

Nejpoužívanější **spojitá** rozdělení pravděpodobnosti a jejich základní číselné charakteristiky

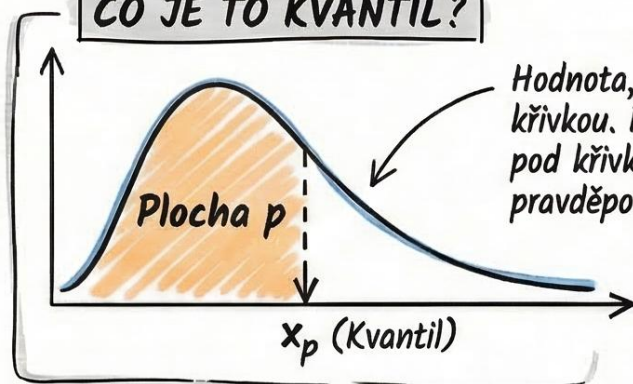
P1ZST-06b-2026



Kvantily spojitých veličin: Jak rozdělit náhodu?

Názorný průvodce od definice k praxi (Excel & život)

CO JE TO KVANTIL?



Rovnoměrné rozdělení $U(a, b)$

Koždá hodnota v intervalu má stejnou šanci. Kvantily dělí interval $[a, b]$ na stejně dlouhé úseky (např. čekání na tramvaj).



Distribuční funkce
 $F(x)$

Kvantilová funkce
 $F^{-1}(p)$

Inverze
k distribuční
funkci!



Asymetrické, dlouhý pravý chvost; modeluje dobu mezi událostmi. Kvantily jsou "nahlučeny" blízko nuly a s rostoucím p se rychle vzdalují.

Hodnota k
Pravděpodobnosti

Pravděpodobnost
k Hodnotě



SLAVNÁ JMÉNA KVANTILŮ

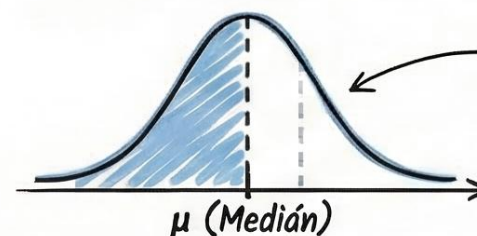


- Medián (50% kvantil)
- Kvartily (25%, 50%, 75%)
- Decily (desetiny)
- Percentily (setiny)



Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Klasická symetrická Gaussova křivka; medián je zde roven střední hodnotě μ .



JAK NA TO V EXCELU?



Pro výpočet kvantilů se v Excelu používají inverzní funkce, které vyžadují zadat pravděpodobnost p a parametry rozdělení.

- Normální: **NORM.INV**($p; \mu; \sigma$)
- Standardizované normální: **NORM.S.INV**(p)
- Exponenciální: **EXPON.INV**($p; \lambda$)

KVANTILY V REÁLNÉM ŽIVOTĚ



Stoletá voda v hydrologii

Průtok odpovídající 99% kvantilu – hodnota překročena v 1 % případů.



Solvency II ve financích

Pojišťovny drží kapitál na úrovni 99,5% kvantilu rizik k pokrytí extrémních ztrát.

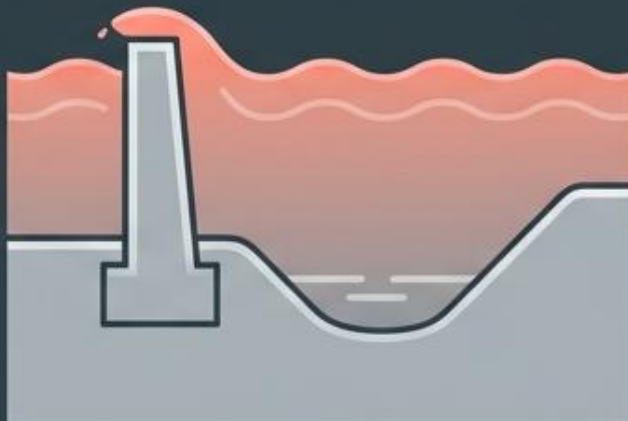


Růstové grafy v pediatrii

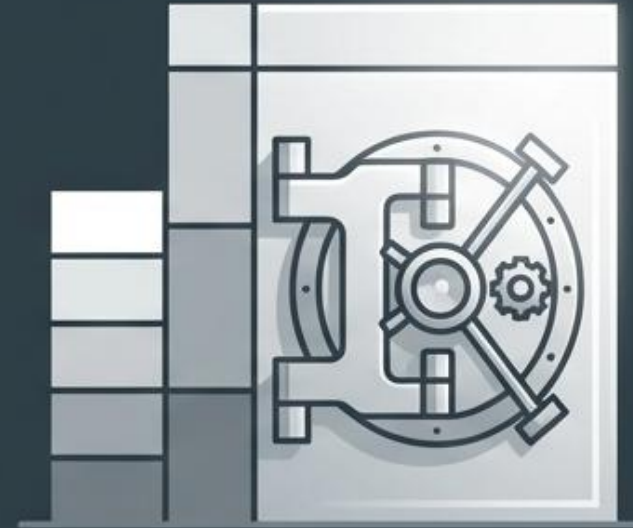
Percentily (např. 90. percentil výšky) určují, zda se vývoj dítěte nevymyká běžné populaci.



Růstové grafy dětí. Které dítě je v horních 5 % pro svůj věk? (Percentilové grafy).



Stoletá voda. Jak vysoká je hladina, která je překonána jen v 1 % případů? (99% kvantil).



Solvency II. Kolik kapitálu pokryje 99,5 % všech finančních rizik pojišťovny? (99,5% kvantil).

Společný jmenovatel: Potřebujeme nakreslit pevnou hranici v nekonečném moři dat.

Pravidla hry: Spojitý vs. Diskrétní svět

Starý svět (Diskrétní)



Počítáme konkrétní výsledky
(např. hod kostkou).

