejčastěji dělením nebo součtem.

Příklad časové řady odvozených charakteristik:

- Počet lidí registrovaných na ÚP v Olomouci připadajících na 1 volné pracovní místo

1.2 Míry dynamiky časových řad

Základní chování časové řady charakterizují (kromě již zmíněného aritmetického a chronologického průměru) tzv. **míry dynamiky**.

Definice 1.1 Mezi míry dynamiky řadíme tyto ukazatele:

- **absolutní přírůstky** = změna hodnoty v čase t oproti času $t-1$

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

- **průměrný absolutní přírůstek** = o kolik se průměrně měnila hodnota za čas. jednotku

$$\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$$

- **relativní přírůstky** - po vynásobení 100 udávají o kolik % se změnila hodnota v čase t oproti času $t-1$

$$\delta_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}, \quad t = 2, 3, \dots, n$$

- **průměrný koeficient růstu** - po odečtení 1 a vynásobení 100 udává o kolik % se průměrně měnila hodnota za čas. jednotku

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}$$

Příklad: Uvažujme časovou řadu hodnot **průměrné měsíční mzdy pracovníků státního sektoru v ČR v letech 1986 – 1990** (2944, 3005, 3138, 3247). Pro tuto časovou řadu vypočtěte **základní míry dynamiky**.

t	y_t
1986	2944
1987	3005
1988	3070
1989	3138
1990	3247

Řešení:

t	y_t	Δy_t	δt
1986	2944		
1987	3005	61	0,021
1988	3070	65	0,022
1989	3138	68	0,022
1990	3247	109	0,035

$$\bar{\Delta} = \frac{3247 - 2944}{5 - 1} = 75,75$$

$$\bar{k} = \sqrt[4]{\frac{3247}{2944}} = 1,025$$

Závěr: Mezi roky 1986 a 1987 **vzrostla** průměrná mzda o 61 Kč a o 2,1 %... Průměrně **rostla** mzda ve sledovaných letech o 76 Kč/**rok** a o 2,5 % **ročně**.

1.3 Rozklad časových řad

Při klasické analýze časových řad se vychází z předpokladu, že každá časová řada může obsahovat až čtyři složky, které budou podrobně popsány v následující definici.

Definice 1.2

- **Trend** reprezentuje dlouhodobé změny v průměrném chování řady (dlouhodobý růst nebo pokles, popř. dlouhodobá konstantní úroveň); je způsoben faktory, jež působí systematicky, dlouhodobě.
- **Sezónní složka** představuje periodické změny, které se odehrávají v průběhu roku a každý rok se opakují. Tyto změny zpravidla souvisejí se střídáním ročních období (jaro, léto, podzim a zima). Pro studium sezónních vlivů se doporučuje pracovat s řadami měsíčních, nejvýše kvartálních měření.
- **Cyklickou složku** chápeme jako dlouhodobé fluktuace kolem trendu, při nichž se pravidelně střídají fáze růstu s fázemi poklesu. U ekonomických řad je cyklická složka často spojována se střídáním hospodářských cyklů. Perioda cyklické složky se může pohybovat v násobcích let, a proto pokud máme krátkou časovou řadu, nemusí být cyklická složka vůbec rozeznatelná.
- **Náhodná (reziduální) složka** představuje náhodné fluktuace, jež nemají systematický charakter. Zahrnuje též chyby měření, chyby ve statistickém zpracování dat (např. zaokrouhlovací chyby). Často se předpokládá, že má náhodná složka charakter bílého šumu, tj. že je tvořena hodnotami nezávislých náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem.

Nejčastěji se při analýze časové řady předpokládá aditivní model popisu chování řady. Předpokládá se tedy, že jednotlivé složky vývoje se sčítají, tj. že platí:

$$y_t = T_t + S_t + C_t + \varepsilon_t$$

kde na pravé straně vystupují složky:

trendová T_t , sezónní S_t , cyklická C_t a náhodná ε_t .

Různé modifikace modelů vzniknou, když některou složku z úvah vypustíme. Nejčastěji se vypouští cyklická složka a o náhodné složce se obvykle pouze předpokládá, že

- její střední hodnota je nulová a

- hodnoty náhodné složky jsou korelačně nezávislé (náhodná porucha, jak se také dá náhodná složka interpretovat, nezávisí na poruše v minulém okamžiku ani neovlivňuje vznik a velikost poruchy v okamžiku následujícím).

Analýza složky kteréhokoliv typu se provádí v podstatě klasickou regresní analýzou. Podstatný rozdíl je jen v tom, že nezávisle proměnná je v tomto případě proměnná časová.

Analýza trendové složky je zřejmě nejdůležitější částí analýzy časových řad. V průběhu let se potvrdilo, že při výběru trendových funkcí většinou vystačíme s úzkou nabídkou funkcí. Nejčastěji používané trendy jsou:

- Lineární trend
- Parabolický trend
- Exponenciální trend
- Modifikovaný exponenciální trend
- Logistický trend

Lineární trend

Je nejčastěji používaným typem trendové funkce. Můžeme ji použít vždy, chceme-li alespoň orientačně určit základní směr vývoje časové řady a rovněž může sloužit v omezeném časovém intervalu jako vhodná aproximace jiných trendových funkcí.

Má tvar

$$T_t = a_0 + a_1 t$$

Kde a_0 , a_1 jsou neznámé parametry a $t = 1, 2, \dots, n$ je časová proměnná. K odhadu parametrů a_0 , a_1 lze použít metodu nejmenších čtverců.

Parabolický trend má tvar

$$T_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

kde a_0 , a_1 , a_2 jsou neznámé parametry a $t = 1, 2, \dots, n$ je časová proměnná. Parabolický trend je také poměrně často používaný typ trendové funkce. K odhadu parametrů se opět používá metoda nejmenších čtverců.

Exponenciální trend má tvar

$$T_t = a_0 a_1^t$$

kde a_0 , a_1 jsou neznámé parametry $t = 1, 2, \dots, n$ je časová proměnná.

Parametr a_1 představuje průměrný přírůstek hodnot T_t a hodnoty T_t se chovají jako členy geometrické posloupnosti.

Modifikovaný exponenciální trend má tvar

$$T_t = k + a_0 a_1^t$$

kde k , a_0 , a_1 jsou neznámé parametry a $t = 1, 2, \dots, n$.

Pomocí modifikovaného exponenciálního trendu se dá modelovat vývoj jevů, které vycházejí z omezených zdrojů růstu a u kterých existuje určitá mez nasycení, daná např. zájmem nebo potřebou určitého výrobku.

Poznámka: Ilustrujte si průběh funkcí tohoto typu pro různé hodnoty parametrů použitím vhodného matematického programu pro vykreslení grafů funkcí.

Logistický trend má tvar

$$y_t = \frac{1}{k + a_0 a_1^t}$$

kde k , a_0 , a_1 jsou neznámé parametry a $t = 1, 2, \dots, n$.

Křivka u tohoto trendu má tři úseky - první je charakterizován pozvolným vzestupem, druhá v okolí inflexního bodu prudkým růstem a třetí určitou vrcholovou stagnací (nasycením). Křivka má charakteristický průběh ve tvaru písmena S.

Analýza sezónní složky se často provádí až po očištění dat od trendové složky. V podstatě při ní jde o určení časového úseku, po jehož uplynutí mají data zase stejnou hodnotu, příp. ovlivněnou trendovou a náhodnou složkou.

Pro studium sezónní složky se používá několika typů modelů. V ekonomických modelech bývá zpravidla zřejmá velikost periody (čtvrtletí, měsíc), v jiných případech je nutno i tuto délku odhadovat (v hydrogeologii např. u výšky hladiny spodních vod). Používá se tu i harmonické analýzy, která modeluje průběh dat pomocí několika členů Fourierovy řady. Parametry se určují použitím numerických metod.

Výsledků analýzy časových řad a obecně i regresní analýzy vůbec se využívá k nalezení údajů, pro které není k dispozici výsledek měření nebo pozorování. Pokud jde o chybějící údaj závislé veličiny y_t pro některou hodnotu t uvnitř intervalu známých hodnot, jde o **interpolaci**. Ta zpravidla vede k dobrým výsledkům a nepřináší velká rizika chyb odhadované veličiny y_t .

Pokud však je nutno odhadnout výsledek y_t pro údaj t vně intervalu experimentálně udaných hodnot, jde o **extrapolaci**. V tomto případě je nutno být opatrný, neboť matematické prostředky použité pro určení charakteru regresní závislosti nemohou zpravidla zodpovědně odhadnout budoucí nebo minulý vývoj.

Σ

Časovou řadou se rozumí řada hodnot jistého věcně a prostorově vymezeného ukazatele, která je uspořádána v čase směrem od minulosti do přítomnosti. Časové řady dělíme (mimo jiné) na intervalové, okamžikové a odvozených charakteristik. Velikost hodnoty intervalového ukazatele závisí na délce časového intervalu sledování. Okamžikovou časovou řadou je řada, jejichž hodnoty se vztahují k jistému okamžiku. Hodnota takového ukazatele nezávisí na délce časového intervalu sledování. Jedním ze základních prostředků prezentace časových řad je jejich graf. Nejčastěji se graficky znázorňují původní hodnoty časové řady. Při klasické analýze časových řad se vychází z předpokladu, že každá časová řada může obsahovat čtyři složky: trend, sezónní složku, cyklickou a náhodnou složku.

?

1. Jakým grafem se znázorňují časové řady? Co je vždy na x-ové ose?
2. Jaké jsou 3 typy časových řad?
3. Kdy se používá aritmetický průměr a kdy průměr chronologický?
4. Jaké jsou nejčastější trendy u časových řad?
5. Na základě údajů z následující tabulky určete průměrnou roční výrobu masa v ČR v letech 2011-2015 a určete typ časové řady.

Rok	2011	2012	2013	2014	2015
Výroba masa (v tis. tun)	1217	1236	1273	1289	1297

[Jedná se o intervalovou časovou řadu; pro výpočet průměrné výroby masa použijeme aritmetický průměr $\bar{y} = 1262,4$. V letech 2011-2015 se v ČR vyrobilo průměrně 1262 tis. tun masa.]

6. Na základě údajů z následující tabulky určete průměrný počet zaměstnanců v určitém podniku v roce 2018 a určete typ časové řady.

Datum	1.1.2018	1.4.2018	1.7.2018	1.10.2018	1.1.2019
Počet zaměstnanců	280	260	250	220	200

[Jedná se o okamžikovou časovou řadu; pro výpočet průměrné výroby masa použijeme chronologický průměr $\bar{y} =$

242,5. Průměrný počet zaměstnanců v daném podniku v roce 2018 byl 243.]

7. Pro časovou řadu popisující vývoj HDP v letech 2000 – 2004 vypočítejte míry dynamiky a výsledky slovně popište.

Rok	HDP (v mld)
2000	1430
2001	1450
2002	1500
2003	1490
2004	1510

[

Rok	HDP	Δy_t	δt
2000	1430		
2001	1450	20	0,014
2002	1500	50	0,034
2003	1490	-10	-0,007
2004	1510	20	0,013

$$\bar{\Delta} = 20$$

$$\bar{k} = 1,014$$

Mezi roky 2000 a 2001 vzrostlo HDP o 20 mld a o 1,4 %, ..., mezi roky 2002 a 2003 kleslo o 10 mld a o 0,7 %, ...Průměrně rostlo HDP v letech 2000 – 2004 o 20 mld za rok a o 1,4 % ročně.]



Literatura k tématu:

- [1] ANDĚL, J. *Statistické metody*. 5. vydání, Praha: Matfyzpress, 2019. ISBN 978-80-7378-381-5.
- [2] ARLT, J., ARLTOVÁ, M. a E. RUBLÍKOVÁ. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Oeconomica, 2004. ISBN 80-245-0777-3.

- [3] HINDLS, R. a kol. *Statistika v ekonomii*. Professional Publishing, 2018. ISBN 978-80-88260-09-7.
- [4] OTIPKA, P. a V. ŠMAJSTRLA. *Pravděpodobnost a statistika* [online]. 1. vydání. Ostrava: Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava, 2007 [cit. 2024-08-12]. ISBN 80-248-1194-4. Dostupné z: <https://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/past/past.pdf>

Kapitola 2

Indexy



Po prostudování kapitoly budete umět:

- základy indexní analýzy;
- vysvětlit způsoby porovnávání získaných ekonomických hodnot a určit míru a směr jednotlivých vlivů.



Klíčová slova:

Porovnávání (absolutní, relativní), index (jednoduchý, složený, souhrnný).

Náhled kapitoly

Indexní analýza se používá při analyzování sociálně ekonomických ukazatelů. Pomocí indexů můžeme porovnávat vzájemně odlišné údaje a určovat jejich vztahy. V této kapitole bude čtenář seznámen se základními pojmy týkajícími se indexní analýzy a její souvislosti s časovými řadami z předešlé kapitoly.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je zavedení základních pojmů týkajících se indexní analýzy a pochopení souvislosti mezi indexy a časovými řadami.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

2.1 Základy indexní analýzy

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, ukazatel je statistická veličina popisující některý ze sociálně ekonomických jevů.

Definice 2.1 Ukazatele v rámci indexní analýzy rozdělujeme na:

- **extenzivní** - Jsou to ukazatele vyjadřující velikost zkoumaného jevu. Charakterizují množství, rozsah, objem, a podobně. Tyto ukazatele můžeme při počítání souhrnů sčítat. Pro označení těchto ukazatelů používáme q (případně Q). Také je označujeme jako ukazatele množství.
- **intenzivní** - Jedná se o ukazatele vzniklé jako podíl dvou extenzivních ukazatelů. Může se jednat o ukazatele uvádějící cenu za kus, průměrnou mzdu, výnos na hektar atd. Pro jejich označení se používá nejčastěji znak p , nebo c . Označují se také jako ukazatele úrovně. Tyto ukazatele se nedají při souhrnech sčítat.

Hodnoty ukazatele se v čase mění, a proto je rozlišujeme z časového hlediska. Ukazatele číslujeme dolními indexy, takže 0 značí původní časový údaj, nebo období, vzhledem ke kterému se porovnávání děje (báze), nazýváme jej ukazatel bazický. Jednotlivé ukazatele jsou tedy ve tvaru $p_0, p_1, p_2, \dots, q_0, q_1, q_2, \dots, c_0, c_1, c_2, \dots$

Příklady intenzivních / extenzivních ukazatelů:

- q = počet prodaných výrobků ... extenzivní ukazatel
- Q = celková tržba ... extenzivní ukazatel
- p = cena za jeden výrobek
- $p=Q/q$... intenzivní ukazatel

Ukazatele rozdělujeme dále na:

1. **Stejnorodé extenzivní** – jejich hodnoty lze sčítat

Příklady: tržby za jednotlivé měsíce, počty prodaných kusů jednoho druhu výrobku na více pobočkách...

2. **Stejnorodé intenzivní** - vzniklé jako podíl dvou stejnorodých extenzivních ukazatelů.

3. **Nestejnorodé** – nemá smysl jejich hodnoty sčítat, často nejsou v jednotlivých částech vyjádřeny ve stejných jednotkách,

Příklad: objem produkce v ČR (automobily, uhlí, nábytek...)

Ukazatele se porovnávají nejčastěji dvěma způsoby, a to pomocí difference (rozdílů) a pomocí indexů (dělení, odmocnin).

Příklad: Najděte, kde jste se s těmito přístupy už setkali u časových řad.

Indexy rozdělujeme na **individuální** a **souhrnné**. Pomocí individuálních indexů srovnáváme stejnorodé ukazatele, což jsou takové, jejichž součet má stejný smysl jako stejný ukazatel za jednotlivé části, např. součet zisků za měsíc můžeme sečíst a výsledek má stejný smysl jen za jiné období. Naproti tomu souhrnné indexy jsou indexy nesourodých ukazatelů, tedy takových, jejichž součet nemá pro celek význam, např. součet produkce různých výrobků. V dalších podkapitolách si tuto problematiku přiblížíme podrobněji.

2.2 Jednoduché individuální indexy

Pomocí těchto indexů srovnáváme dvě hodnoty téhož ukazatele:

$$I_p = \frac{p_1}{p_0}$$

$$I_q = \frac{q_1}{q_0}$$

$$I_Q = \frac{Q_1}{Q_0}$$

Protože $Q = p \cdot q$, platí, že $I_Q = I_p \cdot I_q$

Vidíme, že u jednoduchých individuálních indexů nehraje roli, zda je ukazatel extenzivní, či intenzivní.

Příklad: V prvním roce prodala firma 200 tun uhlí za cenu 2000,-Kč/t. Ve druhém roce se rozhodla zvýšit cenu na 2200,- Kč/t a prodala takto 180 tun. Porovnejte změnu cen, prodaného množství a tržeb ve druhém roce oproti prvnímu.