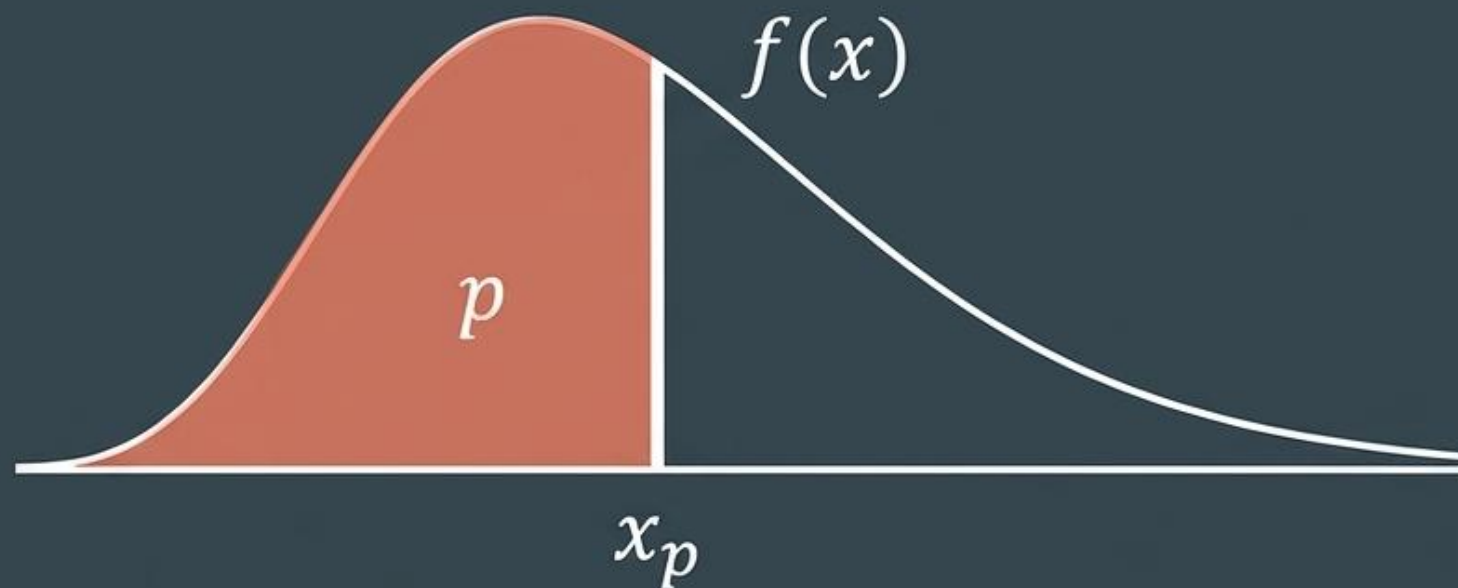
Nová realita (Spojité)



Měříme nekonečné možnosti
v intervalech (čas, výška, váha).

Klíčový poznatek: Ve spojitém světě je pravděpodobnost jedné konkrétní hodnoty prakticky nulová ($P(X=x) = 0$). Nemůžeme ulovit jeden bod.

Nová zbraň: Lovíme v intervalech pomocí **Hustoty pravděpodobnosti (Probability Density)**.



$$P(X \leq x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f(x) dx = p$$

Kvantil (x_p) je přesná hodnota na ose x , která odsekává zadanou plochu pravděpodobnosti (p) směrem doleva.

Kvantily spojité náhodné veličiny

Definice

Nechť $\alpha \in (0, 1)$. α -kvantilem spojité náhodné veličiny X rozumíme kterékoli reálné číslo x_α , které splňuje

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha.$$

- X spojitá: α -kvantil určen jednoznačně vztahem

$$F(x_\alpha) = \alpha$$

- X diskrétní: kvantily nejsou určeny jednoznačně, nebudeme uvažovat

Jiná jména, stejný princip.

Mění se jen měřítko rozlišení.



Jak uvažovat o výpočtu: Logika inverze

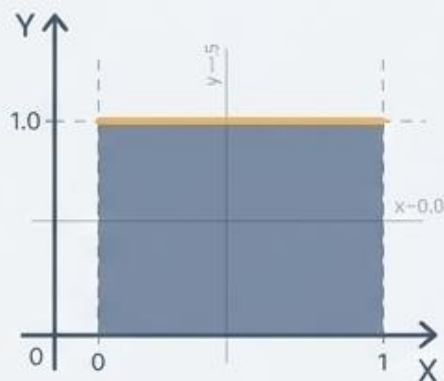


Odkaz na geogebra



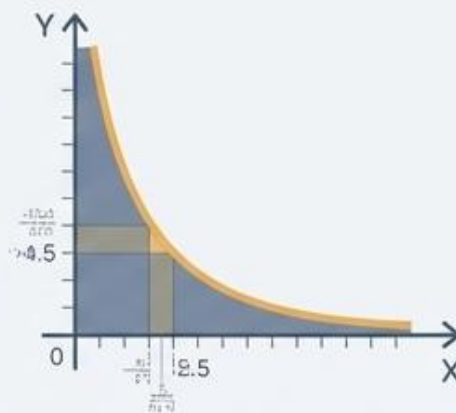
- <https://www.geogebra.org/m/zvh2f8kn>

Taktický arzenál týmu



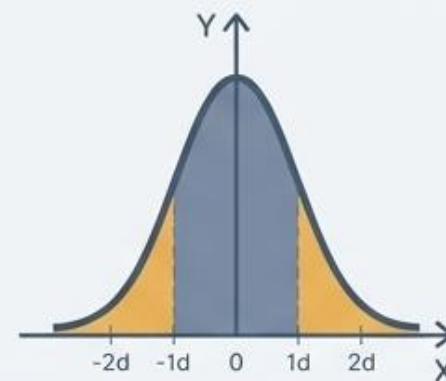
Nástroj 1: Obdélník (Rovnoměrné rozdělení).

Pro situace absolutní náhody ve vymezeném prostoru.



Nástroj 2: Křivka (Exponenciální rozdělení).

Pro modelování času a čekání na další událost.



Nástroj 3: Zvon (Normální rozdělení).

Ultimátní zbraň pro analýzu přírodního chaosu a chyb měření.

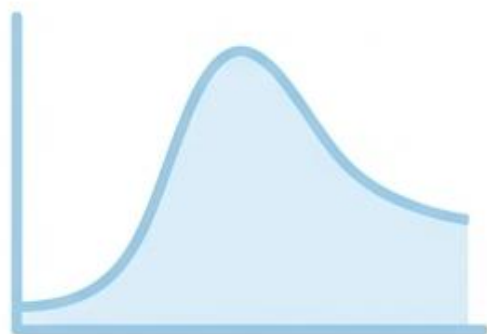
Sjednocený analytický rámec

Každé rozdělení v naší analýze prozkoumáme pomocí čtyř základních pilířů. Tento postupný vzorec nám umožní snadno porovnávat různé modely.



1. Koncept a využití

Kdy a proč tento model použít?



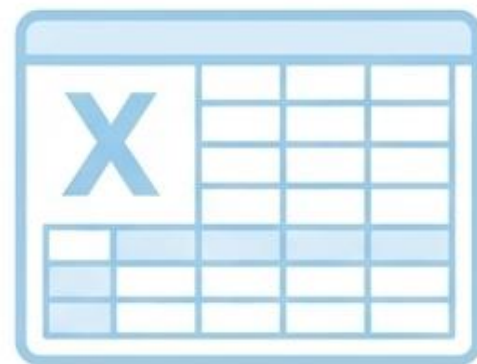
2. Parametry a funkce

Jak model definujeme matematicky (Hustota / Distribuční funkce)?



3. Klíčové charakteristiky

Kde je střed (Střední hodnota) a jaký je rozptyl?

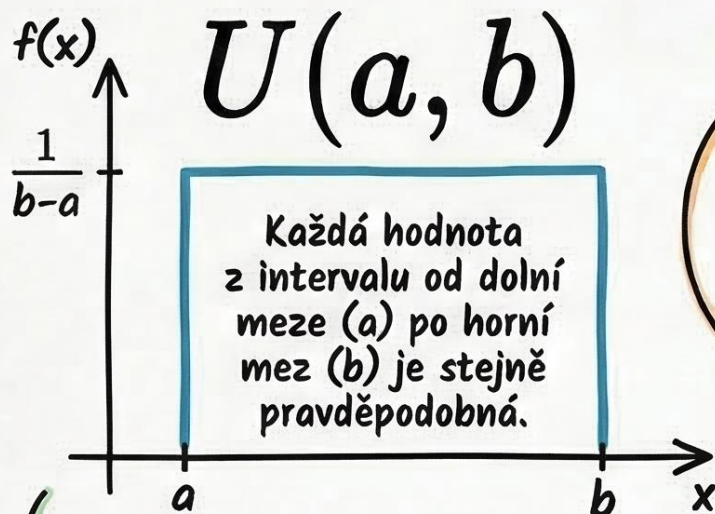


4. Softwarové nástroje

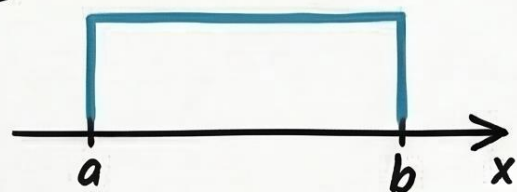
Jak model aplikovat v praxi (MS Excel)?

Rovnoměrné Rozdělení: Když má každý stejnou šanci

Definice rozdělení $U(a, b)$

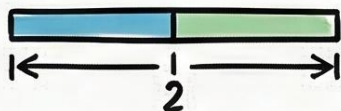


Obdélníkový tvar



Hustota pravděpodobnosti je konstantní a tvoří v grafu plochu obdélníku.

Klíčové vzorce



Střední hodnota: $(a+b)/2$

Rozptyl: $(b-a)^2/12$

Rychlý přehled pro výpočet v Excelu (předpoklad intervalu a, b):

Cíl výpočtu	Vzorec v Excelu
Střední hodnota	$= (a+b)/2$
Hustota $f(x)$	$= 1/(b-a)$
Pravděpodobnost $P(X < x)$	$= (x-a)/(b-a)$

Excel a Praxe

Pozor! **UNIFORM.DIST** neexistuje

V Excelu musíte pro výpočet distribuční funkce použít ruční vzorec: $= (x-a)/(b-a)$.

Example: Čekání na tramvaj

10 min interval

Pokud tramvaj jezdí každých 10 min, pravděpodobnost čekání > 7 min je $1 - (7-0)/(10-0) = 0,3$.

Ruční výpočet v buňce

	ϵ
1	$= (Hledaná_Hodnota - Min)$
2	$= \frac{(Hledaná_Hodnota - Min)}{(Max - Min)}$
3	

pro získání kumulativní pravděpodobnosti.

Rovnoměrné rozdělení: Když je vše stejně možné

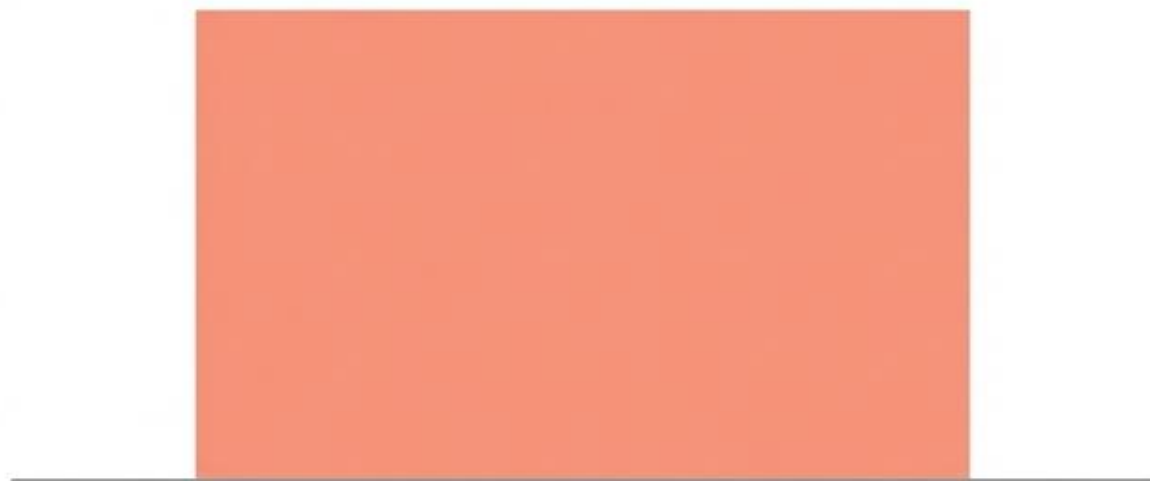


Koncept:

- Popisuje situace, kde má každá hodnota z určitého intervalu zcela stejnou pravděpodobnost.
- Neexistuje žádný preferovaný střed jako u normálního rozdělení.

Praktický příklad:

- Doba čekání na vlak, který jezdí v přesně pravidelných intervalech. Pokud přijdete na nádraží zcela náhodně, doba čekání je rovnoměrně rozdělená.



Hranice a hustota rovnoměrného rozdělení



Parametry $U(a, b)$:

Model je pevně ohraničen dvěma parametry:

- a = Dolní mez
- b = Horní mez

Hustota pravděpodobnosti $f(x)$:

Mimo interval $[a, b]$ je nulová. Uvnitř intervalu je konstantní:

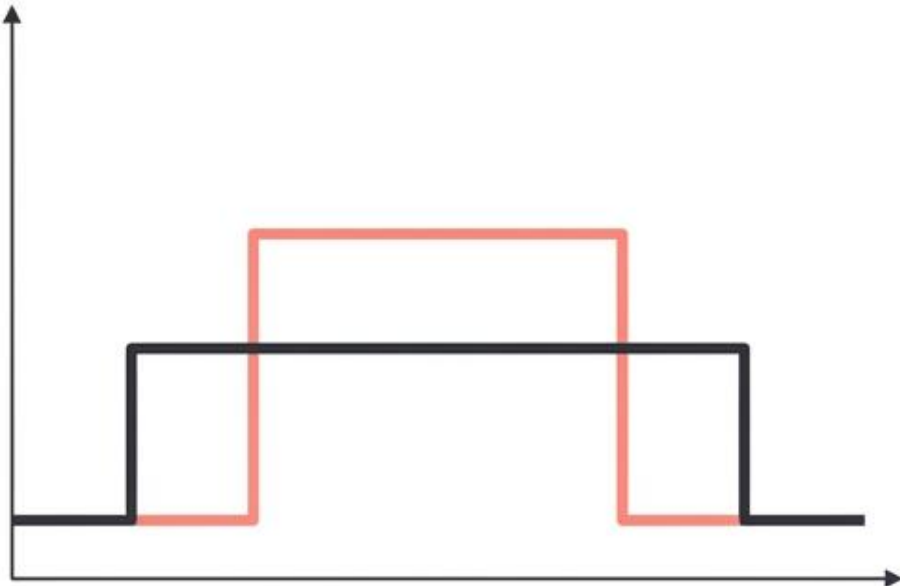
$$f(x) = \frac{1}{b - a}$$

Vizuální profil rovnoměrného rozdělení



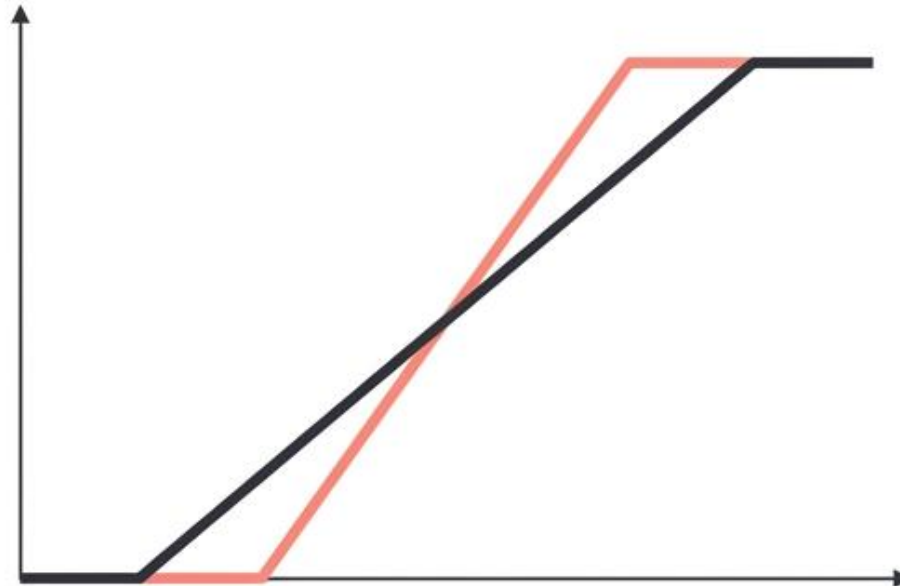
Hustota pravděpodobnosti $f(x)$

- Tvoří dokonalý obdélník (krabicový graf).
- Plocha obdélníka je vždy přesně 1.



Distribuční funkce $F(x)$

- Uvnitř intervalu roste přísně lineárně.
- Dokonalý vizuální kontrast vůči zaobleným S-křivkám normálního rozdělení.



Těžiště a rozptyl rovnoměrného rozdělení



Klíčové charakteristiky:

Střední hodnota $E(X)$:

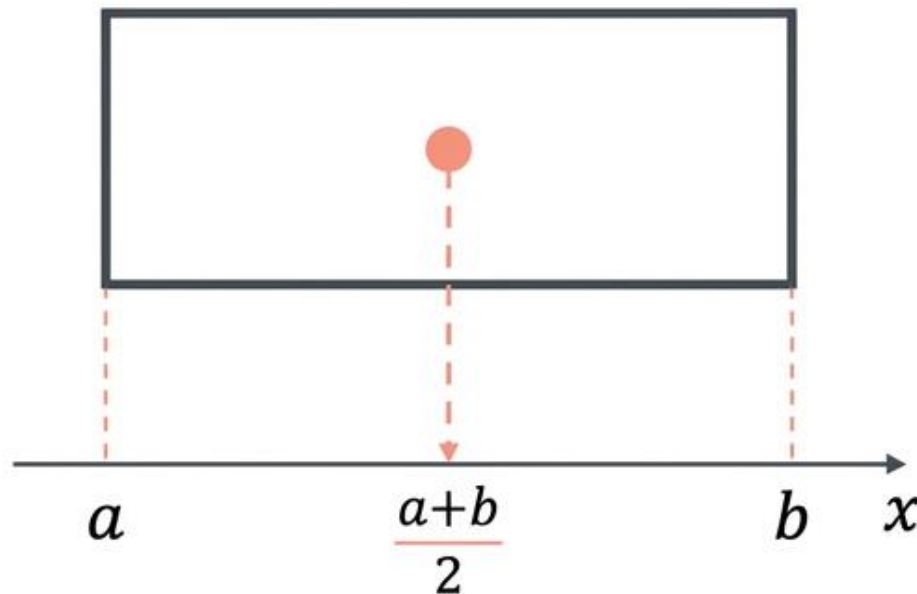
- Geometrický střed intervalu (těžiště obdélníku).

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

Rozptyl $D(X)$:

- Závisí pouze na šířce intervalu. Čím širší interval, tím větší rozptyl.

$$D(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$



Mise 2: Závod s časem

Situační zpráva:

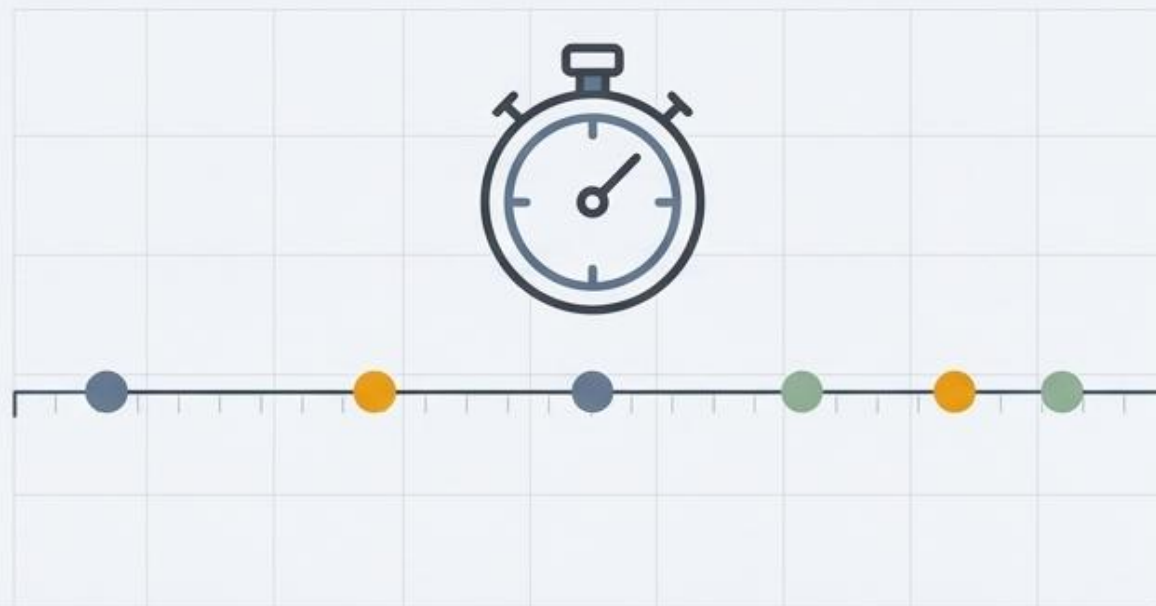
Tým musí predikovat čas. Jak dlouho budeme čekat na další nezávislou událost? (např. příchod zákazníka, porucha stroje).

Komplikace:

Události se vyskytují s konstantní průměrnou intenzitou, ale samotné rozestupy jsou náhodné.

Cíl týmu:

Najít nástroj, který dokáže modelovat dobu čekání na událost v asymetrickém čase.



Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(\lambda)$

Model: modelování doby/vzdálenosti čekání na událost, která nemá paměť, tj. zbývající doba/vzdálenost čekání nezávisí na tom, jak dlouho už na událost čekáme

Příklady

- doba životnosti zařízení, u kterého dochází k poruše náhodně, nikoliv z důsledku opotřebení
- délka telefonního hovoru
- doba mezi 2 příchozími telefonáty

Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(\lambda)$

Hustota

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Distribuční funkce

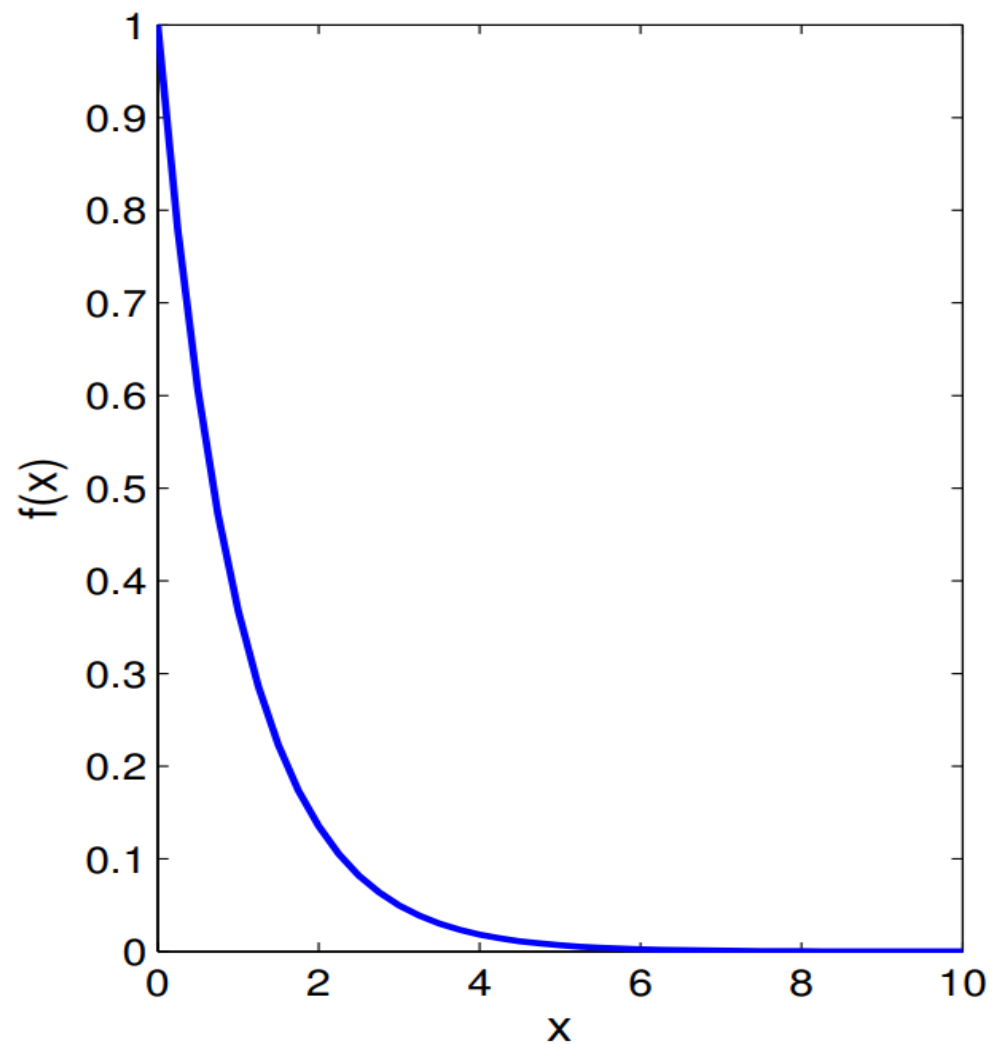
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Číselné charakteristiky

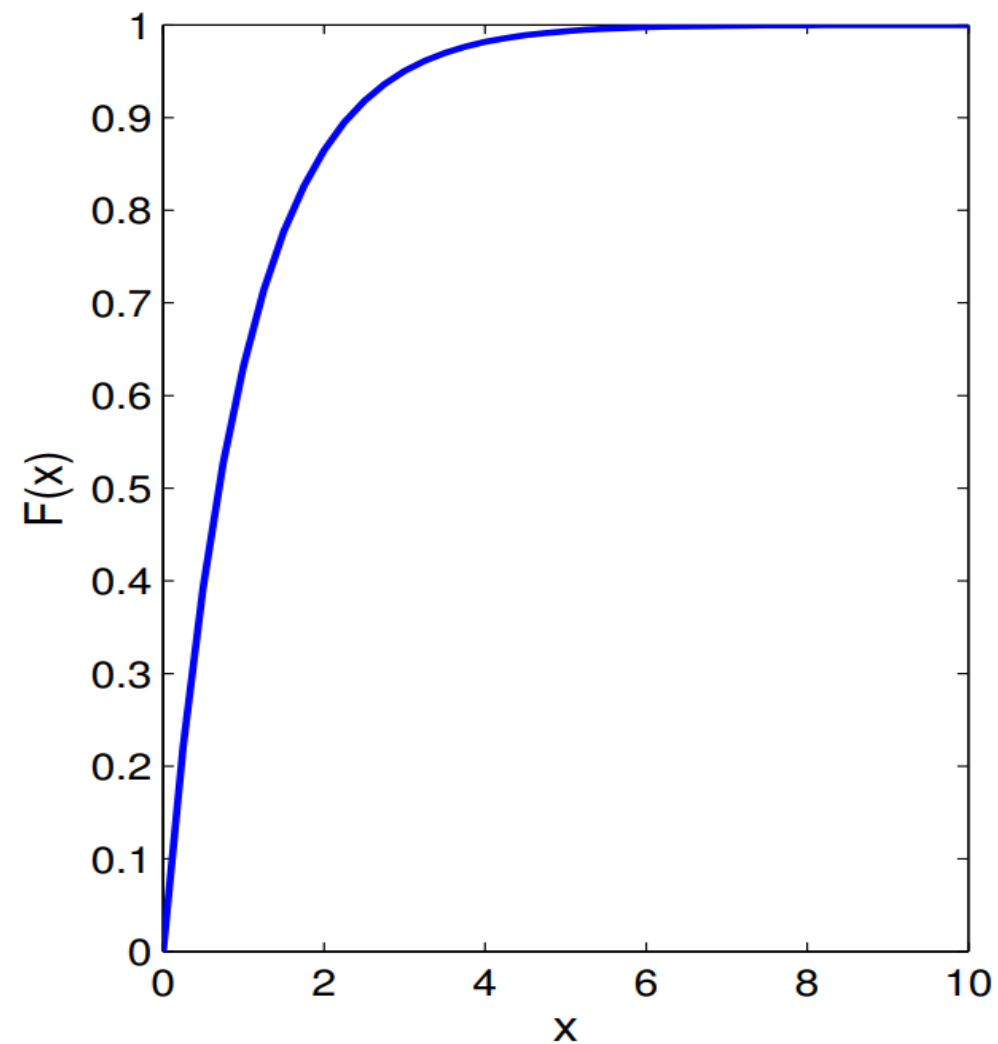
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(1)$