Řešení: Jelikož se jedná o jednu veličinu a jedno pozorování (uhlí a jedno prodejní místo), použijí se jednoduché individuální indexy.

$$I_p = \frac{2200}{2000} = 1,1 \rightarrow \text{cena vzrostla o 10 \%}$$

$$I_q = \frac{180}{200} = 0,9 \rightarrow \text{prodané množství kleslo o 10 \%}$$

$$I_Q = \frac{Q_1}{Q_0} = \frac{180 \cdot 2200}{200 \cdot 2000} = 0,99 \rightarrow \text{tržby klesly o 1 \%}$$

I_Q by šel spočítat i postupem

$$I_Q = I_p \cdot I_q = 1,1 \cdot 0,9 = 0,99.$$

Poznámka: Individuální jednoduché indexy se často vyskytují sdružené do delších časových řad. V takovém případě mohou být příslušné indexy počítané vždy ke stejnému základu (např. k nejstarší hodnotě v časové řadě původních pozorování), nebo k proměnlivému základu (k bezprostředně předcházejícímu pozorování v časové řadě původních hodnot). V prvním případě, kdy základ srovnání je vždy stejný, hovoříme o tzv. bazických indexech, ve druhém případě, kdy srovnáváme vždy dvě za sebou jdoucí hodnoty v časové řadě, konstruujeme tzv., řetězové indexy. Bazické a řetězové indexy lze vzájemně přepočítávat, tzn., že násobením řetězových indexů získáme indexy bazické, a naopak dělením bazických indexů indexy řetězové.

2.3 Složené individuální indexy

Tyto indexy využíváme v případech, kdy máme stejnorodé ukazatele několika částí a chceme je shrnout za celek. Například pokud známe jednotlivé údaje v několika pobočkách a chceme srovnat vývoj za celou společnost.

V případě výpočtů složených individuálních indexů je třeba důkladně hlídat, zda počítáme složené indexy extenzivních, nebo intenzivních ukazatelů.

Extenzivní ukazatele

Pokud porovnáváme extenzivní ukazatele, pak je shrnujeme **pomocí součtu** a pak opět **index vy-
počítáme dělením**.

$$I_q = \frac{\sum q_1}{\sum q_0}$$

$$I_Q = \frac{\sum Q_1}{\sum Q_0}$$

Intenzivní ukazatele

Intenzivní ukazatele **nemůžeme sečíst** jako extenzivní, proto musíme použít **vážený aritmetický průměr**. Získáme tak **index proměnlivého složení**

$$I_{PS} = \frac{\overline{p_1}}{\overline{p_0}} = \frac{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}}$$

Index proměnlivého složení je definován jako **podíl průměrné intenzivní veličiny v běžném období a průměrné veličiny v základním období**.

Index proměnlivého složení lze vypočítat jako součin **Indexu stálého složení** a **Indexu struktury**.

$$I_{PS} = I_{SS} \cdot I_{STR}, \quad \text{tj.}$$

$$I_{PS} = \frac{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} = \frac{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum q_0}}{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} \cdot \frac{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum q_0}}, \quad \text{kde}$$

- **Index proměnlivého složení** I_{PS} zachycuje změny jak intenzivního ukazatele p , tak extenzivního ukazatele q ,
- **Index stálého složení** I_{SS} vyjadřuje vliv změny intenzivní složky při konstantním působení složky extenzivní
- **Index struktury** I_{STR} charakterizuje vliv extenzivního ukazatele při konstantním působení intenzivního ukazatele

Příklad: V minulém příkladu uvažovaná firma začala uhlí těžit a prodávat i na druhé pobočce. Na základě údajů v tabulce posuďte, jak se meziročně změnily tržby, prodané množství a průměrná cena uhlí v celé firmě. První řádek v tabulce se týká první pobočky, druhý řádek pobočky druhé.

Řešení: Jelikož se jedná o **jednu veličinu a různá pozorování** (uhlí a dvě prodejní místa), použijí se **složené individuální indexy**.

$$I_q = \frac{\sum q_1}{\sum q_0} = \frac{260+1200}{210+1000} = 1,207 \rightarrow \text{prodané množství vzrostlo o 20,7 \%}$$

$$I_Q = \frac{\sum Q_1}{\sum Q_0} = \frac{260 \cdot 1800 + 1200 \cdot 1900}{210 \cdot 2200 + 1000 \cdot 1800} = 1,215 \rightarrow \text{tržby vzrostly o 21,5 \%}$$

$$I_p = I_{PS} = \frac{\frac{\sum p_1 q_1}{\sum q_1}}{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum q_0}} = \frac{\frac{1800 \cdot 260 + 1900 \cdot 1200}{260 + 1200}}{\frac{2200 \cdot 210 + 1800 \cdot 1000}{210 + 1000}} = 1,0068 \rightarrow \text{cena vzrostla o 0,68 \%}$$

Poznámka: I_p by šel spočítat i postupem $I_p = \frac{I_Q}{I_q}$, protože $p = \frac{Q}{q}$

2.4 Souhrnné indexy

Souhrnné indexy jsou indexy nestejnorodých extenzivních ukazatelů. Nestejnorodý ukazatel značí, že hodnoty mohou pro různé části mít různou jednotku. Pokud je tedy chceme srovnávat, není možné hodnoty pouze sečíst. Pro srovnání musíme použít nějaký společný intenzivní ukazatel, vzhledem k němuž můžeme provést souhrn nestejnorodých ukazatelů. Příkladem takového nestejnorodého extenzivního ukazatele může být množství prodaných výrobků, v případě, kdy se některé prodávají v kilogramech, jiné v litrech, kusech, či metrech. Společným intenzivním ukazatelem pak mohou být ceny za jednu jednotku. Souhrnný index pak udává změnu vytvořené hodnoty (např. tržba) a nazýváme jej **hodnotový index**.

$$I_{pq} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

Stejně jako v případě indexu proměnlivého složení, udává hodnotový index změnu ovlivněnou dvěma vlivy. V praxi je ovšem vhodné získat údaje o vlivu jednotlivých ukazatelů. Abychom určili vliv jednoho ukazatele na vývoj vytvořené hodnoty, musíme u druhého ukazatele předpokládat, že je konstantní v čase. V případě **cenových indexů** předpokládáme, že je konstantní extenzivní ukazatel q_0 , naopak v případě **objemových indexů** předpokládáme, že je konstantní intenzivní ukazatel p_0 .

2.4.1 Cenové indexy

Cenové indexy se také nazývají souhrnné indexy úrovně a udávají vliv změny ceny na hodnotový index, za předpokladu že extenzivní ukazatel se nemění. Těchto indexů je celá řada, ale nejčastěji se využívají následující čtyři:

- Laspeyresův cenový index
- Paascheho cenový index

- **Loweho cenový index**
- **Fisherův cenový index**

Definice 2.2

Laspeyresův cenový index využívá jako váhu množství základního období:

$$I_{LA} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

Paascheho cenový index využívá jako váhu množství běžného období:

$$I_P = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

Loweho cenový index využívá jako váhu předem zvolené číslo q , toto číslo může být dané, nebo vypočítané, například jako aritmetický průměr extenzivního ukazatele v základním a běžném období:

$$I_{LO} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q}$$

Fisherův cenový index je počítán jako geometrický průměr Laspeyresova a Paascheho indexu:

$$I_F = \sqrt{I_{LA} \cdot I_P}$$

2.4.2 Objemové indexy

Podobně jako cenové indexy udávají objemové indexy vliv změny množství na hodnotový index, za předpokladu konstantní ceny. Objemové indexy se také nazývají souhrnné indexy množství.

Těchto indexů je opět celá řada, ale nejčastěji se využívají následující čtyři:

- **Laspeyresův objemový index**
- **Paascheho objemový index**
- **Loweho objemový index**
- **Fisherův objemový index**

Definice 2.3

Laspeyresův objemový index využívá jako váhu cenu základního období:

$$I_{LA}^q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

Paascheho objemový index využívá jako váhu cenu běžného období:

$$I_P^q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}$$

Loweho objemový index využívá jako váhu předem zvolené číslo p , toto číslo může být dané, nebo vypočítané, například jako aritmetický průměr intenzivního ukazatele v základním a běžném období:

$$I_{LO}^q = \frac{\sum p q_1}{\sum p q_0}$$

Fisherův objemový index je počítán jako geometrický průměr Laspeyresova a Paascheho indexu:

$$I_F^q = \sqrt{I_{LA}^q \cdot I_P^q}$$

Příklad: Firma se rozhodla diverzifikovat své portfolio, a kromě prodeje uhlí začala prodávat i ropu. Pomocí probraných indexů posuďte na základě údajů z tabulky, jak se změnily ceny a jak se změnil objem prodaného množství celé firmy ve druhém roce oproti prvnímu.

	1. Rok		2. Rok	
	Cena	Prodané množství	Cena	Prodané množství
Uhlí	1900	1600	2000	1800
Ropa	1000	300	2000	1000

Řešení: Jelikož se jedná o dvě různé veličiny (uhlí a ropa), použijí se souhrnné indexy.

$$I_{LA} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{2000 \cdot 1600 + 2000 \cdot 300}{1900 \cdot 1600 + 1000 \cdot 300} = 1,138 \rightarrow \text{cena měřená Laspeyresovým}$$

indexem vzrostla o 13,8 %

$$I_P = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} = \frac{2000 \cdot 1800 + 2000 \cdot 1000}{1900 \cdot 1800 + 1000 \cdot 1000} = 1,267 \rightarrow \text{cena měřená Paascheho indexem}$$

vzrostla o 26,7 %

$$I_F = \sqrt{I_{LA} \cdot I_P} = \sqrt{1,138 \cdot 1,267} = 1,201 \rightarrow \text{cena měřená Fischerovým}$$

indexem vzrostla o 20,1 %

$$I_{LA}^q = \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} = \frac{1900 \cdot 1800 + 1000 \cdot 1000}{1900 \cdot 1600 + 1000 \cdot 300} = 1,323 \rightarrow \text{objem prodaného množství měřený}$$

Laspeyersovým indexem vzrostl o 32,3 %

$$I_P^q = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0} = \frac{2000 \cdot 1800 + 2000 \cdot 1000}{2000 \cdot 1600 + 2000 \cdot 300} = 1,474 \rightarrow \text{objem prodaného množství měřený}$$

Pascheho indexem vzrostl o 47,4 %

$$I_F^q = \sqrt{I_{LA}^q \cdot I_P^q} = \sqrt{1,323 \cdot 1,474} = 1,396 \rightarrow \text{objem prodaného množství měřený}$$

Fischerovým indexem vzrostl o 47,4 %

Σ

V této kapitole jsme se zabývali základy použití indexní analýzy. Jako prostředky ke srovnávání hodnot ukazatelů slouží indexy a difference. Podle věcného obsahu ukazatelů dělíme indexy a difference na: objemové → srovnávají 2 hodnoty extenzitního ukazatele a úrovněvé → srovnávají 2 hodnoty intenzitního ukazatele. Dále lze indexy a difference dělit na individuální (jednoduché a složené) pro stejnorodé ukazatele a souhrnné (jednoduché a složené) pro různorodé ukazatele.

?

1. Jak dělíme ukazatele v rámci indexní analýzy?
2. Uveďte příklady extenzivních ukazatelů.
3. Uveďte příklady intenzivních ukazatelů.
4. Kdy se použijí jednoduché a kdy složené individuální indexy?
5. Co porovnáváme pomocí souhrnných indexů?
6. Výrobce zmrzliny prodával v 1. roce zmrzlinu za 50 Kč/l a prodal jí 1000 l. Ve 2. roce zdražil na 60 Kč/l a prodej mu klesl na 900 l/rok. Analyzujte změnu cen, prodaného množství a tržeb ve druhém roce oproti prvnímu. Jaký typ indexů se použije?

[Jednoduché individuální indexy; cena vzrostla o 20 %, prodané množství kleslo o 10 %, tržby vzrostly o 8 %]

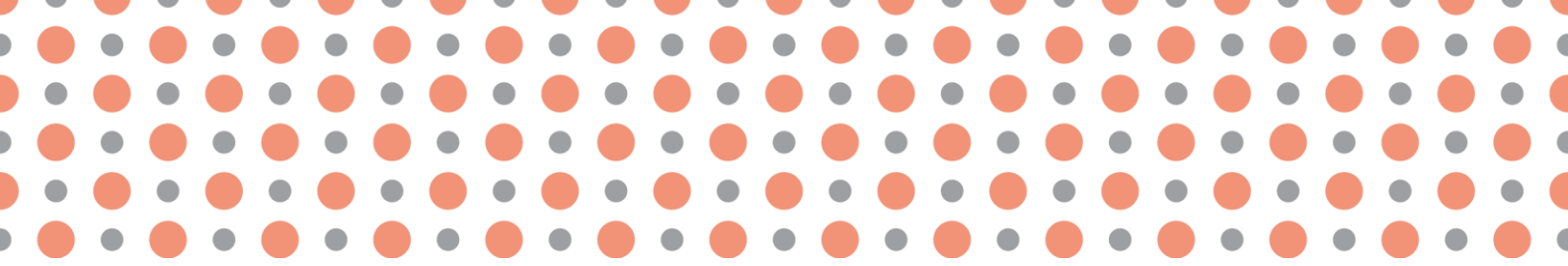
7. Výrobce zmrzliny dodával zmrzlinu do supermarketu a také ji prodával ve stánku. V 1. roce zmrzlinu dodával do supermarketu za 50 Kč/l a prodal jí 1000 l; ve stánku prodával za 80 Kč/l a prodal jí takto 300 l. Ve 2. roce zdražil cenu pro supermarket na 65 Kč/l a prodej mu klesl na 600 l/rok a naopak zlevnil zmrzlinu ve stánku, což mělo za následek zvýšení prodeje ve stánku na 400 l. Analyzujte změnu cen, prodaného množství a tržeb ve druhém roce oproti prvnímu. Jaký typ indexů se použije?

[Složené individuální indexy; cena vzrostla o 18 %, prodané množství kleslo o 23 %, tržby klesly o 9 %]



Literatura k tématu:

- [1] ANDĚL, J. *Statistické metody*. 5. vydání, Praha: Matfyzpress, 2019. ISBN 978-80-7378-381-5.
- [2] HINDLS, R. a kol. *Statistika v ekonomii*. Professional Publishing, 2018. ISBN 978-80-88260-09-7.
- [3] MACEK, J. *Ekonomická a sociální statistika*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2008. ISBN 978-80-7043-642-4.
- [4] OTIPKA, P. a V. ŠMAJSTRLA. *Pravděpodobnost a statistika* [online]. 1. vydání. Ostrava: Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava, 2007 [cit. 2024-08-12]. ISBN 80-248-1194-4. Dostupné z: <https://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/past/past.pdf>



Kapitola 3

Základní pojmy ve finanční matematice



Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat základní pojmy finanční matematiky;
- vysvětlit, jak se dělí úročení.



Klíčová slova:

Úrok, věřitel, dlužník, úrokové období, úroková míra, úročení.

Náhled kapitoly

V této kapitole bude čtenář seznámen se základními pojmy vyskytujícími se ve finanční matematice. Základním z nich bude úrok, který bude popsán jak z hlediska dlužníka, tak věřitele. Pozornost bude věnována také tomu, jak se dělí úročení v závislosti na vztahu mezi dobou splatnosti a úrokovým obdobím.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je zavedení základních pojmů týkajících se finanční matematiky, které budou dále využity ve zbytku studijního textu.

Odhad času potřebného ke studiu

1 hodina

3.1 Základní definice

Finanční matematiku lze chápat jako souhrn kvantitativních nástrojů potřebných pro kvalifikované rozhodování ve finančnictví, bankovníctví a pojišťovnictví. Dostatečná znalost těchto nástrojů umožňuje používat finanční prostředky efektivněji. Finanční matematiku také popisujeme jako souhrn základních matematických metod uplatněných v oblasti financí, jakými jsou například poskytování krátkodobých a dlouhodobých úvěrů, investování a také ostatní obchodní transakce. **Finanční gramotnost** je soubor znalostí a dovedností občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb.

Základním pojmem, na němž jsou založeny téměř všechny finanční výpočty, je **úrok**.

Definice 3.1 Z hlediska **věřitele** lze úrok chápat jako odměnu ve formě náhrady za dočasnou ztrátu kapitálu a za riziko, že tento kapitál nebude splacen v dohodnuté době a výši. Z hlediska **dlužníka** je úrok cenou za poskytnutý úvěr.

Definice 3.2 Osoba, která má dostatek financí, dále jen věřitel, poskytne osobě, která má nedostatek peněz, dále jen dlužník, finanční částku jako **úvěr**. K datu sjednanému na smlouvě musí dlužník danou částku vrátit, a to spolu s úrokem.

Výše úroku bývá nejčastěji uvedena pomocí **úrokové míry** - v procentech za určité období. Např. 5 % p.a., kde zkratka p.a. pochází z latinského **per annum** a překládá se spojením za rok, značí úrok ve výši 5 procent, který bude připsán nebo zaplacen jednou za rok, obvykle buď na jeho začátku nebo na jeho konci.

Úrok nemusí být připsován vždy ročně, existují také jiná **úroková období**:

- pololetní, per semestre (p.s.),

- čtvrtletní, per quartale (p.q.),
- měsíční, per mensem (p.m.),
- denní, per diem (p.d.).