Hustota

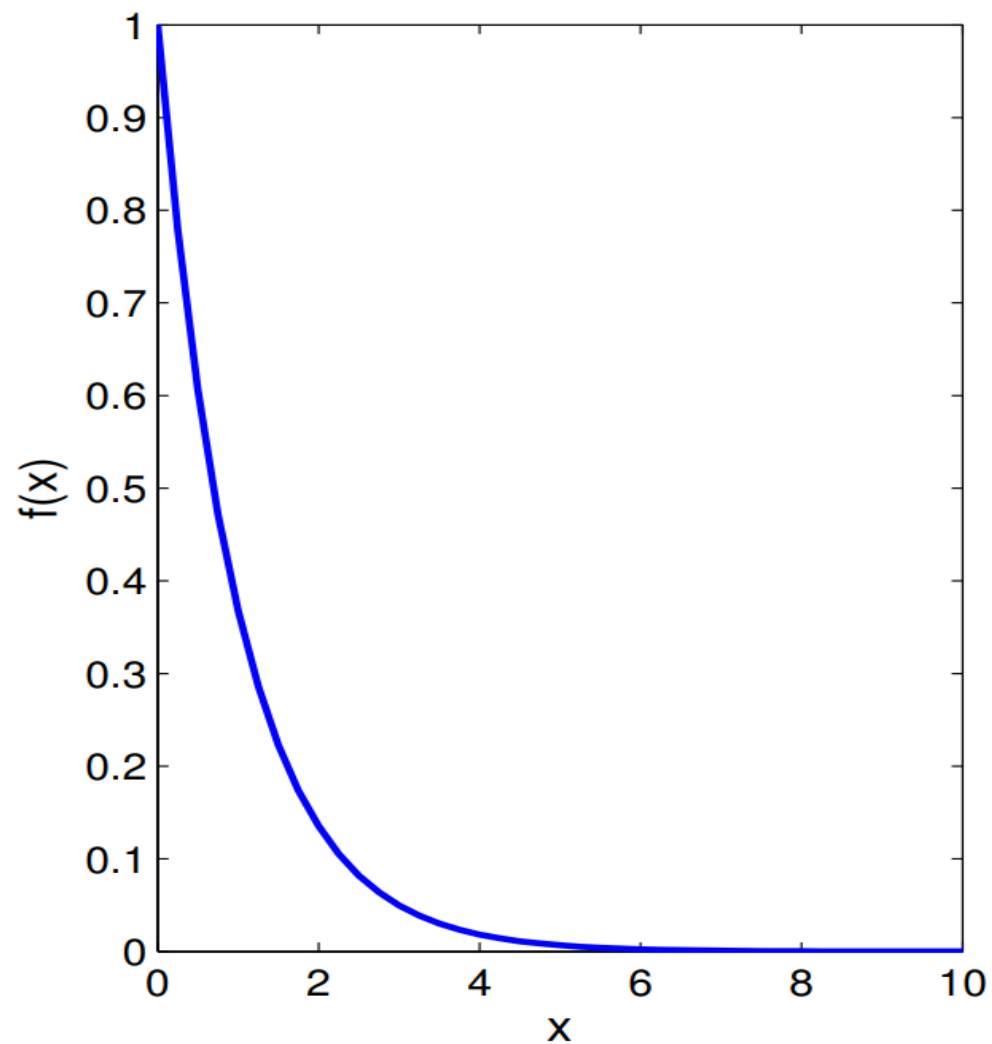


Distribuční funkce

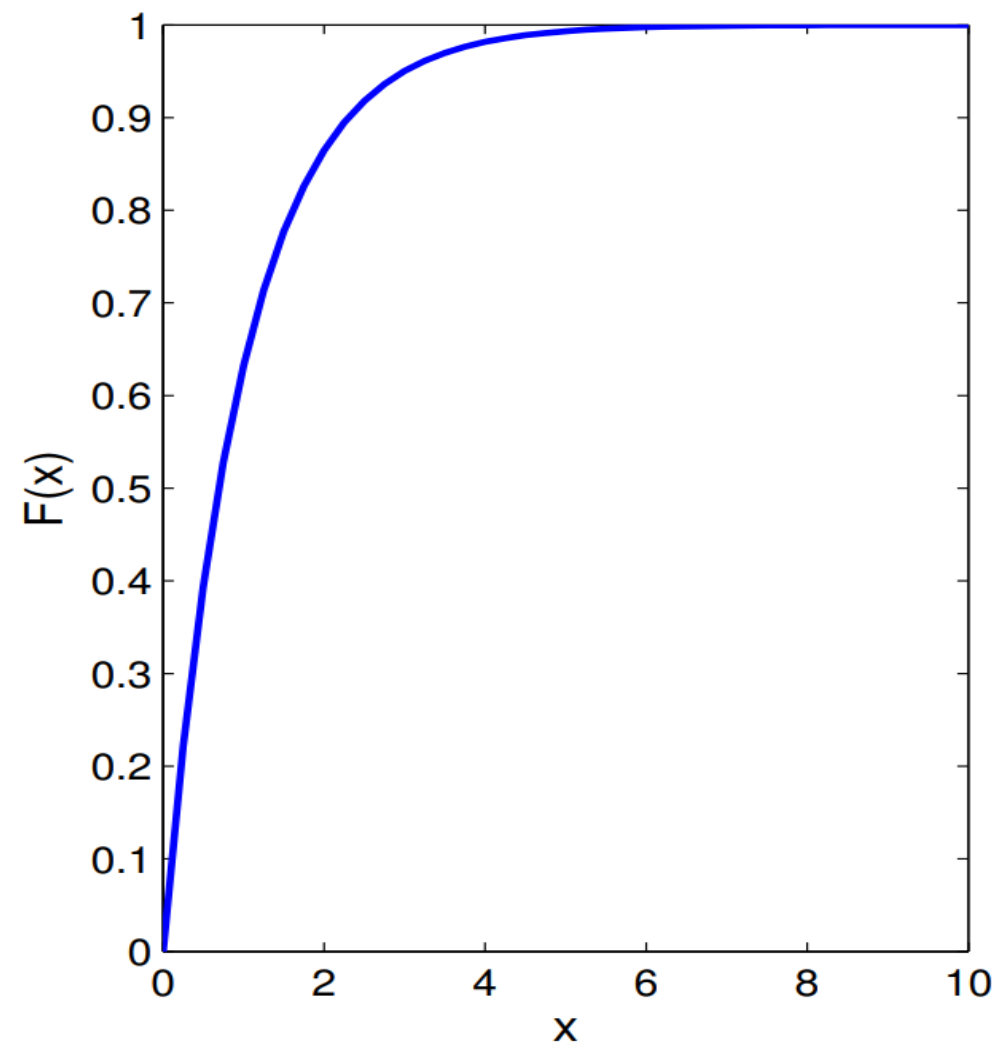


Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(1)$

Hustota



Distribuční funkce



Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(\lambda)$

Excel: EXPON.DIST($x; \lambda$; logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $f(x)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(x)$

Příklad (Obsluha v restauraci)

*Doba čekání hosta na pivo v restauraci U Lva je průměrně 5 minut.
Určete*

- a) pravděpodobnost, že host bude na pivo čekat déle než 12 minut*
- b) dobu čekání hosta na pivo, během níž bude obsloužen s
pravděpodobností 0,9.*

Nějaký nápad?