Úroková míra, která se vztahuje ke konkrétnímu finančnímu produktu (např. hypotéčnímu úvěru), se nazývá **úroková sazba**. Úroková míra realizovaná při investování se nazývá **míra výnosnosti** (výnosnost, výnosové procento, míra zisku) a bývá většinou uváděna na roční bázi.

Dalšími základními pojmy finanční matematiky jsou doba splatnosti a úrokové období.

Definice 3.3 Doba splatnosti (úroková doba) je doba, po kterou je kapitál uložen či zapůjčen. **Úrokové období** je doba, na jejímž začátku nebo konci je připsán úrok z vkladu (je zaplacen úrok z úvěru). Obecně nemusí být stejně dlouhé jako doba splatnosti.

Úročení je způsob výpočtu úroku. Z hlediska doby splatnosti dělíme úročení na **jednoduché, složené a smíšené**. Jednoduché úročení se používá v případě, že doba splatnosti nepřekročí jedno úrokové období. Složené úročení se zase používá tehdy, úročíme-li přes více úrokových období a smíšené úročení slouží pro případ, že dobu splatnosti lze vyjádřit jako součet celočíselného počtu úrokových období a zbytku, který je kratší než jedno úrokové období.

Z hlediska doby výplaty (splacení) úroku rozdělujeme úročení na **předlhůtní** (anticipativní) a **polhůtní** (dekursivní). V případě předlhůtního úročení je úrok zaplacen na začátku úrokového období a v případě polhůtního úročení na konci úrokového období.



V této kapitole jsme objasnili základní pojmy používané ve finanční matematice. Jedním ze stěžejních pojmů je úrok. Pokud věřitel půjčí peníze dlužníkovi na nějakou konkrétní dobu, pak úrok je odměna pro věřitele za tuto půjčku. Pro dlužníka je úrok naopak cena, za kterou si kapitál mohl od věřitele půjčit. Úrok z pohledu věřitele zohledňuje náhradu za dočasnou ztrátu kapitálu, kryje rizika spojená se změnami kapitálu (např. inflací) a zohledňuje rizika spojená s nesplacením kapitálu v patřičné výši a v patřičné době. Dále jsme zavedli pojmy úrokové období a doba splatnosti a představili základní varianty dělení úročení.



1. Vysvětlete pojem finanční matematika.
2. Vysvětlete pojem finanční gramotnost.
3. Co je to úrok a jak jej lze chápat z pohledu věřitele a dlužníka?
4. Jaké existují typy úrokových období?
5. Jaké znáte typy úročení?

6. Jaké úročení se použije, pokud je kapitál zapůjčen (uložen) na 1 rok a úroky jsou přitom připisovány měsíčně?
7. Jaké úročení se použije, pokud je kapitál zapůjčen (uložen) na půl roku a úroky jsou přitom připisovány jednou ročně?



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Ekopress, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [3] GROBAŘOVÁ, S. *Základy finanční matematiky*. Brno: Tribun EU, 2012. ISBN 978-80-263-0253-7.
- [4] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*, 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.

Kapitola 4

Jednoduché úročení



Po prostudování kapitoly budete umět:

- vypočítat úrok z daného základu při použití jednoduchého úročení;
- vypočítat diskont pomocí jednoduchého úročení;
- uplatnit teoretické znalosti o jednoduchém úročení v praktických příkladech.



Klíčová slova:

Jednoduché úročení, úrok, základní kapitál, úroková míra, diskont.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme zabývat jednoduchým polhůtním a předlhůtním úročením. Ukážeme si vzorce, prostřednictvím kterých se u obou těchto druhů vypočítá úrok a uvedeme si finanční produkty, které tyto typy úročení využívají.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámení se základy jednoduchého polhůtního a předlhůtního úročení a finančními produkty, které tyto typy úročení využívají.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

4.1 Jednoduché polhůtní úročení

Jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole, úročení dělíme na předlhůtní (anticipativní) a polhůtní (dekursivní). V této kapitole probereme oba způsoby úročení, v případě, že se jedná o jednoduché úročení, podrobněji. U jednoduchého úročení se úročí pouze základní částka. Vyplacené úroky se k ní nepřičítají, nevzniká tedy úrok z úroků jako u úročení složeného.

Nejprve se budeme zabývat častějším případem, což je **jednoduché polhůtní úročení**. Protože budeme uvažovat o úrokování dekurzivním, úroky budou vypláceny vždy po uplynutí úrokového období, ke kterému se vztahují. **Úrok** ve výpočtech budeme označovat u .

Definice 4.1 U jednoduchého polhůtního úročení lze úrok definovat jako součin základního kapitálu, úrokové míry a doby, po kterou je kapitál uložen nebo zapůjčen takto:

$$u = P \cdot i \cdot t,$$

kde

- P je základní kapitál (výše půjčky nebo vkladu),
- i je roční **úroková míra vyjádřená desetinným číslem**
- t je **čas v letech**, po který je základní kapitál uložen (půjčen).

Vzorec

$$u = P \cdot i \cdot t$$

Lze také přepsat do tvaru

$$u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360} \quad \text{nebo} \quad u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{365}$$

kde

- P je opět základní kapitál (výše půjčky nebo vkladu),

- p je roční **úroková míra v procentech**
- k je **čas ve dnech**, po který je základní kapitál uložen (půjčen).

Pro vyjádření k se používají **3** tzv. **standardy**.

Definice 4.2

1. **Anglický standard ACT/365** ... měsíc má skutečný počet dnů, rok má 365 dnů a vzorec má tvar

$$u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{365}$$

2. **Francouzský standard ACT/360**... měsíc má skutečný počet dnů, rok má 360 dnů a vzorec má tvar

$$u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360}$$

3. **Německý standard 30E/360**... měsíc má 30 dnů, rok má 360 dnů a vzorec má tvar

$$u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360}$$

Příklad: Klient uložil do banky vklad ve výši 95 000 Kč dne 15.8.2018 a vybral jej i s úroky dne 31.12.2018. Jak velký byl úrok při úrokové míře 3 % p.a. a použití francouzského standardu?

Řešení:

$$u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360}$$

$$u = 95000 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{138}{360} = 1092,50 \text{ Kč}$$

Příklad: Jak se výše úroku změní, použijeme-li německý standard 30E/360 nebo anglický standard ACT/365?

$$30E/360 \quad \dots \quad u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360}$$

$$u = 95000 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{135}{360} = 1068,80 \text{ Kč}$$

$$ACT/365 \quad \dots \quad u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{365}$$

$$u = 95000 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{138}{365} = 1077,50 \text{ Kč}$$

Poznámka: U předchozích příkladů diskutujte, který ze standardů byl nejvýhodnější pro věřitele a který pro dlužníka. Je tomu tak vždy?

Úrok lze rovněž vypočítat pomocí tzv. **úrokového čísla** a **úrokového dělitele**.

Úrokové číslo budeme označovat UC je definováno takto:

$$UC = \frac{Pk}{100}$$

Úrokový dělitel UD je definován jako:

$$UD = \frac{360}{p}, \text{ resp. } UD = \frac{365}{p}$$

Výsledný úrok pak vypočteme:

$$u = \frac{UC}{UD}$$

Tento způsob výpočtu úroku lze využít například při výpočtech splatných částek u cenných papírů (směnek) nebo při účtování u běžných a kontokorentních účtů. Tohoto způsobu výpočtu úroku lze využít i v případě, že počítáme celkový úrok z většího počtu uložených nebo vypůjčených částek.

Při takových výpočtech použijeme vztah

$$u = \frac{UC_1 + UC_2 + \dots UC_n}{UD}$$

Příklad: Vypočtete celkový úrok k 31.12. z vkladů uvedených v následující tabulce:

Částka	Den uložení
12 000	17.1.
18 000	30.4.
15 000	13.9.
10 000	2.12

Úroková míra činí 4 % p.a. a má být použit francouzský standard.

Řešení: Protože máme více než jeden vklad, použijeme vzorec

$$u = \frac{UC_1 + UC_2 + \dots UC_n}{UD}$$

Nejprve vypočítáme úrokový dělitel: $UD = \frac{360}{p} = \frac{360}{4} = 90$

a poté jednotlivá úroková čísla:

Částka	Počet dní	UC
12 000	348	41 760
18 000	245	44 100
15 000	109	16 350
10 000	29	2 900
Celkem		105 110

$$u = \frac{105110}{90} = 1167,90 \text{ Kč}$$

4.1.1 Současná a budoucí hodnota kapitálu

Hodnota peněz nezůstává v čase stejná, mění se, např. vzhledem k inflaci. Při výpočtech, kde potřebujeme porovnávat finanční částky v různých časech, je pravidlem vztahovat všechny tyto částky k jedinému časovému okamžiku. Je-li tímto časovým okamžikem teď, nazývají se hodnoty přepočtených částek **současnými hodnotami**. Jestliže jsou částky přepočítány do nějakého budoucího časového bodu, nazývají se pak jejich hodnoty **budoucími hodnotami**.

V případě jednoduchého úročení je tedy splatná částka S budoucí hodnotou počátečního kapitálu P . Naopak, kapitál P je současnou hodnotou splatné částky S .

Vztah mezi těmito veličinami lze popsat pomocí tzv. základní rovnice jednoduchého polhůtního úročení:

$$S = P + u = P(1 + it) = P \left(1 + \frac{p}{100} \frac{k}{360} \right),$$

resp.

$$S = P + u = P(1 + it) = P \left(1 + \frac{p}{100} \frac{k}{365} \right),$$

kde

- S je **splatná částka**,
- P je **základní kapitál** (výše půjčky nebo vkladu),

- i je úroková míra vyjádřená desetinným číslem
- t je čas v letech, po který je základní kapitál uložen (půjčen)
- p je úroková míra v procentech
- k je čas ve dnech, po který je základní kapitál uložen (půjčen).

Příklad: Za půl roku budeme potřebovat parcelu. Můžeme ji koupit teď za 615 000 Kč nebo za půl roku v ceně 620 000 Kč. Která z variant je pro nás výhodnější, můžeme-li částku 615 000 Kč nyní investovat při roční úrokové míře 3 % p.a. a použití jednoduchého úročení?

Řešení: Porovnáme možnosti pomocí budoucí hodnoty:

$$S = P(1 + it) = 615\,000(1 + 0,03 \cdot 0,5) = 624\,225 \text{ Kč.}$$

Budeme-li tedy 615 000 investovat, budeme mít za půl roku 624 225 Kč, za 620 000 koupíme parcelu a 4 225 Kč nám zbyde. Je tedy výhodnější parcelu koupit až za půl roku.

4.1.2 Kontokorentní účet

Tento typ účtu nabízí klientovi banky možnost přechodně přejít z kladných zůstatků do záporných (do debetu) s tím, že je předem dohodnuta maximální výše debetu. Klient takto získává krátkodobou půjčku, která bývá v praxi označována jako kontokorentní úvěr.

V souvislosti s poskytováním těchto úvěrů se setkáváme s následujícími pojmy:

- úvěrový rámec (UR) - maximální povolený debet na účtu,
- kreditní úrok - úrok z kladných zůstatků připsaný ve prospěch majitele účtu,
- debetní úrok - úrok ze záporných zůstatků, které nejsou větší než sjednaný úvěrový rámec,
- pohotovostní provize - náklady vzniklé v důsledku sjednaného, avšak nečerpaného úvěru; patří sem pohotovostní provize z nečerpaného úvěrového rámce (NU),
- provize za překročení úvěrového rámce (PR) - sankční úrok při porušení sjednané výše úvěrového rámce.

Uzávěrku kontokorentního účtu provádíme tak, že postupně vypočteme výši kreditních úroků, debetních úroků a provizí - pomocí úrokových čísel a příslušných úrokových dělitelů. K tomu je daná kreditní úroková míra, debetní úroková míra a dále sazby pro pohotovostní provizi z nečerpaného úvěru a pro sankční úrok v případě překročení úvěrového rámce. Konečný zůstatek k poslednímu dni v roce získáme přičtením kreditních úroků k poslednímu zůstatku a odečtením úrokových nákladů (debetní úroky, provize), případně dalších poplatků.

4.2 Jednoduché předlhůtní úročení

V předlhůtním neboli **anticipativním úročení** je úrok vyplácen na začátku úrokového období. Příjemce kapitálu tedy nedostává celou nominální částku, ale obnos snížený o úrok, což je vlastně obchodní diskont. V době splatnosti kapitálu je pak třeba zaplatit celou nominální částku.

Takový úrok se nazývá diskont D a počítá se ze splatné částky S . Částka P je rovna částce S snížené o diskont. Příslušná úroková míra se nazývá diskontní míra d , zbytková doba splatnosti v letech je označena t .

Definice 4.3 Diskont D lze definovat jako součin splatné částky, diskontní míry a doby, po kterou je kapitál uložen nebo zapůjčen takto:

$$D = S \cdot d \cdot t,$$

kde

S je **splatná částka**,

d je **diskontní míra vyjádřená desetinným číslem**,

t je **doba splatnosti v letech**.

Skutečně poskytnutá částka P se tedy vypočte:

$$P = S - D = S - Sdt = S(1 - dt)$$

V praxi se používají oba způsoby jednoduchého úročení, i když ne ve stejné míře, protože polhůtní způsob je podstatně častější. Krátkodobé cenné papíry, jejichž doba splatnosti je kratší než jeden rok, bývají obchodovány na principu jednoduchého diskontu, zatímco při tvorbě uzávěrek běžných či kontokorentních účtů se používá polhůtního způsobu úročení.

Σ

V této kapitole byly ukázány jednotlivé typy jednoduchého úročení a praktické postupy aplikací jednoduchého předlhůtního a polhůtního typu úročení. Pozornost byla u jednoduchého polhůtního úročení věnována také třem typům standardů, které se při jednoduchém úročení využívají.

?

1. Jaké znáte typy jednoduchého úročení a jak se od sebe principálně odlišují?
2. Jaké znáte finanční produkty využívající uvedené typy úročení?
3. Jaký postup využijete při provádění uzávěrek na kontokorentních účtech?

4. Klient si půjčil 100 000 dne 16.9.2020 při roční úrokové míře 4 %. Kolik vrátí 10.11.2020, je-li aplikováno jednoduché úročení a francouzský standard?
[S = 100 611 Kč]
5. Zastavili jsme v zastavárně nábytek za 100 000 Kč. Za 25 dnů jej vykoupíme zpět za 125 000 Kč. Jaké roční úrokové míře to odpovídá při použití francouzského standardu?
[S = 360 %]



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Ekopress, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [3] GROBAŘOVÁ, S. *Základy finanční matematiky*. Brno: Tribun EU, 2012. ISBN 978-80-263-0253-7.
- [4] PEREN, F.W. *Math for Business and Economics, Compendium of Essential Formulas*. Springer Berlin Heidelberg, 2023. ISBN 978-3-662-67646-2.
- [5] RADOVÁ, J., MÁLEK J. a P. DVOŘÁK. *Finanční matematika pro každého*. 8. rozšířené vydání, Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4821-3.
- [6] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*, 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.

Kapitola 5

Složené úročení



Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat specifika složeného úročení;
- počítat splatné částky v případě různých typů úrokových období;
- aplikovat principy složeného úročení v praxi.



Klíčová slova:

Složené úročení, základní kapitál, splatná částka, úrok.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme zabývat složeným úročením, tj. úročením u kterého se úročí i úroky. Ukážeme si vzorce, prostřednictvím kterých vypočítá u tohoto typu úročení splatná částka a uvedeme si finanční produkty, které tento typ úročení využívají.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je seznámení se základy složeného úročení a finančními produkty, které tento typ úročení využívají.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

5.1 Základní pojmy

Složeného úročení využíváme hlavně v odvětví dlouhodobých investic, kde se počítají úroky z úroků. Při složeném úročení se úroky připočítají k počátečnímu kapitálu (k poskytnutému úvěru nebo k uloženému vkladu) a spolu s ním se dále úročí.

Na rozdíl od jednoduchého úročení budeme v případě složeného úročení předpokládat, že počáteční kapitál K_0 je úročen po dobu tvořenou více úrokovými obdobími, kde úrokové období je jeden rok. Úrok bude ke vkladu připsán vždy na konci roku, a následující rok bude znovu spolu s vkladem úročen, vzniknou tedy úroky z úroků. Vzhledem k době připisování úroků půjde o polhůtní (roční) složené úročení.

Předpokládáme, že K_0 je počáteční kapitál. Zajímá nás, jak se změní jeho výše za n let, jestliže úroky jsou připisovány vždy na konci roku a další rok znovu úročeny při neměnné úrokové míře i .

Rok	Stav na konci roku
1	$K_1 = K_0(1 + i)$
2	$K_2 = K_1(1 + i) = K_0(1 + i)^2$
3	$K_3 = K_2(1 + i) = K_0(1 + i)^3$
.	.
.	.
n	$K_n = K_0(1 + i)^n$

Obr. 2 Složené úročení

Z tabulky je zřejmé, že kapitál za n let dosáhne výše

$$K_n = K_0(1 + i)^n,$$

kde $n = 1, 2, \dots$

Částky K_j , $j = 1, \dots, n$, na konci i -tého roku tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $1+i$.

Definice 5.1 Číslo $1+i$ se nazývá **úrokovací faktor** neboli **úročitel**. Úročitel můžeme interpretovat jako budoucí hodnotu jednotkového kapitálu na konci roku.

Z hlediska času je částka K_n budoucí hodnotou počátečního kapitálu K_0 a, naopak, částka K_0 je současnou hodnotou splatné částky K_n . Současnou hodnotu K_0 vypočítáme ze základní rovnice:

$$K_0 = K_n \frac{1}{(1+i)^n}$$

Definice 5.2 Zlomek $\frac{1}{1+i}$ uvedený ve vzorci se nazývá **diskontní faktor** neboli **odúročitel** a je interpretován jako současná hodnota jednotkového kapitálu počítaná za období jednoho roku.

Příklad: Jak vzroste částka 10 000 Kč uložená na účtu po dobu 5 let při ročním složeném úročení? Úroková míra je 10 % p.a.

Řešení: Pro výpočet použijeme vzorec

$$K_n = K_0(1+i)^n,$$

pro $n = 5$. Tj.

$$K_5 = 10000(1+0,1)^5 = 16105,10 \text{ (Kč)}.$$

Částka 10 000 Kč vzroste za uvedených podmínek na 16 105,10 Kč.

Příklad: Jakou částku musíme dnes složit na účet, abychom z něj za 3 roky mohli vybrat 20 000 Kč? Úroková míra je 6 % p.a.

Řešení: Pro výpočet použijeme vzorec

$$K_0 = K_n \frac{1}{(1+i)^n}$$

pro $n = 3$. Tj.

$$K_0 = 20000 \frac{1}{(1+0,06)^3} = 16792,40 \text{ (Kč)}.$$

Na účet dnes musíme vložit 16 792,40 Kč.

5.2 Častější připisování úroků

Předpokládáme, že počáteční kapitál je K_0 , doba splatnosti je tvořena více úrokovými obdobími kratšími než jeden rok, jejichž počet je vyjádřen celým kladným číslem m , úrok je připsán vždy na konci úrokového období, při roční úrokové míře i . Jestliže je dána roční úroková míra, a přitom úrokové období je kratší než jeden rok, nazývá se často tato roční úroková míra jako **nominální úroková míra**.

U tohoto typu úročení předpokládáme, že na začátku roku uložíme částku K_0 a na konci každé m -tiny roku připíšeme úrok na základě složeného úročení při nominální úrokové míře i . Je-li úrokové období kratší než jeden rok, je nutné nominální úrokovou míru vydělit příslušnou hodnotou m . Nejpoužívanější hodnoty m (úrokových období) jsou: 1 – roční, 2 – pololetní, 4 – čtvrtletní, 12 – měsíční, 52 – týdenní, 365 – denní.

Za n let kapitál dosáhne výše

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

kde $n = 1, 2, \dots$

Příklad: Na kolik vzroste vklad 10 000 Kč uložený 5 roků při úrokové míře 10 % p.a. se čtvrtletním připisováním úroků?

Řešení: Pro výpočet použijeme vzorec

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

pro $n = 5$ a $m = 4$. Tj.

$$K_5 = 10000 \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{20} = 16386,20 \text{ Kč}$$

Částka 10 000 Kč vzroste za uvedených podmínek na 16386,20 Kč.

Je to samozřejmě více než kdyby byly úroky připisovány jen jednou ročně (viz Příklad dříve, kde při ročním připisováním úroků a jinak stejném zadání vyšlo 16 105,10 Kč.)

Poznámka: n (počet let, po který je kapitál uložen) nemusí být celé číslo. Je nutné jej ale vyjádřit ve správných jednotkách – *letech*.

Příklad: Na kolik vzroste vklad 10 000 Kč uložený 5 měsíců při úrokové míře 10 % p.a. s měsíčním připisováním úroků?

Příklad: Na kolik vzroste vklad 10 000 Kč uložený 5 měsíců při úrokové míře 10 % p.a. s měsíčním připisováním úroků?

Řešení: Pro výpočet použijeme vzorec

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

pro $n = \frac{5}{12}$ a $m = 12$. Tj.

$$K_{\frac{5}{12}} = 10000 \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{\frac{5}{12} \cdot 12} = 10000 \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^5 = 10\,423,67 \text{ Kč}$$

Částka 10 000 Kč vzroste za uvedených podmínek na 10 423,67 Kč.

5.3 Smíšené úročení

Smíšené úročení je **kombinací složeného a jednoduchého úročení** v případě, že **doba splatnosti n není vyjádřena přirozeným číslem**. Doba splatnosti n je zde dána jako **součet celého počtu roků N a zbytku Z** , který je kratší než jeden rok.

Po dobu N jsou úroky připisovány vždy na konci úrokového období a v dalším období znovu úročeny, pouze na konci doby splatnosti (za dobu Z) se úročí jednoduše.

Za dobu $n = N+Z$ kapitál dosáhne výše

$$K_n = K_0(1+i)^N(1+iZ)$$



V rámci kapitoly byla pozornost věnována složenému úročení. Na rozdíl od jednoduchého úročení, které bylo detailněji řešeno v předchozí kapitole, jsou zde úroky připsány vždy na konci úrokových období a pak opět spolu s vkladem znovu úročeny. Vznikají tedy tzv. úroky z úroků. Úroky lze připisovat buď koncem každého roku nebo v rámci každé m -tiny roku při nominální úrokové míře i . V takovém případě hovoříme o složeném úročení s častějším připisováním úroků. Smíšené úročení je kombinací složeného a jednoduchého úročení v případě, že doba splatnosti není vyjádřena celým kladným číslem, ale je dána jako součet celého počtu úrokových období a zbytku, který je kratší než jedno úrokové období.



1. Popište základní principy složeného úročení a srovnejte jej s úročením jednoduchým.
2. Jak je definováno složené úročení s častějším připisováním úroků?
3. Jaké znáte typy úrokových období?
4. Jaký je princip smíšeného úročení a jak je vyjádřeno matematicky?
5. Vložíme na spořicí účet 100 000 Kč při roční úrokové míře 2 %. Jakou částku budeme mít na účtu po 6 letech, jsou-li úroky připisovány ročně a jsou úročeny?

[112 616 Kč]

Jakou částku musíme vložit na účet, chceme-li si za 10 let vybrat 1 000 000 Kč při roční úrokové míře 5 %, jsou-li úroky připisovány ročně a jsou úročeny?

[613 913 Kč]

6. Na účet vložíme 100 000 Kč při roční úrokové míře 3 %. Jakou částku budeme mít na účtu po 6 letech, jsou-li úroky připisovány měsíčně a jsou úročeny?

[119 695 Kč]



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Eko-press, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [3] GROBAŘOVÁ, S. *Základy finanční matematiky*. Brno: Tribun EU, 2012. ISBN 978-80-263-0253-7.
- [4] PEREN, F.W. *Math for Business and Economics*, Compendium of Essential Formulas. Springer Berlin Heidelberg, 2023. ISBN 978-3-662-67646-2.
- [5] RADOVÁ, J., MÁLEK J. a P. DVOŘÁK. *Finanční matematika pro každého*. 8. rozšířené vydání, Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4821-3.
- [6] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*, 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.

Kapitola 6

Investiční rozhodování



Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozhodnout, zda se investice vyplatí či nevyplatí;
- porovnávat investice mezi sebou na základě jejich výnosnosti;
- vypočítat míru výnosnosti investice.



Klíčová slova:

Investice, investiční trojúhelník, současná hodnota, budoucí hodnota, finanční tok, vnitřní míra výnosnosti.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme zabývat investičním rozhodováním, při kterém se berou v potaz 3 kritéria – rizikovost, likvidita a výnosnost. Podrobněji se zaměříme na porovnání investic z hlediska jejich výnosnosti prostřednictvím dvou pravidel: pravidla čisté současné hodnoty a pravidla vnitřní míry výnosnosti.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je popsání metod a praktické využití metod, které lze využít pro porovnání investic z hlediska jejich výnosnosti a pro stanovení vnitřní míry výnosnosti.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

6.1 Pravidlo čisté současné hodnoty

Při investičním rozhodování jsou posuzována tři základní **kritéria rozhodování**:

- výnosnost investice,
- její rizikovost,
- likvidita investice.

Tato kritéria tvoří tzv. **investiční trojúhelník** a na jejich základě se investor rozhoduje pro přijetí nebo zamítnutí plánované investice.

Při výpočtu výnosnosti je přitom potřeba vzít v úvahu to, že hodnota peněz nezůstává v čase stejná, mění se např. vlivem inflace. Proto je potřeba všechny finanční toky realizované v rámci investic převést vzhledem k jednomu, tzv. referenčnímu, datu. Použijeme přitom úročení, jdeme-li časově dopředu (zajímají nás budoucí hodnoty) a diskontování při pohybu dozadu (zajímají nás současné hodnoty).

Zaměří-li se investor pouze na výnosnost investice, tedy zajímá-li ho posouzení zisků a ztrát, aplikuje se nejčastěji některé z následujících kritérií:

- **pravidlo čisté současné hodnoty,**
- **vnitřní míra výnosnosti.**

První z těchto pravidel si nyní detailněji popíšeme: Nechť $C_0, C_1, \dots, C_n$ jsou finanční toky vzhledem k dané investici, z nichž C_0 počáteční výdaj (pořizovací cenu investice) a nechť i je úroková míra charakteristická pro investice se srovnatelnými parametry.

Definice 6.1 Čistou současnou hodnotu investice investice označovanou **NPV** (net present value) vypočítáme jako:

$$NPV = C_0 + \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} \dots + \frac{C_n}{(1+i)^n}.$$

Poznámka: Jestliže některé z finančních toků $C_1, \dots, C_n$ představují výdaje, musíme je do vzorce uvést se záporným znaménkem. Příjmové položky dosadíme s kladným znaménkem.

Pravidlo čisté současné hodnoty spočívá v porovnání hodnot NPV a 0 a podle toho, která z hodnot je větší, se doporučuje investovat nebo neinvestovat:

- je-li $NPV > 0$, pak investuj,
- je-li $NPV < 0$, pak neinvestuj,
- je-li $NPV = 0$, pak nelze podle tohoto pravidla rozhodnout.

Příklad: Zjistěte, jestli se vyplatí investovat do bytu, který pronajmeme na dva roky a poté jej opět prodáme. Úroková míra v rámci investic do nemovitostí je odhadována na 7 % p.a. Příslušné předpokládané finanční toky jsou uvedeny v následující tabulce:

Rok	0	1	2	3
Příjmy	-	66 000	72 000	760 000
Výdaje	700 000	-	-	-

Řešení: Vypočteme čistou současnou hodnotu podle

$$NPV = C_0 + \frac{C_1}{1+i} + \frac{C_2}{(1+i)^2} \dots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$NPV = -700000 + \frac{66000}{1+0,07} + \frac{72000}{(1+0,07)^2} + \frac{760000}{(1+0,07)^3} = 44\,956$$

Protože je NPV kladná, investice by se vyplatila.

6.2 Pravidlo vnitřní míry výnosnosti

Vnitřní mírou výnosnosti rozumíme míru výnosnosti realizovanou v rámci dané investice.

Definice 6.2 Vnitřní míra výnosnosti je označována r a je vypočítána z rovnice

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n} = 0.$$

Jsou-li $C_0 < 0$, $C_1 > 0$, $\dots$, $C_n > 0$ finanční toky charakterizující danou investici, a i míra výnosnosti, která je běžně dostupná na trhu v rámci investic se srovnatelnými parametry, pak **pravidlo vnitřní míry výnosnosti** zní:

- je-li $r > i$, pak investuj,

- je-li $r < i$, pak neinvestuj.

Poznámka: Hodnota r vnitřní míry výnosnosti se odhaduje z výše uvedené rovnice a lze ji vypočítat např. použitím WolframAlpha nebo pomocí Excelu - MÍRA.VÝNOSNOSTI

Příklad: Zjistěte pomocí vnitřní míry výnosnosti, jestli se vyplatí investovat do bytu, který pronajmeme na dva roky a poté jej opět prodáme. Úroková míra v rámci investic do nemovitostí je odhadována na 7 % p.a. Příslušné předpokládané finanční toky jsou uvedeny v následující tabulce:

Rok	0	1	2	3
Příjmy	-	66 000	72 000	760 000
Výdaje	700 000	-	-	-

Řešení: Hodnotu vnitřní míry výnosnosti budeme odhadovat z rovnice

$$C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n} = 0,$$

tj. z rovnice

$$-700000 + \frac{66000}{1+r} + \frac{72000}{(1+r)^2} + \frac{760000}{(1+r)^3} = 0.$$

Použitím např. WolframAlpha a příkazem `solve(-700000 + 66000/(1+r) + 72000/(1+r)^2 + 760000/(1+r)^3=0)` získáme hodnotu $r = 0,0945$ neboli 9,45 %. Jestliže je míra výnosnosti v rámci investic do bytů $i = 0,07$ neboli 7 %, potom vypočtená hodnota 9,45 % je vyšší a podle pravidla vnitřní míry výnosnosti lze investici do bytu doporučit.



Při investičním rozhodování jsou posuzována tři základní kritéria rozhodování: výnosnost investice, její rizikovost a likvidita investice. Tato kritéria tvoří tzv. investiční trojúhelník a na jejich základě se investor rozhoduje pro přijetí nebo zamítnutí plánované investice. Zaměří-li se investor na výnosnost projektu, tedy zajímá-li ho hlavně posouzení zisků či ztrát, tak se soustředí především výše řešená kritéria: pravidlo čisté současné hodnoty a pravidlo vnitřní míry výnosnosti.



1. Popište základní pravidla pro ocenění investic.
2. Jak je definováno pravidlo čisté současné hodnoty?
3. Jak je definováno pravidlo vnitřní míry výnosnosti?

4. S čím porovnáváme vypočítanou hodnotu u pravidla čisté současné hodnoty a s čím u pravidla vnitřní míry výnosnosti?
5. Zjistěte, jestli se vyplatí investovat do bytu, který pronajmeme na 4 roky a poté jej opět prodáme. Úroková míra v rámci investic do nemovitostí je odhadována na 8 % p.a. Příslušné předpokládané finanční toky jsou uvedeny v následující tabulce:

Rok	0	1	2	3	4
Příjmy	-	100 000	110 000	115 000	1 100 000
Výdaje	1 000 000	-	-	-	-

[investice se vyplatí]

6. U předchozího příkladu zjistěte, jakou má daná investice vnitřní míru výnosnosti a na jejím základě ověřte, že se investice vyplatí.

[$r = 10,6 \%$, protože je $r > i$, investice se vyplatí]



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Eko-press, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [3] RADOVÁ, J., MÁLEK J. a P. DVOŘÁK. *Finanční matematika pro každého*. 8. rozšířené vydání, Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4821-3.
- [4] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*, 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.
- [5] WEYGANDT, J. J. a kol. *Managerial Accounting: Tools for Business Decision-Making*. 9. vydání, Wiley, 2020. ISBN 978-1-119-70958-9.

Kapitola 7

Spoření



Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozlišovat mezi krátkodobým, dlouhodobým a kombinovaným spořením;
- počítat naspořené částky v jednotlivých případech spoření;
- odvodit výši úložky v rámci jednotlivých typů spoření.



Klíčová slova:

Spoření, úroková sazba, úrokové období, úložka, naspořená částka.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme zabývat různými typy spoření jednak z hlediska toho, jsou-li částky ukládány na začátku nebo na konci intervalů a také podle toho, jaký je vztah mezi úrokovým obdobím a četností ukládání.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je popsání základních typů spoření a ilustrace teorie týkající se spoření na praktických příkladech.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

7.1 Základní pojmy

Spořením rozumíme pravidelné ukládání určité částky po dobu konečné délky. Součet všech úložík se nazývá částka uložena. Součet uložené částky a příslušných úroků se nazývá částka naspořena. Ta bývá obvykle cílem výpočtů v oblasti spoření.

Rozlišujeme několik typů spoření.

Definice 7.1

- **Krátkodobé** spoření – doba tohoto spoření nepřesáhne jedno úrokové období. Úroky jsou připisovány na konci doby spoření. Jednotlivé složky jsou úročeny na základě jednoduchého úročení.
- **Dlouhodobé** spoření – doba spoření bude delší než jedno (obvykle roční) úrokové období. Spoříme několik úrokových období. V rámci úrokového období spoříme pouze jednou. Úroky se připisují na konci každého úrokového období k naspořené částce a dále se s touto částkou úročí.
- **Kombinované** spoření – je kombinací krátkodobého a dlouhodobého spoření.
- **Kombinované spoření s častějším připisováním úroků**
- **Předlůnní** spoření – danou částku spoříme na počátku pravidelného časového intervalu
- **Polhůnní** spoření – danou částku spoříme na konci pravidelného časového intervalu

7.2 Krátkodobé spoření

Spoření krátkodobé je takové spoření, u kterého doba nepřesáhne jedno (obvykle roční) úrokové období, úroky budou připsány na konci doby spoření, nejpozději na konci úrokového období a jednotlivé úložky budou úročeny na základě jednoduchého úročení.