X ... doba čekání na pivo (v minutách)

průměrná doba čekání na pivo ... 5 minut

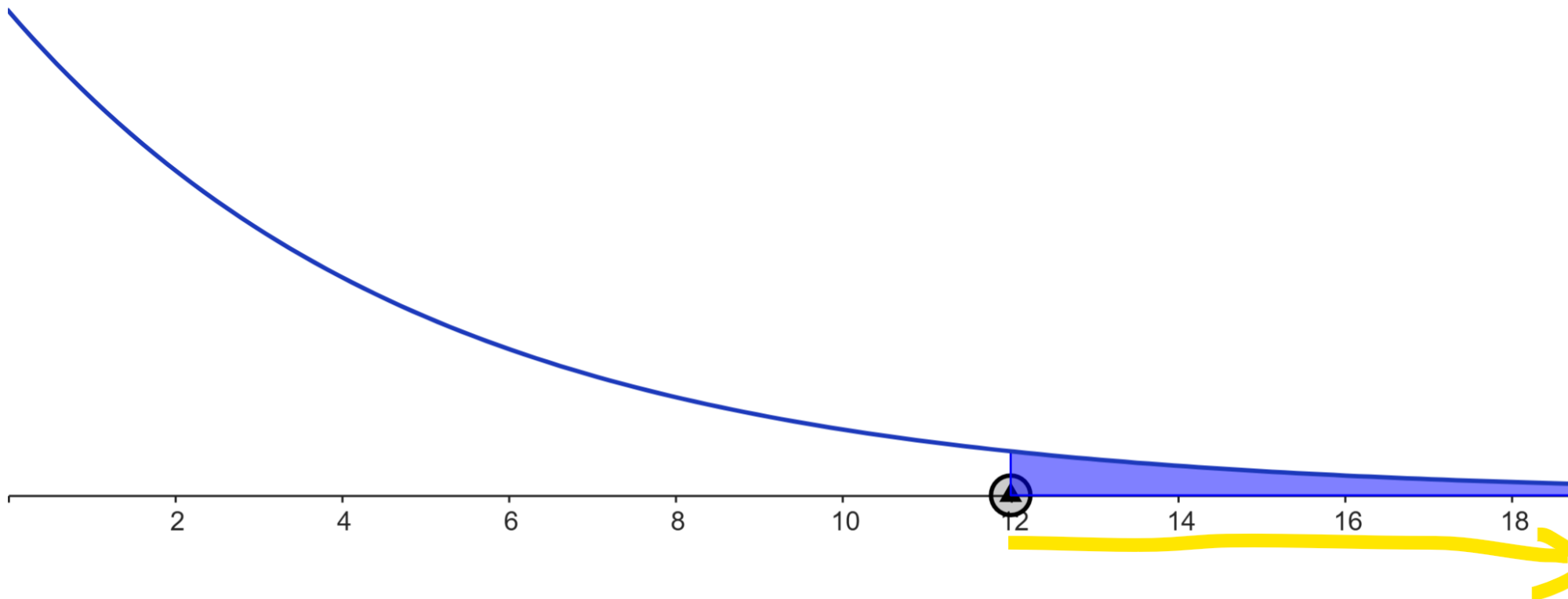
$$X \sim \text{Ex}(\lambda), \lambda = \frac{1}{5}$$


$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Pravděpodobnost, že host bude na pivo čekat déle než 12 minut

$$\begin{aligned} P(X > 12) &= 1 - P(X \leq 12) = 1 - F(12) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 12}\right) \\ &= e^{-\frac{12}{5}} = 0,09 \end{aligned}$$

Excel: 1-EXPON.DIST(12;1/5;1)