7.2.1 Krátkodobé předlhůtní spoření

Ukládáme vždy na začátku každé m -tiny roku částku ve výši x Kč, i je roční úroková sazba vyjádřena jako desetinné číslo. Předpokládáme roční úrokové období. V případě, že spoříme takto počátkem každé m -tiny úrokového období částku x Kč, bude mít naspořená částka za jeden rok tvar

$$S = mx \left(1 + \frac{m+1}{2m} i \right).$$

Příklad: Jakou částku uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové míře 9 % p.a.? Úroky jsou připisovány až na konci roku.

Řešení: Jedná se o krátkodobé předlhůtní spoření, použijeme proto vzorec

$$S = mx \left(1 + \frac{m+1}{2m} i \right)$$

pro $m = 12$ a $x = 1200$.

$$S = 12 \cdot 1200 \left(1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12} 0,09 \right) = 15102 \text{ (Kč)}$$

7.2.2 Krátkodobé polhůtní spoření

Ukládáme vždy na konci každé m -tiny roku částku ve výši x Kč, i je roční úroková sazba vyjádřena jako desetinné číslo. Předpokládáme roční úrokové období. V případě, že spoříme takto koncem každé m -tiny úrokového období částku x Kč, bude mít naspořená částka za jeden rok tvar

$$S = mx \left(1 + \frac{m-1}{2m} i \right).$$

Příklad: Jakou částku uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme koncem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové míře 9 % p.a.? Úroky jsou připisovány až na konci roku.

Řešení: Jedná se o krátkodobé polhůtní spoření, použijeme proto vzorec

$$S = mx \left(1 + \frac{m-1}{2m} i \right)$$

pro $m = 12$ a $x = 1200$.

$$S = 12 \cdot 1200 \left(1 + \frac{12-1}{2 \cdot 12} 0,09 \right) = 14994 \text{ (Kč)}$$

7.3 Dlouhodobé spoření

Dlouhodobé spoření je spoření za několik úrokových období. Pro odvození vzorců pro výpočet celkové naspořené částky za n období budeme předpokládat, že v rámci úrokového období spoříme pouze jednou a rovněž, že úrokové období je jeden rok. Podle toho, zda částka bude uložena na počátku či na konci úrokového období, budeme opět rozlišovat spoření předlhůtní a polhůtní.

7.3.1 Dlouhodobé předlhůtní spoření

Předpokládejme, že vždy na začátku roku ukládáme částku ve výši x Kč po dobu n let, i je roční úroková sazba vyjádřena jako desetinné číslo a že úrokové období je 1 rok. V případě, že spoříme takto začátkem každého roku částku x Kč, bude mít naspořená částka za n let tvar

$$S = x(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Příklad: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně počátkem každého roku částku 20 000 Kč při roční úrokové míře 5 %? Úroky jsou připisovány vždy na konci roku.

Řešení: Jedná se o dlouhodobé předlhůtní spoření, použijeme proto vzorec

$$S = x(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

pro $n = 5$ a $x = 20000$.

$$S = 20000(1+0,05) \frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05} = 116038,30 \text{ (Kč)}$$

7.3.2 Dlouhodobé polhůtní spoření

Předpokládejme, že vždy na konci roku ukládáme částku ve výši x Kč po dobu n let, i je roční úroková sazba vyjádřena jako desetinné číslo a že úrokové období je 1 rok. V případě, že spoříme takto koncem každého roku částku x Kč, bude mít naspořená částka za n let tvar

$$S = x \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Příklad: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně koncem každého roku částku 20 000 Kč při roční úrokové míře 5 %? Úroky jsou připisovány vždy na konci roku.

Řešení: Jedná se o dlouhodobé polhůtní spoření, použijeme proto vzorec

$$S = x \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

pro $n = 5$ a $x = 20000$.

$$S = 20000 \frac{(1 + 0,05)^5 - 1}{0,05} = 110512,60 \text{ (Kč)}$$

7.4 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

Částku ve výši x Kč ukládáme m -krát za zvolené úrokové období (opět nejčastěji roční) po dobu n úrokových období při neměnné úrokové míře i , vztažené ke zvolenému úrokovému období. Podle toho, jestli spoříme počátkem nebo na konci každé m -tiny úrokového období, rozlišujeme předlhůtní a polhůtní případ kombinovaného spoření.

Předlhůtní spoření:

$$S = mx \left(1 + \frac{m-1}{2m} i \right) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Polhůtní spoření

$$S = mx \left(1 + \frac{m+1}{2m} i \right) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Příklad: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně počátkem každého čtvrtletí částku 5000 Kč při roční úrokové míře 5 %? Úroky jsou připisovány vždy na konci roku.

Řešení: Jedná se o kombinaci dlouhodobého a krátkodobého předlhůtního spoření, použijeme proto vzorec

$$S = mx \left(1 + \frac{m+1}{2m} i \right) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

pro $n = 5$, $m = 4$ a $x = 5000$.

$$S = 4 \cdot 5000 \left(1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} 0,05 \right) \frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05} = 113966,10 (\text{Kč})$$

Příklad: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně koncem každého čtvrtletí částku 5000 Kč při roční úrokové míře 5 %? Úroky jsou připisovány vždy na konci roku.

Řešení: Jedná se o kombinaci dlouhodobého a krátkodobého polhútního spoření, použijeme proto vzorec

$$S = mx \left(1 + \frac{m-1}{2m} i \right) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

pro $n = 5$, $m = 4$ a $x = 5000$.

$$S = 4 \cdot 5000 \left(1 + \frac{4-1}{2 \cdot 4} 0,05 \right) \frac{(1+0,05)^5 - 1}{0,05} = 112584,70 (\text{Kč})$$

7.5 Spoření s častějším připisováním úroků

Předpokládáme, že částka x je ukládána na začátku (konci) m -tiny roku po dobu n let, i je roční úroková sazba vyjádřena jako desetinné číslo a úrokové období je m -tina roku. V takovém případě pouze ve vzorcích pro dlouhodobé spoření

$$S = x \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad S = x(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

použijeme $\frac{i}{m}$ místo i a místo n hodnotu $n \cdot m$.

Příklad: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně koncem každého čtvrtletí částku 5000 Kč při roční úrokové míře 5 %? Úroky jsou připisovány čtvrtletně.

Řešení: Jedná se o polhútní spoření s častějším připisováním úroků, proto

$$S = x \frac{(1+\frac{i}{m})^{mn} - 1}{\frac{i}{m}} = 5000 \frac{(1+\frac{0,05}{4})^{4 \cdot 5} - 1}{\frac{0,05}{4}} = 112\,815 \text{ Kč}$$



V rámci této kapitoly byly probrány jednotlivé typy spoření - krátkodobé, dlouhodobé, kombinované a s častějším připisováním úroků. Při krátkodobém spoření spoříme po dobu jednoho úrokového období, proto je délka intervalu mezi dvěma úlozkami menší než úrokové období. U dlouhodobého spoření spoříme po dobu více úrokových období, délka intervalu mezi dvěma úlozkami je rovna právě jednomu úrokovému období. Kombinované spoření je typické tím, že spoříme po dobu více úrokových období, délka intervalu mezi dvěma úlozkami je menší než jedno úrokové období. U spoření s častějším připisováním úroků se úložky ukládají víckrát za rok ve stejně dlouhých intervalech, v jakých se úročí.



1. Uvedte jednotlivé typy spoření a jejich dělení.
2. Jak je definováno krátkodobé a dlouhodobé spoření?
3. Jak se od uvedených typů odlišuje kombinované spoření?
4. Popište rozdíly mezi předlůtním a polhůtním typem spoření.
5. Za 5 let chceme koupit automobil za 750 000 Kč. Kolik musíme spořit koncem každého roku při roční úrokové míře 12 %, abychom si na něj našetřili?
[118 057 Kč]
6. Kolik musíme ukládat koncem každého čtvrtletí, abychom měli po 7 letech našetřen 1 000 000 Kč při roční úrokové míře 4 %? Předpokládáme, že jsou úroky připisovány ročně.
[31 185 Kč]
7. Kolik musíme ukládat koncem každého čtvrtletí, abychom měli po 7 letech našetřen 1 000 000 Kč při roční úrokové míře 4 %? Předpokládáme, že jsou úroky připisovány čtvrtletně.
[31 124 Kč]



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Eko-press, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [3] GROBAŘOVÁ, S. *Základy finanční matematiky*. Brno: Tribun EU, 2012. ISBN 978-80-263-0253-7.

- [4] RADOVÁ, J., MÁLEK J. a P. DVOŘÁK. *Finanční matematika pro každého*. 8. rozšířené vydání, Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4821-3.
- [5] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*, 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.

Kapitola 8

Důchody



Po prostudování kapitoly budete umět:

- rozlišovat jednotlivé typy důchodů;
- počítat současné hodnoty důchodů;
- počítat budoucí hodnoty určitých typů důchodů.



Klíčová slova:

Důchod, současná hodnoty, budoucí hodnota, výplatní období.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme zabývat důchody a jejich dělením. Nejprve budou zavedeny základní pojmy týkající se dané problematiky a poté budou podrobně rozebrána hlediska na základě kterých se důchody klasifikují. Teorie týkající se důchodů bude ilustrována na konkrétních praktických příkladech.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je popsání důchodů z pohledu finanční matematiky a rozebrání možností, jak lze důchody klasifikovat.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

8.1 Základní pojmy

Definice 8.1 Důchodem ve finanční matematice rozumíme pravidelně se opakující systém plateb stejných částek při konstantní úrokové sazbě.

Platby důchodu se mohou opakovat uvnitř úrokovacích období (buď na začátcích, nebo na koncích splátkových období). V obou případech můžeme pravidelnosti placení využít k jednoduché analýze finančního vztahu. Získáme tak především metodický postup pro tvorbu matematického popisu takového typu finančních operací, které urychlí zpracování a vyhodnocení finančního vztahu.

Při počítání důchodů nás bude zajímat především jeho **současná hodnota** (present value) PV, která je rovna součtu všech budoucích plateb diskontovaných k dnešnímu datu. Někdy se zjišťuje také **budoucí hodnota** (future value) důchodu, označená FV, jakožto součet budoucích hodnot všech výplat.

Definice 8.2 Výplaty u důchodu je pojmenována jako **anuita**.

Definice 8.3 Výplatním obdobím rozumíme období mezi dvěma výplatami.

Výplatní období může být stejně dlouhé jako úrokové období nebo může být kratší.

Důchody lze klasifikovat podle několika hledisek, například takto:

- podle celkové doby výplat
 - důchod dočasný,
 - důchod věčný;
- podle toho, je-li výplata uskutečněna na začátku či na konci pravidelného intervalu

- důchod předlhůtní,
- důchod polhůtní;
- podle toho, odkdy se s výplatami začíná
 - důchod bezprostřední,
 - důchod odložený;
- podle toho, je-li výplatní období dlouhé právě jeden rok nebo je kratší než jeden rok
 - důchod roční,
 - důchody področní.

8.2 Důchody dočasné

Anuita (výplata důchodu) je v tomto případě omezena n časovými obdobími. Tyto typy důchodů budeme dále dělit takto:

- **Důchod bezprostřední předlhůtní roční**

S vyplácením anuit ve výši a Kč se začne ihned. Dále předpokládáme, že anuita je vyplácena počátkem každého roku při roční neměnné úrokové míře i (s ročním úročením). Výplatní období je tedy jeden rok a je shodné s úrokovým obdobím.

Pro současnou hodnotu tohoto důchodu platí:

$$PV = a(1 + i) \frac{1 - \frac{1}{(1 + i)^n}}{i}$$

Budoucí hodnota FV je vyjádřena takto:

$$FV = a(1 + i) \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

- **Důchod bezprostřední polhůtní roční**

Pro tento důchod předpokládáme, že částka a Kč je vyplácena koncem každého roku při neměnné úrokové míře i , s výplatami se začíná odteď.

Pro současnou hodnotu tohoto důchodu platí:

$$PV = a \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Budoucí hodnota FV je vyjádřena takto:

$$FV = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- **Důchod bezprostřední předlůhnutí področní**

Částka a Kč je vyplácena od nynějška počátkem každé m -tiny roku při neměnné nominální (roční) úrokové míře i , přičemž úrok je připsán m -krát za rok, výplatní období je právě jedna m -tina roku. Výplatní a úrokové období mají opět stejnou délku.

Současná hodnota:

$$PV = a \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{m}} \right)^{mn}}{1 - \frac{1}{1 + \frac{i}{m}}}$$

Budoucí hodnota:

$$FV = a \left(1 + \frac{i}{m} \right) \frac{\left(1 + \frac{i}{m} \right)^{nm} - 1}{\frac{i}{m}}$$

- **Důchod bezprostřední polhůhnutí področní**

Částka a Kč je vyplácena od nynějška koncem každé m -tiny roku při neměnné nominální úrokové míře i , výplatní i úrokové období jsou rovny právě jedné m -tině roku.

Současná hodnota:

$$PV = a \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{m}} \right)^{mn}}{\frac{i}{m}}$$

Budoucí hodnota:

$$FV = a \frac{(1 + \frac{i}{m})^{nm} - 1}{\frac{i}{m}}$$

Příklad: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy počátkem roku po dobu 5 let. S výplatami, které činí 1 200 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5 % p.a.

Řešení: Současnou hodnotu zjistíme ze vztahu

$$PV = a(1 + i) \frac{1 - \frac{1}{(1 + i)^n}}{i}$$

$$PV = 1200(1 + 0,05) \frac{1 - \frac{1}{(1+0,05)^5}}{0,05} = 5455,10 \text{ (Kč)}.$$

Současná hodnota důchodu činí 5 455,10 Kč. Jinými slovy, abychom mohli na počátku každého roku po dobu 5 let pobírat důchod ve výši 1 000 Kč, musíme teď složit částku 5 455,10 Kč.

Příklad: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy koncem roku po dobu 5 let. S výplatami, které činí 1 200 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5 % p.a.

Řešení: Současnou hodnotu zjistíme ze vztahu

$$PV = a \frac{1 - \frac{1}{(1 + i)^n}}{i}$$

$$PV = 1200 \frac{1 - \frac{1}{(1+0,05)^5}}{0,05} = 5195,40 \text{ (Kč)}.$$

Současná hodnota důchodu činí 5195,40 Kč.

Příklad: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy počátkem každého měsíce po dobu 5 let. S výplatami, které činí 100 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5 % p.a. Úroky jsou připsovány měsíčně.

Řešení: Současnou hodnotu zjistíme ze vztahu

$$PV = a \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{m}} \right)^{mn}}{1 - \frac{1}{1 + \frac{i}{m}}}$$

$$PV = 100 \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{0,05}{12}} \right)^{12 \cdot 5}}{1 - \frac{1}{1 + \frac{0,05}{12}}} = 5321,10 \text{ Kč}$$

Současná hodnota daného měsíčního důchodu je v případě měsíčního úročení 5 321,10 Kč

8.3 Důchody věčné

V tomto případě jsou annuity v hodnotě a Kč vypláceny v pravidelných intervalech stále (teoreticky do nekonečna). Z toho důvodu je věčný důchod limitním případem příslušného dočasného důchodu. Výpočty současných hodnot věčných důchodů lze provést dvěma způsoby. Zde uvedeme pouze vztahy pro výpočet současné hodnoty věčného bezprostředního ročního důchodu předlhučného a polhučného, při neměnné roční úrokové míře i .

- Současná hodnota předlhučného věčného důchodu:

$$PV = \frac{a(1 + i)}{i}$$

- Současná hodnota polhučného věčného důchodu:

$$PV = \frac{a}{i}$$

Příklad: Vypočtete současnou hodnotu věčného důchodu 1 200 Kč vypláceného

- počátkem,
- koncem

každého roku při úrokové míře 5 % p.a.

Řešení:

a)

$$\frac{1200 (1 + 0,05)}{0,05} = 25200 \text{ (Kč)},$$

b)

$$\frac{1200}{0,05} = 24000 \text{ (Kč)}.$$

Současné hodnoty věčných důchodů činí 25 200 a 24 000 Kč.

8.4 Důchody odložené

Na rozdíl od bezprostředního důchodu zde budeme předpokládat, že je první výplata důchodu opožděna o k výplatních období. Současnou hodnotu odloženého důchodu získáme diskontováním současné hodnoty příslušného bezprostředního důchodu o dobu odkladu. V případě področních důchodů je třeba diskontovat o km výplatních období.

Současnou hodnotu odloženého důchodu získáme diskontováním současné hodnoty příslušného bezprostředního důchodu o dobu odkladu. Pro diskontování se používá u ročních důchodů diskontní faktor $v = \frac{1}{1+i}$ a u področních $v = \frac{1}{1+\frac{i}{m}}$

Příklad: Jaká částka zajistí důchod ve výši 25 000, který bude vyplácený koncem roku až do neokonečna při úrokové míře 3 % p.a.?

1. s výplatami důchodu se začne hned

2. s výplatami se začne po 4 letech

Řešení:

1. bezprostřední, věčný, polhůtní roční důchod:

$$PV = \frac{a}{i} = \frac{25000}{0,03} = 833\,333,-$$

2. odložený, věčný, polhůtní roční důchod:

$$PV = 833\,333 \cdot \left(\frac{1}{1+0,03} \right)^4 = 740\,406,-$$



Pod pojmem důchod ve finanční matematice rozumíme systém periodicky vyplácených plateb. U důchodů nás zajímá především jeho současná hodnota (present value) PV , která je rovna součtu všech budoucích plateb diskontovaných k dnešnímu datu. Někdy se zjišťuje budoucí hodnota (future value) důchodu, označená FV , jakožto součet budoucích hodnot všech výplat. V rámci této kapitoly byly probrány jednotlivé typy důchodů a na praktických příkladech byl ilustrován výpočet jejich současných hodnot.



1. Co je to anuita důchodu a výplatní období?
2. Uvedte jednotlivé typy důchodů.
3. Jak jsou definovány dočasné důchody?
4. Jak se vypočítá současná hodnota odložených důchodů?
5. Jak velkou částku musíme uložit v bance, chceme-li si zajistit pravidelný příjem ve výši 2000 Kč, který bude vyplácen počátkem každého měsíce po dobu 5 let? Roční úroková míra je 5 % a úroky jsou připisovány měsíčně.

[106 423 Kč]

6. Jak se předchozí výsledek změní, chceme-li s výplatami začít až po 19 letech?

[41 240 Kč]



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Eko-press, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [3] GROBAŘOVÁ, S. *Základy finanční matematiky*. Brno: Tribun EU, 2012. ISBN 978-80-263-0253-7.
- [4] RADOVÁ, J., MÁLEK J. a P. DVOŘÁK. *Finanční matematika pro každého*. 8. rozšířené vydání, Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4821-3.
- [5] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*, 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.

Kapitola 9

Úvěry



Po prostudování kapitoly budete umět:

- popsat vztah mezi splátkou, úmorem a úrokem;
- stanovit hodnotu poslední splátky úvěru;
- vytvářet splátkový kalendář.



Klíčová slova:

Úvěr, úrok, úročení, splátka, úmor, dluh, RPSN.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme tvorbou splátkových kalendářů ve dvou případech: při splácení konstantními splátkami a při splácení konstantním úmorem. Kromě ročního splácení bude v kapitole probráno také splácení měsíční.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je popsání tvorby splátkových kalendářů v případech dvou různých metod splácení a pro dvě různé časnosti splácení a ilustrování této problematiky na konkrétních praktických příkladech.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

9.1 Základní pojmy

Definice 9.1 Úvěrem rozumíme poskytnutí peněžní částky na určitou dobu za odměnu zvanou úrok.

Umořování (splácení) úvěru z hlediska věřitele lze považovat za příjem důchodu. V této kapitole budeme nejprve předpokládat, že dluh ve výši D bude splácen:

- ihned,
- polhůtními ročními splátkami ve výši a ,
- při neměnné roční úrokové míře i ,
- po dobu n let.

Na základě těchto předpokladů se tedy bude jednat o dočasný bezprostřední polhůtní roční důchod.

Ve splátce (a) je zahrnut úrok (U) vypočtený z posledního stavu dluhu a úmor (M). To je částka, která se skutečně odečte od posledního stavu dluhu. Pro splátku pak platí vztah:

$$a = U + M$$

Definice 9.2 Průběh splácení dluhu se zapisuje do tabulky zvané **umořovací plán** nebo též **splátkový kalendář**. Plán obsahuje pět sloupců, v nichž je uvedeno období (rok), výše splátky, úroku a úmoru v příslušném období a stav dluhu na konci období. Počet řádků v plánu je dán počtem období, kdy je dluh splácen.

9.2 Splácení dluhu splátkami stejné výše

Je-li dluh splácen stejně vysokými splátkami, pak můžeme sloupec pro splátku v umořovacím plánu vyplnit ihned. Úrok pro každé období spočteme podle vztahu

$$U_j = i \cdot D_{j-1}$$

kde U_j , $j = 1, \dots, n$ značí úrok v j -tém období a D_{j-1} stav dluhu v předchozím, $(j - 1)$ -ním období. Výše **úmoru** pro každé období je dána rozdílem mezi splátkou a úrokem v témže období:

$$M_j = a - U_j, j = 1, \dots, n.$$

Stav dluhu D_j pro každé období se vypočte jako rozdíl předchozího stavu dluhu a úmoru v současném období, tj.

$$D_j = D_{j-1} - M_j, j = 1, \dots, n.$$

V praxi někdy nastane případ, že **poslední splátka** je **menší** než všechny předchozí.

Výši poslední splátky b zaplacené v n -tém roce pak určíme ze vztahu

$$b = U_n + M_n.$$

Do posledního řádku splátkového kalendáře bývá zvykem uvést celkovou sumu zaplacenou za úvěr (ve sloupci pro splátku), celkově zaplacené úroky (ve sloupci pro úroky) a součet úmorů za jednotlivé roky. Ten musí být roven právě výši dluhu.

Počet roků, po které je úvěr splácen, lze určit ve formě celého čísla ze vztahu:

$$n = \frac{\ln(1 - \frac{D \cdot i}{a})}{\ln v}$$

kde $v = \frac{1}{1+i}$.

Příklad: Úvěr 500 000 Kč má být umořen polhůtními ročními splátkami ve výši 90 000 Kč při úrokové míře 6,3 % p.a. Určete výši poslední splátky a sestavte umořovací plán.

Řešení:

Rok	Splátka	Úrok	Úmor	Stav dluhu
0	-	-	-	500 000
1	90 000	31 500	58 500	441 500
2	90 000	27 814,50	62 185,50	379 314,50
3	90 000	23 896,80	66 103,20	313 211,30
4	90 000	19 732,30	70 267,70	242 943,60
5	90 000	15 305,40	74 694,60	168 249
6	90 000	10 599,70	79 400,30	88 848,70
7	90 000	5 597,50	84 402,50	4 446,20
8	4 726,30	280,10	4 446,20	-
Σ	634 726,30	134 726,3	500 000	-

Obr. 3 Umořovací plán pro splácení konstantními splátkami

9.3 Splácení dluhu při konstantním úmoru

V tomto případě bude v každém období umořena stejná část dluhu. Výši úmoru M pak vypočteme vydělením celkové hodnoty dluhu počtem let splácení (známe-li dobu splácení), tj.

$$M = \frac{D}{n}$$

Umořovací plán, bude vypadat stejně jako v předchozím případě, ale způsob jeho vyplnění bude odlišný. Především lze nejdřív vyplnit sloupec pro úmor a sloupec pro stav dluhu. Nové stavy dluhu postupně získáme odečítáním úmoru:

$$D_j = D_{j-1} - M, \quad j = 1, \dots, n.$$

Výši úroku pro každé období a výši splátky vypočteme takto:

$$U_j = i \cdot D_{j-1}$$

$$a_j = U_j + M$$

Příklad: Máme splatit úvěr 490 000 Kč tak, že vždy na konci roku bude umořeno 70 000 Kč. Sestavte umořovací plán, je-li úroková míra 5 % p.a.

Řešení: Nejdříve vypočteme, jak dlouho budeme úvěr splácet. Tj. vydělíme výši úvěru hodnotou úmoru: $490\,000/70\,000 = 7$. Splácet tedy budeme 7 let.

Rok	Splátka	Úrok	Úmor	Stav dluhu
0	-	-	-	490 000
1	94 500	24 500	70 000	420 000
2	91 000	21 000	70 000	350 000
3	87 500	17 500	70 000	280 000
4	84 000	14 000	70 000	210 000
5	80 500	10 500	70 000	140 000
6	77 000	7 000	70 000	70 000
7	73 500	3 500	70 000	-
Σ	588 000	98 000	490 000	-

Obr. 4 Umořovací plán pro splácení úvěru konstantním úmorem

9.4 Měsíční splácení úvěru

Pokud bychom **místo ročního splácení** uvažovali např. frekvenci splácení **měsíční**, celý postup bude obdobný s tím rozdílem, že se místo úrokové míry i použije $\frac{i}{12}$

Příklad: Úvěr 500 000 Kč má být umořen polhůtními měsíčními splátkami ve výši 100 000 Kč při úrokové míře 6,3 % p.a. Určete výši poslední splátky a sestavte umořovací plán.

Řešení:

Měsíc	Splátka a	Úrok $U = D \cdot i / 12$	Úmor $M = a - U$	Dluh D
0	-	-	-	500 000
1	100 000	2625	97375	402625
2	100 000	2114	97886	304739
3	100 000	1600	98400	206339
4	100 000	1083	98917	107422
5	100 000	564	99436	7986
6	8028	42	7986	0

Obr. 5 Umořovací plán pro měsíční splácení konstantními splátkami

Příklad: Máme splatit úvěr 500 000 Kč tak, že vždy na konci měsíce bude umořeno 100 000 Kč. Se-
stavte umořovací plán, je-li úroková míra 6,3 % p.a.

Řešení:

Měsíc	Splátka a	Úrok U	Úmor M	Dluh D
0	-	-	-	500000
1	102625	2625	100000	400000
2	102100	2100	100000	300000
3	101575	1575	100000	200000
4	101050	1050	100000	100000
5	100525	525	100000	0

Obr. 6 Umořovací plán pro měsíční splácení úvěru konstantním úmorem

9.5 RPSN

U úvěrů se běžně setkáváme s tím, že kromě úroků jsou placeny také nejrůznější poplatky. (Ne)výhodnost úvěru tak nelze určit pouze pomocí úrokové míry, ale pomocí ukazatele nazývaného **RPSN**. Na rozdíl od úrokové míry RPSN zahrnuje veškeré poplatky spojené s úvěrem. Slouží ke komplexnímu porovnání úvěrů.

Definice 9.3 RPSN (= roční procentní sazba nákladů) zahrnuje:

- úrokovou míru
- poplatky spojené s uzavřením smlouvy
- poplatky vážící se k posouzení žádosti o úvěr
- poplatky za převod peněžních prostředků a poplatky za vedení úvěrového účtu
- platby za pojištění ...

a vypočítá se takto: Hledáme x takové, aby

$$\frac{A_0}{(1+x)^{t_0}} + \frac{A_1}{(1+x)^{t_1}} + \frac{A_2}{(1+x)^{t_2}} + \dots + \frac{A_n}{(1+x)^{t_n}} = 0,$$

kde A_k je peněžní tok v čase t_k (může mít kladné i záporné znaménko). Nalezené x je pak hodnota RPSN (vyjádřená desetinným číslem).

Příklad: Vypočítejte RPSN, je-li výše úvěru 50 000 Kč a úroková míra 39 % p.a. Úvěr je splácen pravidelnými měsíčními splátkami po dobu 1 roku. Poplatek za sjednání úvěru je 1000 Kč. Výše jedné splátky je 5100 Kč a na konci každého měsíce je potřeba zaplatit navíc poplatek 200 Kč.

Řešení: Hledáme x takové, aby

$$\frac{50000}{(1+x)^0} + \frac{-1000}{(1+x)^0} + \frac{-5100}{(1+x)^{\frac{1}{12}}} + \frac{-200}{(1+x)^{\frac{1}{12}}} + \frac{-5100}{(1+x)^{\frac{2}{12}}} + \frac{-200}{(1+x)^{\frac{2}{12}}} + \dots + \frac{-5100}{(1+x)^{\frac{12}{12}}} + \frac{-200}{(1+x)^{\frac{12}{12}}} = 0$$

=>

$$\frac{49000}{(1+x)^0} + \frac{-5300}{(1+x)^{\frac{1}{12}}} + \frac{-5300}{(1+x)^{\frac{2}{12}}} + \dots + \frac{-5300}{(1+x)^{\frac{11}{12}}} + \frac{-5300}{(1+x)^{\frac{12}{12}}} = 0$$

=>

$$49000 + \sum_{j=1}^{12} \frac{-5300}{(1+x)^{\frac{j}{12}}} = 0$$

Řešení rovnice pomocí software vyjde $x = 0,6496 \Rightarrow \text{RPSN} = 64,96 \%$

Příklad: Který z údajů v příkladu byl nadbytečný?

Dal by se tento nadbytečný údaj vypočítat pomocí dříve uvedených vzorců?

Řešení:

Nadbytečná byla úroková míra. Dala se vypočítat ze vzorce pro bezprostřední, polhůtní, področní důchod ($PV = 50\,000$, $a = 5100$, $m = 12$, $n = 1$, $i = ?$) ze vzorce

$$PV = a \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{i}{m}} \right)^{mn}}{\frac{i}{m}}$$

Výpočet by se (vzhledem ke své obtížnosti) nejspíše provedl pomocí software.

Σ

V této kapitole jsme uvedli základní pojmy vztahující se k problematice poskytování úvěrů a umořování dluhů. Úmor je splátka jistiny dluhu, tedy část splátky, o kterou se snižuje výše dlužné částky. Umořovací plán je přehled výše splátek úvěru včetně úroků z hlediska jejich časového rozložení. Obsahuje časové období, výši splátky, výši úmoru dluhu, výši úroku z dluhu, stav dluhu po odečtení úmoru (zbývající dlužnou částku). Anuitní splátka (anuita) je splátka opakující se v pravidelných časových intervalech. Tyto platby mohou být stále stejné – konstantní anuita, ale není to pravidlem. V případě, kdy je dluh umořen vždy stejnou částí, hovoříme o splácení úvěru konstantním úmorem.

?

1. Definujte pojmy úvěr, úmor a splátka.
2. Co je to umořovací plán a jak se mohou tyto plány lišit?
3. Jaký je princip umořování dluhu konstantní splátkou?
4. Jaký je princip umořování dluhu konstantním úmorem?
5. Úvěr 50 000 Kč má být umořen polhůtními ročními splátkami ve výši 15 000 Kč při úrokové míře 5 % p.a. Sestavte umořovací plán.

Rok	Splátka a	Úrok U	Úmor M	Dluh D
0	-	-	-	50 000
1	15 000	2 500	12 500	37 500
2	15 000	1 875	13 125	24 375
3	15 000	1 219	13 781	10 594
4	11 124	530	10 594	0

6. Máme splatit úvěr 50 000 Kč tak, že vždy na konci roku bude umořeno 12 500 Kč. Sestavte umořovací plán, je-li úroková míra 5 % p.a.

Rok	Splátka a	Úrok U	Úmor M	Dluh D
0	-	-	-	50 000
1	15 000	2 500	12 500	37 500
2	14 375	1 875	12 500	25 000
3	13 750	1 250	12 500	12 500
4	13 125	625	12 500	0



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Eko-press, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [3] GROBAŘOVÁ, S. *Základy finanční matematiky*. Brno: Tribun EU, 2012. ISBN 978-80-263-0253-7.
- [4] RADOVÁ, J., MÁLEK J. a P. DVOŘÁK. *Finanční matematika pro každého*. 8. rozšířené vydání, Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4821-3.
- [5] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*, 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.

Kapitola 10

Obligace



Po prostudování kapitoly budete umět:

- definovat a popsat pojem obligace,
- klasifikovat obligace podle různých hledisek;
- vypočítat cenu kupónové obligace.



Klíčová slova:

Obligace, nominální hodnota, kupónová platba, cena, výnosnost.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme zabývat dlouhodobými cennými papíry se stanovenou dobou splatnosti – obligacemi. Blíže si popíšeme nejen základní pojmy týkající se této problematiky, ale také výpočet ceny obligace a její výnosnosti.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je popsání základních pojmů týkajících se obligací a způsobu výpočtu ceny obligace a její výnosnosti.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

10.1 Základní pojmy

Definice 10.1 Obligace (dluhopis) je dlouhodobý cenný papír se stanovenou dobou splatnosti, který vyjadřuje závazek emitenta (dlužníka) vůči oprávněnému majiteli (věřiteli) splatit k určitému datu půjčku a proplatit úroky ve stanovených termínech. Z tohoto důvodu je obligace dlouhodobým cenným papírem s fixním výnosem.

Poznámka: Existují také obligace s pohyblivým výnosem, u nichž je příslušná úroková míra vázána na jinou referenční sazbu.

Definice 10.2 Nominální hodnota (NH) obligace je částka vytištěná na cenném papíru, která udává výši dluhu a je vyplacena na konci doby splatnosti.

Definice 10.3 Cena obligace je skutečná tržní hodnota, za kterou je obchodována na kapitálových trzích.

Přesně v den splatnosti je cena obligace rovna nominální hodnotě. **Kurz obligace** je cena vyjádřená v procentech z nominální hodnoty. **Kupónová platba (C)** je sjednaný úrok vyplácený v pravidelných intervalech. **Kupónová sazba (c)** je kupónová platba vyjádřená v procentech z nominální hodnoty. **Kupónové období** (nejčastěji roční nebo pololetní) je období, na jehož konci je vyplacena kupónová platba.

10.2 Klasifikace obligací

Obligace lze klasifikovat například takto:

1. podle počtu kupónových plateb

- kupónové obligace, s nimiž je spojen konečný počet kupónových plateb,
- bezkupónové, diskontované obligace (zero coupon bonds), které jsou obchodovány na diskontním principu bez výplat kupónů; tato obligace se tedy chová jako dlouhodobý depozitní certifikát,
- konzoly (věčné obligace), které poskytují nekonečně mnoho kupónových plateb;

2. podle emitenta

- státní obligace - emitentem jsou státní orgány, obligace jsou vydávány při deficitu státního rozpočtu, např. povodňové dluhopisy v roce 1997,
- komunální obligace - emitovány při potřebě peněz na straně městské správy,
- podnikové obligace - emitentem je určitá firma;

3. podle místa, kde je emitována

- domácí obligace - je emitována na domácím trhu domácím subjektem a v domácí měně,
- zahraniční obligace - je emitována na zahraničním trhu zahraničním subjektem v odpovídající zahraniční měně,
- euroobligace - je emitována způsobem: emitent z jedné země emituje obligaci do druhé země v měně třetí země.

10.3 Cena kupónové obligace

Cenou obligace PV rozumíme cenu, za kterou je obligace obchodována na kapitálovém trhu a jejíž výše především závisí na stavu nabídky a poptávky. Cena obligace je rovna součtu všech budoucích kupónových plateb C diskontovaných k současnému datu a nominální hodnoty NH , také diskontované k dnešnímu datu. Cena kupónové obligace k datu výplaty kupónové platby.

Matematicky je cena obligace v případě, že jsou kupónové platby vypláceny jednou ročně po n let daná vztahem

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C}{(1+r)^{n-1}} + \frac{C+NH}{(1+r)^n},$$

kde r je míra výnosnosti (úroková míra) v rámci investic do obligací.

Úpravou tohoto vztahu s využitím součtu pro geometrickou posloupnost dostaneme stručnější vyjádření pro cenu obligace:

$$PV = \frac{C[(1+r)^n - 1] + rNH}{(1+r)^n}$$

Příklad: Určete cenu obligace s nominální hodnotou 10 000 Kč, splatnou k 1.9.2027, k datu 1.9.2024. Kupónové platby jsou vypláceny jednou za rok, vždy k 1.9., kupónová sazba činí 6 % p.a. a tržní úroková míra v rámci investic do obligací je 10 % p.a.

Řešení: Nejdříve vypočteme výši kupónových plateb, které jsou definovány jako kupónová sazba násobená nominální hodnotou obligace. V našem případě bude kupónová platba činit $10000 \cdot 0,06 = 600$ Kč.

Dobu od 1.9.2024 do 1.9.2027 představují právě tři roky, takže pro teoretickou cenu obligace bude platit

$$PV = \frac{600}{1,1} + \frac{600}{1,1^2} + \frac{10600}{1,1^3} = 9005,30 \text{ (Kč)}.$$

Cena obligace k 1.9.2024 je 9 005,30 Kč.

Mezi tržní cenou obligace a nominální hodnotou mohou nastat situace:

- i. $PV = NH$ právě tehdy, když $r = c$... prodej za nominální hodnotu;
- ii. $PV > NH$ právě tehdy, když $r < c$... prodej s prémieí;
- iii. $PV < NH$ právě tehdy, když $r > c$... prodej s diskontem.

10.4 Výnosnost obligace

U obligací se můžeme setkat s výnosnostmi, které souvisí pouze s kupónovými platbami, nebo které se týkají jak kupónových plateb, tak nákupních a prodejních cen. My se zaměříme na první typ výnosnosti, kdy rozlišujeme následující výnosnosti.

Definice 10.4

1. kupónová výnosnost r_K

$$r_K = \frac{C}{NH}$$

2. běžná výnosnost r_B

$$r_B = \frac{C}{PV}$$

Příklad: Obligace s nominální hodnotou 10 000 Kč, se splatností k 1.9.2027 a ročními kupónovými platbami 600 Kč byla k 1.9.2024 nabízena za cenu 10 272,30 Kč. Vypočtete její kupónovou výnosnost a běžnou výnosnost.

Řešení: Kupónovou i běžnou výnosnost určíme podle výše uvedených vztahů:

$$r_K = \frac{600}{10000} = 0,06, \text{ tj. } 6\%,$$

$$r_B = \frac{600}{10272,30} = 0,0584, \text{ tj. } 5,84\%$$



V této kapitole jsme definovali základní pojmy vztahující se k obligacím. Obligace jsou tedy dlouhodobé cenné papíry, vyjadřující dlužnický závazek emitenta obligace (dlužníka) oproti majiteli obligace (věřiteli). Obligace lze dělit např. podle počtu kupónových plateb, emitenta nebo dle místa, kde k emisi došlo. Cenou obligace označujeme cenu, za kterou je obligace obchodována na kapitálovém trhu. Tato cena je určena aktuální výší nabídky a poptávky. Výnosnost obligací udává, s jakým výnosem můžeme při investování do obligací počítat. Výnosnost se vztahuje k tržní ceně, za kterou obligaci můžeme nakoupit (na rozdíl od kupónové sazby, která je vztažena k nominální hodnotě).



1. Definujte pojem obligace a s ní spojené základní náležitosti.
2. Jak lze obligace klasifikovat?
3. Uvedte výpočet ceny kupónové obligace a její výnosnosti.



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Eko-press, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [3] GROBAŘOVÁ, S. *Základy finanční matematiky*. Brno: Tribun EU, 2012. ISBN 978-80-263-0253-7.
- [4] RADOVÁ, J., MÁLEK J. a P. DVOŘÁK. *Finanční matematika pro každého*. 8. rozšířené vydání, Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4821-3.
- [5] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*, 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.

Kapitola 11

Akcie



Po prostudování kapitoly budete umět:

- určit vnitřní hodnotu akcie;
- určit jaké druhy výnosností akcie poskytuje;
- vypočítat oba druhy výnosnosti.



Klíčová slova:

Akcie, vnitřní hodnota, výnosnost.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme zabývat akcemi z pohledu finanční matematiky. Blíže si popíšeme nejen základní pojmy týkající se této problematiky, ale také výpočet vnitřní hodnoty akcie a její výnosnosti.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je popsání základních pojmů týkajících se akcií a způsobu výpočtu vnitřní hodnoty akcie a její výnosnosti.

Odhad času potřebného ke studiu

2 hodiny

11.1 Základní pojmy

Definice 11.1 Akcie jsou patrně nejznámější druh majetkových cenných papírů, představující podíl na majetku společnosti. Jelikož akcie nemají dobu splatnosti, považujeme je za dlouhodobé cenné papíry, se kterými lze obchodovat na kapitálových trzích.

Majitelé akcií, tzn. akcionáři, při nákupu akcií získávají také určitá práva, mezi které patří:

- Právo **podílet se na řízení společnosti**. Díky tomuto právu se může akcionář účastnit valné hromady, hlasovat, klást návrhy a dotazy, požadovat vysvětlení, schvalovat roční účetní závěrku, volit a být volen do orgánů společnosti. Počet hlasů, kterými akcionář disponuje, je dán zpravidla množstvím akcií, jež vlastní.
- Právo **podílet se na zisku společnosti** umožňuje akcionáři inkasovat dividendu, pokud ji valná hromada schválila. Výše dividend na jednu akcii se většinou uvádí v absolutní částce nebo v % ze jmenovité hodnoty akcie. Principy pro rozdělování zisku určují stanovy společnosti a obchodní zákoník.
- Při zániku společnosti má akcionář právo **podílet se na likvidačním zůstatku**, na řadu přichází ale až po uspokojení všech věřitelů. Obdržený obnos je v poměru, který odpovídá jmenovité hodnotě jeho akcií. Současně však ručí za závazky společnosti až do výše svého vkladu.
- V případě emise nových akcií má akcionář **přednostní právo** na upsání nových, mladých akcií, a to z důvodu, aby se nezměnil stávající podíl na základním kapitálu akciové společnosti.

Majitel akcie (akcionář) není věřitelem tak jako v případě majitele obligace, nýbrž spoluvlastníkem celé akciové společnosti.

Dále stručně uvádíme pojmy, které se akcií bezprostředně týkají.

Definice 11.2 Nominální hodnota akcie je podíl na majetku akciové společnosti vyjádřený vlastnictvím akcie.

S nominální hodnotou souvisí pojem základní jmění (základní kapitál), které je dáno součtem nominálních hodnot všech prodaných (upsaných) akcií. Nadřazenějším pojmem je **vlastní jmění**, v němž je zahrnuto základní jmění, emisní ažio (kladný rozdíl mezi tržní cenou a nominální hodnotou akcie při její emisi), fondy ze zisku a nerozdělený zisk (nepoužitý na fondy nebo dividendy), který bývá obvykle převeden do dalšího období. Potřebné finanční zdroje (úvěry) akciové společnosti tvoří cizí jmění (kapitál).

Definice 11.3 Dividenda je podíl na zisku akciové společnosti, na který má právo každý akcionář a který je odhlasován na valné hromadě akcionářů. Výplata dividend závisí především na hospodaření společnosti a nemusí být zaručena, na rozdíl od obligací s fixní kupónovou sazbou. Z tohoto hlediska řadíme akcie mezi dlouhodobé cenné papíry s nezaručeným výnosem.

Definice 11.4 Emise akcií je jejich umístění na kapitálovém trhu, a to buď formou veřejné nabídky prodeje akcií nebo neveřejného prodeje (pro omezený počet investorů).

11.2 Cena akcie

Cena akcie je tržní hodnota, za kterou je obchodována na kapitálovém trhu podle aktuálního stavu nabídky a poptávky. V praxi se často používá termínu kurz akcie, jehož hodnota je, na rozdíl od obligací, rovna přímo ceně. Cenu akcie ovlivňují různé faktory, především prosperita akciové společnosti, kvalita jejího řízení, perspektiva daného oboru do budoucna, ekonomické parametry daného státu i celého světa atd. Kromě těchto faktorů hraje důležitou roli také psychologie investorů.

Jako příklad výpočtu ceny akcie uvedeme tzv. **dividendový diskontní model**.

V tomto modelu je vnitřní hodnota akcie odhadována jako součet všech diskontovaných budoucích plateb, tj. dividend a výnosu z prodeje akcie. Obecně předpokládáme, že výše dividendy vyplacená na konci jednotlivých roků není stejná. Vnitřní hodnota (VH) akcie, u níž byly dividendy vypláceny po dobu n let a na konci n -tého roku byla akcie prodána, vypadá:

$$VH = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{D_n + P_n}{(1+r)^n},$$

kde $D_1, \dots, D_n$ jsou vyplacené dividendy za jednotlivé roky a r je úroková míra v rámci investic se srovnatelnými parametry.

Pokud bychom uvažovali nekonečné vyplácení dividend, dostaneme pro vnitřní hodnotu akcie vztah

$$VH = \frac{D_1}{1+r} + \frac{D_2}{(1+r)^2} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_j}{(1+r)^j}.$$

Je-li navíc výše dividendy neměnná, tj. $D_1 = D_2 = \dots = D$, platí:

$$VH = \frac{D}{1+r} + \frac{D}{(1+r)^2} + \dots = \frac{D}{r}.$$

Příklad: Určete **vnitřní hodnotu akcie**, očekáváte-li, že hodnota dividendy se v příštích letech nebude měnit a bude činit 30 Kč na jednu akcii a že budou dividendy vypláceny do nekonečna. Roční tržní úroková míra v rámci investic do akcií je 12 %.

Řešení: Pro výpočet vnitřní hodnoty použijeme výše uvedený vztah a získáme:

$$VH = \frac{30}{0,12} = 250 \text{ (Kč)}.$$

Vnitřní hodnota dané akcie je tedy 250 Kč.

11.3 Výnosnost akcií

U akcií rozlišujeme dvojí výnosnost.

Definice 11.5

- dividendová (běžná) výnosnost

$$r_B = \frac{D}{P_0}$$

kde D je výše dividendy a P_0 tržní cena, za niž byla akcie koupena

- akciová (celková) výnosnost

$$r_C = \frac{P_1 - P_0 + D}{P_0}$$

kde P_0 tržní cena, za niž byla akcie koupena, a P_1 tržní cena, za niž byla akcie prodána.

4. **Příklad:** Určete běžnou a celkovou výnosnost akcie, která byla koupena za cenu 64 Kč a za jedenáct měsíců prodána za cenu 81,88 Kč. Během této doby byla vyplacena dividenda ve výši 8,67 Kč

Řešení: Běžnou i celkovou výnosnost zjistíme podle výše uvedených vztahů:

$$r_B = \frac{8,67}{64} = 0,135, \quad \text{neboli } 13,5\%,$$

$$r_C = \frac{81,88 - 64 + 8,67}{64} = 0,415, \quad \text{neboli } 41,5\%.$$

Σ

V této kapitole jsme definovali základní pojmy vztahující se akciím. Akcií rozumíme druh majetkových cenných papírů, které zajišťují podíl na majetku společnosti a z něj plynoucí další výše uvedená práva. Cena akcie je tržní hodnota, za kterou je obchodována na kapitálovém trhu podle aktuálního stavu nabídky a poptávky.

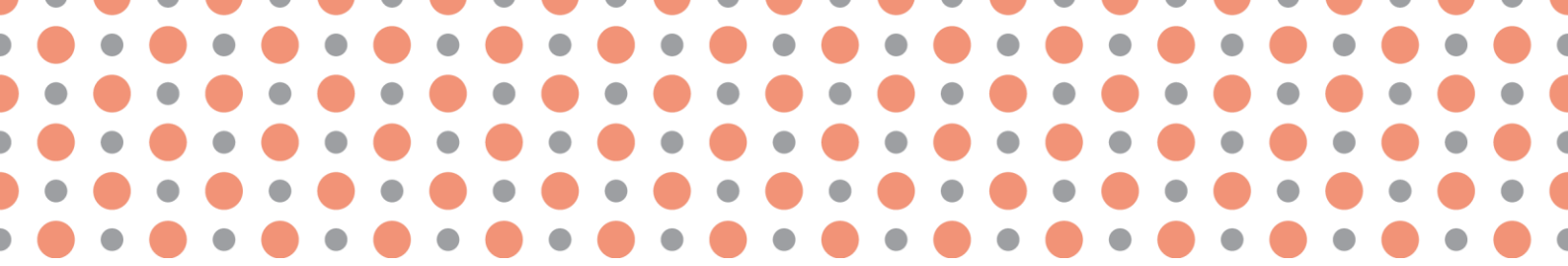
?

1. Definujte pojem akcie a práva spojená s jejím nákupem.
2. Jak se vypočítá vnitřní hodnota akcie?
3. Jaké typy výnosnosti u akcií existují?



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Eko-press, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [3] GROBAŘOVÁ, S. *Základy finanční matematiky*. Brno: Tribun EU, 2012. ISBN 978-80-263-0253-7.
- [4] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi, 2., aktualizované a rozšířené vydání*. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.



Kapitola 12

Využití Wolfram Alpha v matematických aplikacích



Po prostudování kapitoly budete umět:

- využít systém WolframAlpha ve vybraných matematických aplikacích;
- interpretovat vstupy a výstupy systému Wolfram Alpha.



Klíčová slova:

WolframAlpha, computational knowledge engine, vstup, výstup, příkaz.

Náhled kapitoly

V této kapitole se budeme zabývat využitím WolframAlpha pro řešení úloh z finanční matematiky, kterými jsme se zabývali v předchozích kapitolách.

Cíle kapitoly

Cílem kapitoly je ilustrování využitelnosti WolframAlpha pro řešení úloh z finanční matematiky.

Odhad času potřebného ke studiu

1 hodina

12.1 Úvod

Každý, kdo pracuje s internetem, si zvykl používat tzv. vyhledávače, což jsou služby, které umožňují na internetu najít webové stránky obsahující požadované informace. Alternativu k těmto vyhledávačům přinesla v roce 2009 společnost Wolfram Research, když uvedla svůj „vyhledávač“ WolframAlpha. Samotní tvůrci však tuto službu nenazývají pouze „vyhledávačem“, ale tzv. „computational knowledge engine“, což bychom volně mohli přeložit například jako výpočetní vyhledávací službu. Slovním zadáním problému v anglickém jazyce obvykle získáme nejen výsledek, ale také mnoho dalších souvisejících informací. Informace jsou navíc členěny do přehledných grafů a tabulek. Nezískáváme tedy pouze odkazy na jiné webové stránky. WolframAlpha se snaží poskytnout komplexní a přehledně zpracovanou odpověď na námi vznesený dotaz. Pomocí WolframAlpha můžeme hledat informace ze širokého spektra oborů, jako jsou matematika, fyzika, chemie, biologie, astronomie, historie, kultura, ekonomie, meteorologie a mnoha dalších. Zejména v matematice je WolframAlpha silným nástrojem pro řešení úloh. Najde nám totiž jak výsledek například nějakého neurčitého integrálu, tak také postup, kterým se takový integrál řeší. Vzhledem k tomu, že podporuje také mnoho typů moderních mobilních telefonů, tabletů a čteček, můžeme nainstalováním odpovídající aplikace získat navíc bezkonkurenční kalkulačku.

12.2 Wolfram Alpha ve finanční matematice

Systém WolframAlpha umožňuje řešení celé řady aktuálních témat matematických aplikací týkajících se např. různých typů úročení, poskytování hypotečních, spotřebitelských či jiných úvěrů nebo práce s měnovými kurzy.

Jedním ze základních témat finanční matematiky je problematika jednoduchého úročení. Budoucí hodnotu (FV - future value) kapitálu v tomto případě počítáme ze stále stejné počáteční částky (PV - present value). V následujícím příkladu vypočítáme budoucí hodnotu počáteční částky 950 Kč při roční úrokové míře 2 % po dobu 5 let. Při změně vstupních hodnot je dále možné z budoucí hodnoty počítat hodnoty současné, či úrokovou míru, která za dané období zúročí počáteční kapitál na jeho budoucí hodnotu. V dalším příkladu pak uvádíme výpočet roční úrokové míry, která za 5 let zúročí částku 950 Kč na hodnotu 1125 Kč.

Do WolframAlpha zapíšeme příkaz „*simple interest*“, poté zvolíme možnost „*future value*“ a zapíšeme počáteční údaje, v druhém příkladě zvolíme místo „*future value*“ příkaz „*interest rate*“.

```
In[47]:= WolframAlpha["simple interest",
  IncludePods -> {"Input", "Result", "Equation"}, AppearanceElements -> {"Pods"},
  InputAssumptions -> {"*F.SimpleInterest.PV-_K%C4%8D950", "*F.SimpleInterest.i-_2+%25",
    "*F.SimpleInterest.n-_5"}, TimeConstraint -> {30, Automatic, Automatic, Automatic}]
```

Out[47]=

Input information:

simple interest	
present value	Kč950 (Czech koruny)
interest rate	2%
interest periods	5

Result:

future value	Kč1045.00 (Czech koruny)
--------------	--------------------------

Equation:

$FV = PV (1 + i n)$	
FV	future value
PV	present value
i	interest rate
n	interest periods

```
In[48]:= WolframAlpha["simple interest",
  IncludePods -> {"Input", "Result"}, AppearanceElements -> {"Pods"},
  InputAssumptions -> {"*FS-_*SimpleInterest.i--", "*F.SimpleInterest.FV-_K%C4%8D+1125",
    "*F.SimpleInterest.PV-_K%C4%8D+950", "*F.SimpleInterest.n-_5"},
  TimeConstraint -> {30, Automatic, Automatic, Automatic}]
```

Out[48]=

Input information:

simple interest	
future value	Kč1125 (Czech koruny)
present value	Kč950 (Czech koruny)
interest periods	5

Result:

interest rate	3.684% = 0.03684
---------------	---------------------

```
In[49]:= WolframAlpha["simple interest",
  IncludePods -> {"Equation"}, AppearanceElements -> {"Pods"},
  InputAssumptions -> {"*FS-_*SimpleInterest.i--", "*F.SimpleInterest.FV-_K%C4%8D+1125",
    "*F.SimpleInterest.PV-_K%C4%8D+950", "*F.SimpleInterest.n-_5"},
  TimeConstraint -> {30, Automatic, Automatic, Automatic}]
```

Out[49]=

Equation:

$FV = PV(1 + i n)$	
i	interest rate
FV	future value
PV	present value
n	interest periods

WolframAlpha dále umožňuje řešení problematiky složeného úročení, kde je počáteční kapitál úročen po dobu tvořenou více úrokovými obdobími. Úrok bude ke vkladu připsán vždy na konci roku a následující rok bude znovu spolu s vkladem úročen, vzniknou tedy úroky z úroků. V následujícím příkladu budeme počítat budoucí hodnotu částky \$800 při roční úrokové míře 6 % po dobu 5 let se čtvrtletním připisováním úroků (systém WolframAlpha umožňuje tuto hodnotu nastavit dle nejpožívanějších typů připisování úroků v praxi). Výsledek je dále automaticky převáděn na české koruny dle aktuálního měnového kurzu. Grafické výstupy umožňují porovnání závislosti úrokové míry na

budoucí hodnotě, doby úročení na budoucí hodnotě, či závislost současné a budoucí hodnoty kapitálu. Do WolframAlpha zapíšeme příkaz „*compound interest*“, poté zvolíme možnost „*future value*“ a zapíšeme počáteční údaje.

```
In[50]:= WolframAlpha["compound interest",
  IncludePods -> {"Input", "Result"}, AppearanceElements -> {"Pods"},
  InputAssumptions -> {"*FVarOpt-*PresentValueFutureValue.compoundingfreq--",
    "*FS-*PresentValueFutureValue.FV--", "*F.PresentValueFutureValue.PV-_%24800",
    "*F.PresentValueFutureValue.i-_6+%25", "*F.PresentValueFutureValue.n-_5",
    "*FP.PresentValueFutureValue.compoundingfreq-_CompoundingFrequency%3AQuarterly"},
  TimeConstraint -> {30, Automatic, Automatic, Automatic}]
```

Out[50]=

Input information:

present and future value	
present value	\$800 (US dollars)
interest rate	6%
interest periods	5
compounding frequency	quarterly

Result:

future value	\$1077.48 (US dollars) = Kč26 430 (Czech koruny)
--------------	---

```
In[51]:= WolframAlpha["compound interest", IncludePods ->
  {"Equation", "FutureValueVs.InterestRate", "FutureValueVs.InterestPeriods"},
  AppearanceElements -> {"Pods"}, InputAssumptions ->
  {"*FVarOpt-*PresentValueFutureValue.compoundingfreq--",
    "*FS-*PresentValueFutureValue.FV--", "*F.PresentValueFutureValue.PV-_%24800",
    "*F.PresentValueFutureValue.i-_6+%25", "*F.PresentValueFutureValue.n-_5",
    "*FP.PresentValueFutureValue.compoundingfreq-_CompoundingFrequency%3AQuarterly"},
  TimeConstraint -> {30, Automatic, Automatic, Automatic}]
```

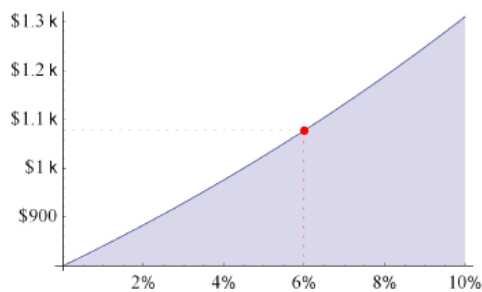
Equation:

$FV = PV \left(1 + \frac{i}{f}\right)^{fn}$	
FV	future value
PV	present value
i	interest rate
n	interest periods
f	compounding frequency

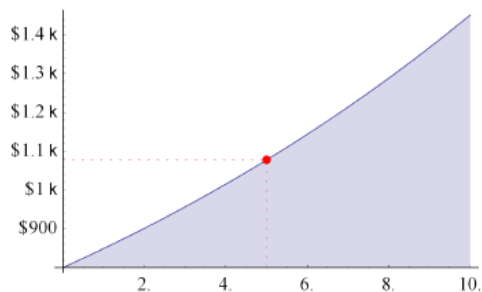
(assumes finite compounding)

Future value vs. interest rate:

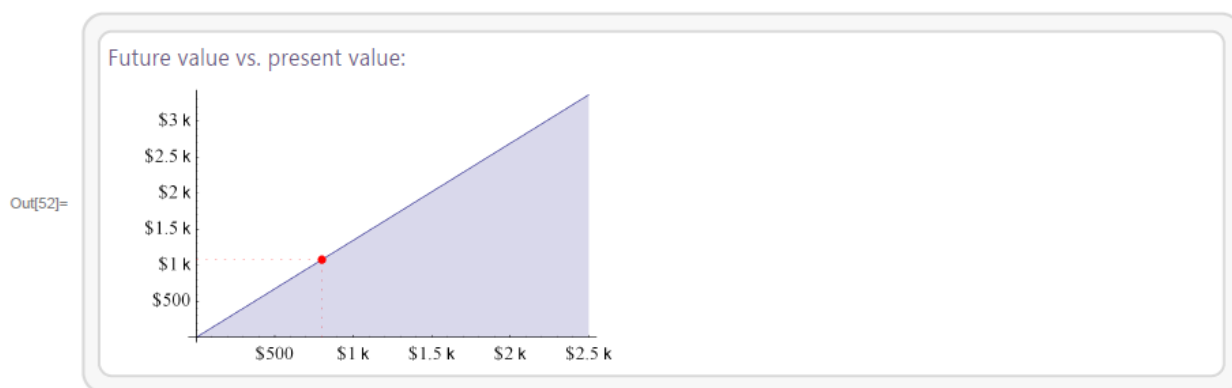
Out[51]=



Future value vs. interest periods:



```
In[52]:= WolframAlpha["compound interest",
  IncludePods -> {"FutureValueVs.PresentValue"}, AppearanceElements -> {"Pods"},
  InputAssumptions -> {"*FVarOpt-_*PresentValueFutureValue.compoundingfreq--",
    "*FS-_*PresentValueFutureValue.FV--", "*F.PresentValueFutureValue.PV-_%24800",
    "*F.PresentValueFutureValue.i-_6+%25", "*F.PresentValueFutureValue.n-_5",
    "*FP.PresentValueFutureValue.compoundingfreq-_CompoundingFrequency%3AQuarterly"},
  TimeConstraint -> {30, Automatic, Automatic, Automatic}]
```



Následující příklad řeší splácení úvěru ve výši 400000 Kč na dobu 5 let při roční úrokové míře 4 % splátkami stejné výše. Interval splácení je možné nastavit např. na měsíční frekvenci. Grafický výstup ukazuje, jakou část celkové zaplacené částky zaujímá splacený úrok. Do WolframAlpha zapíšeme příkaz „loan“, poté zapíšeme počáteční údaje.

```
In[54]:= WolframAlpha["loan", IncludePods -> {"InputValue", "LoanPayments", "LoanTotals"},
  AppearanceElements -> {"Pods"}, TimeConstraint -> {30, Automatic, Automatic, Automatic}]
```

Input values:

loan amount	Kč400 000 (Czech koruny)
loan period	5 years
annual percentage rate	4%
payment interval	monthly

Loan payments:

monthly payment	Kč7366.61
number of payments	60
time to first payment	1 month
effective interest rate	4.074%

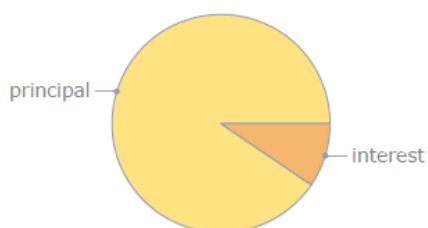
Out[54]=

(assuming the last payment is due the last day of the loan period)

+ Units

Loan totals:

principal paid	Kč400 000
total interest paid	Kč41 997
total amount paid	Kč441 997



+ Units

Σ

Program Wolfram Mathematica je nástroj pro usnadnění matematických výpočtů jak numerických, tak algebraických. Výrazy jsou zadávány jednoduchým scriptovacím jazykem a výsledky výpočtů jsou zobrazovány klasickým zápisem, popřípadě grafem. Hlavní výhodou programu je jeho schopnost nalézt řešení i poměrně komplikovaných problémů za poměrně krátkou dobu ve veliké přesnosti. Produktem firmy Wolfram Research je i výše aplikovaný systém WolframAlpha, který jsme označili jako „com-

putational knowledge engine“, což bychom volně mohli přeložit například jako výpočetní vyhledávací službu. V této kapitole jsme přiblížili některé aplikace systému WolframAlpha ve finanční matematice.



1. Stručně popište možnosti využití WolframAlpha v matematických aplikacích.
2. Demonstrujte řešení vybraných úloh z finanční matematiky pomocí WolframAlpha.
3. Znáte další možnosti softwarového řešení podobných úloh?



Literatura k tématu:

- [1] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [2] ŘÍHA, J., LÁTAL F. a V. ŘÍHOVÁ. *WolframAlpha ve výuce přírodovědných a ekonomických předmětů*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2015. ISBN 978-80-244-4471-0.
- [3] VENCÁLEK, O. *Základy analýzy dat v softwaru Mathematica*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2015. ISBN 978-80-244-4474-1.

Seznam literatury a použitých zdrojů

- [1] ANDĚL, J. *Statistické metody*. 5. vydání, Praha: Matfyzpress, 2019. ISBN 978-80-7378-381-5.
- [2] ARLT, J., ARLTOVÁ, M. a E. RUBLÍKOVÁ. *Analýza ekonomických časových řad s příklady*. Oeconomica, 2004. ISBN 80-245-0777-3.
- [3] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika I*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2006. ISBN 80-244-1294-2.
- [4] BOHANESOVÁ, E. *Finanční matematika*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3400-1.
- [5] CIPRA, T. *Finanční matematika v praxi*. Praha: HZ Editio, 1993. ISBN 809-01-4957- x.
- [6] CIPRA, T. *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Praha: Ekopress, 2015. ISBN 978-80-87865-18-7.
- [7] ČÁMSKÝ, F. *Finanční matematika*. Brno: Masarykova univerzita, 1997. ISBN 80-210-1509-8
- [8] GROBAŘOVÁ, S. *Základy finanční matematiky*. Brno: Tribun EU, 2012. ISBN 978-80-263-0253-7.
- [9] HENDL, J. *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*. 3. vydání, Karolinum, 2022. ISBN 978-80-246-5400-3.
- [10] HINDLS, R. a kol. *Statistika v ekonomii*. Professional Publishing, 2018. ISBN 978-80-88260-09-7.
- [11] CHAMBERS, D.R. a Q. LU. *Introduction to Financial Mathematics With Computer Applications*. CRC Press, 2021. ISBN 9781000370126.
- [12] KUBÁTOVÁ, J. *Kapitoly z finanční matematiky*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2003. ISBN 80-244-0639- x.
- [13] MACEK, J. *Ekonomická a sociální statistika*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2008. ISBN 978-80-7043-642-4.
- [14] MOUHAMMED, A.D. *Introductory Mathematical Economics*. Routledge, 2020. ISBN 978-0765604590.
- [15] ODVÁRKO, O. *Matematika pro gymnázia: Posloupnosti a řady*. Praha: Prométheus, 2007. ISBN 978-80-7196-195-6.
- [16] ODVÁRKO, O. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť: Posloupnosti a finanční matematika*. Praha: Prometheus, 2002. ISBN 80-7196-239-2
- [17] OTIPKA, P. a V. ŠMAJSTRLA. *Pravděpodobnost a statistika* [online]. 1. vydání. Ostrava: Vysoká škola Báňská - Technická univerzita Ostrava, 2007 [cit. 2024-08-12]. ISBN 80-248-1194-4. Dostupné z: <https://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/past/past.pdf>

- [18] PEREN, F.W. *Math for Business and Economics, Compendium of Essential Formulas*. Springer Berlin Heidelberg, 2023. ISBN 978-3-662-67646-2.
- [19] RADOVÁ, J., MÁLEK J. a P. DVOŘÁK. *Finanční matematika pro každého*. 8. rozšířené vydání, Praha: Grada, 2013. ISBN 978-80-247-4821-3.
- [20] ŘÍHA, J., LÁTAL F. a V. ŘÍHOVÁ. *WolframAlpha ve výuce přírodovědných a ekonomických předmětů*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2015. ISBN 978-80-244-4471-0.
- [21] SMÉKALOVÁ, D. *Finanční a pojistná matematika: pro střední školy s ekonomickým zaměřením*. Ostrava: Montanex, 1996. ISBN 80-85780-39-9.
- [22] ŠOBA, O. a M. ŠIRŮČEK. *Finanční matematika v praxi*, 2., aktualizované a rozšířené vydání. Praha: Grada, 2017. ISBN 978-80-271-0250-1.
- [23] ŠOLTÉS, V. a kol. *Finančná matematika*. 3. rozšířené vydání, Košice: Technická univerzita, 2006. ISBN 8080734879.
- [24] VENCÁLEK, O. *Základy analýzy dat v softwaru Mathematica*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2015. ISBN 978-80-244-4474-1.
- [25] VESELÁ, J. *Investice na kapitálových trzích*. Praha: ASPI, 2007. ISBN 978-80-7357-297-6.
- [26] WEYGANDT, J. J. a kol. *Managerial Accounting: Tools for Business Decision-Making*. 9. vydání, Wiley, 2020. ISBN 978-1-119-70958-9.
- [27] Zákon č. 513/1991 Sb., Obchodní zákoník v platném znění, § 155 odst. 1

Seznam obrázků

Obr. 1 Graf časové řady	10
Obr. 2 Složené úročení	42
Obr. 3 Umořovací plán pro splácení konstantními splátkami	71
Obr. 4 Umořovací plán pro splácení úvěru konstantním úmorem	72
Obr. 5 Umořovací plán pro měsíční splácení konstantními splátkami	73
Obr. 6 Umořovací plán pro měsíční splácení úvěru konstantním úmorem.....	73