$\mu = 5 \quad \sigma = 5$ 

Exponential

 λ

0.2

 $P(12$ $\leq X) = 0.0907$ 

Doba čekání hosta na pivo, během níž bude obsloužen s pravděpodobností 0,9

$$P(0 \leq X \leq t) = 0,9$$

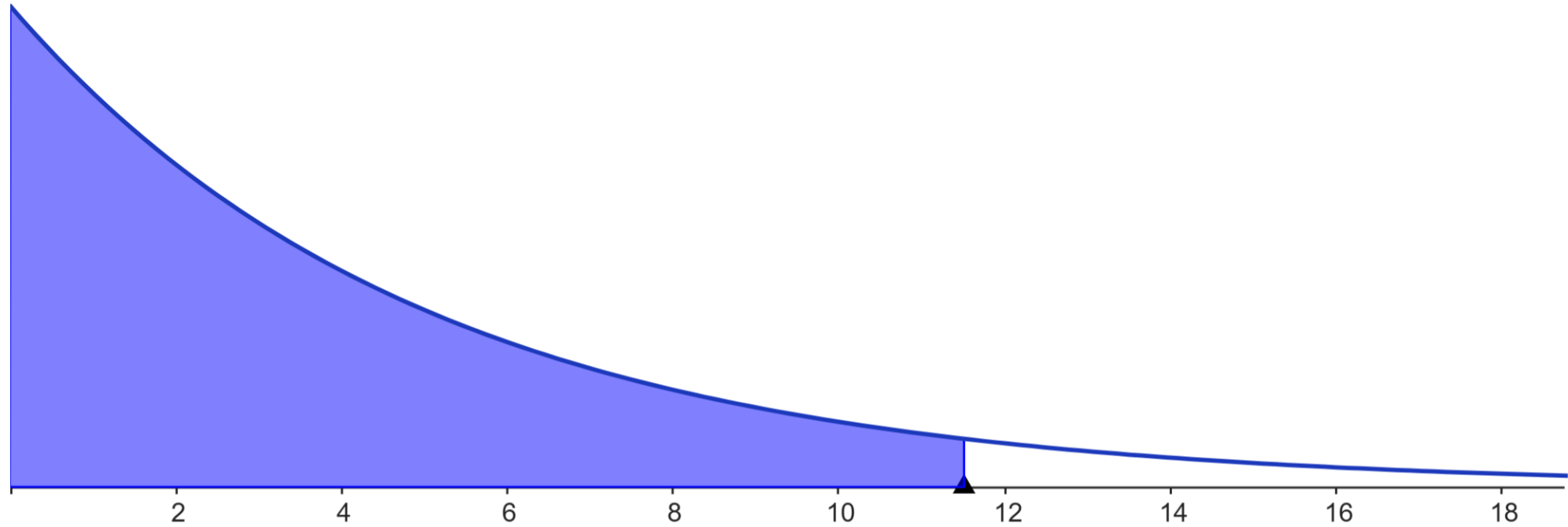
$$F(t) - F(0) = 0,9$$

$$1 - e^{-t/5} - 0 = 0,9$$

$$e^{-t/5} = 0,1$$

$$t = -5 \ln(0,1) \doteq 11,51 \text{ min} \doteq 11 \text{ min } 30 \text{ s}$$

$$\mu = 5 \quad \sigma = 5$$



Exponential

 λ

0.2



$$P(X \leq 11.5129) = 0.9$$

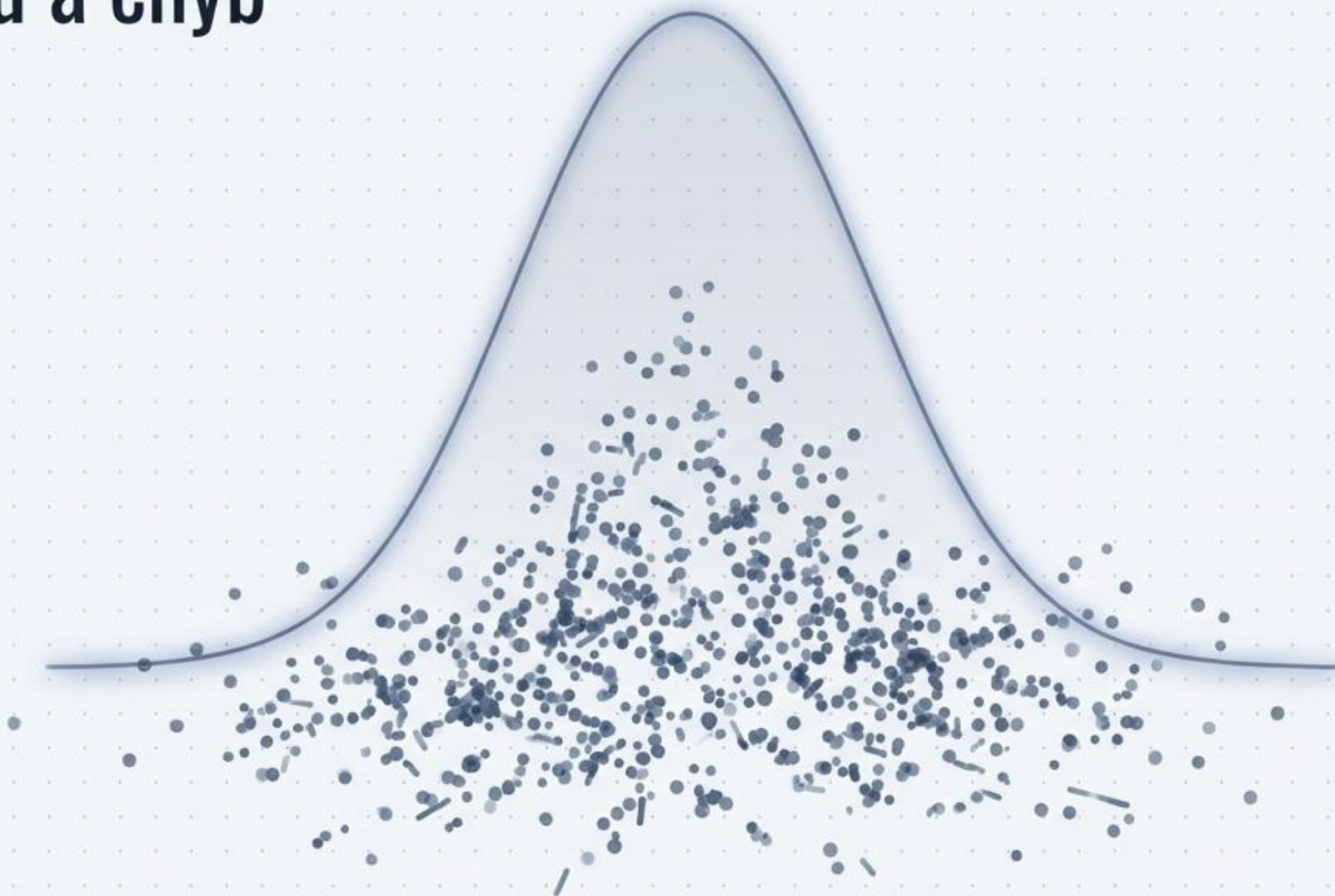


Mise 3: Král chaosu a chyb

Situační zpráva: Tým čelí masivním
objemům reálných dat – výrobní chyby,
nepřesnosti měření, přírodní jevy.

Komplikace: Hodnoty se přirozeně
shlukují kolem průměru, přičemž
extrémní odchylky jsou vzácné.

Cíl týmu: Nasadit nejvlivnější nástroj
teorie pravděpodobnosti k ovládnutí
tohoto přirozeného chaosu.

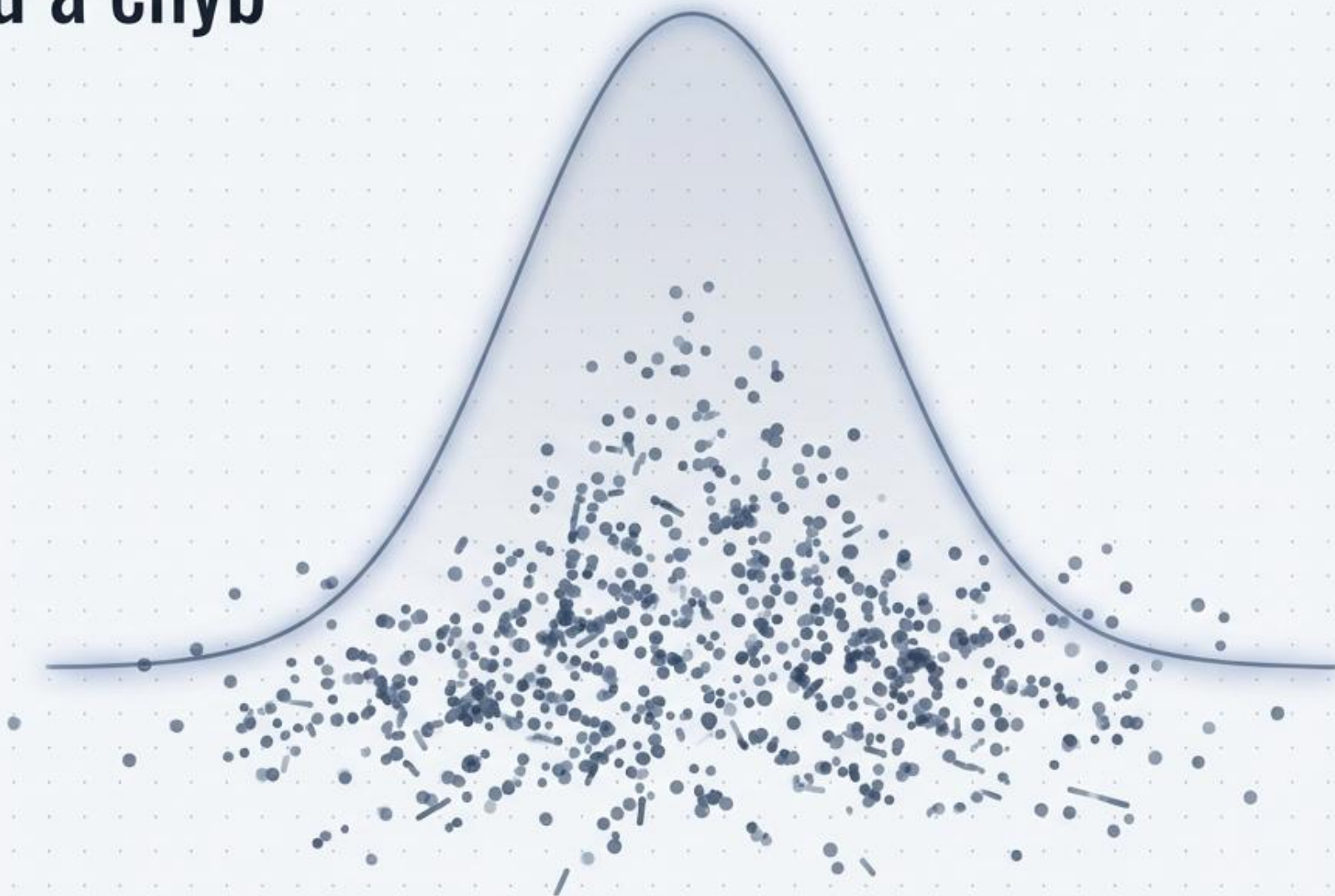


Mise 3: Král chaosu a chyb

Situační zpráva: Tým čelí masivním
objemům reálných dat – výrobní chyby,
nepřesnosti měření, přírodní jevy.

Komplikace: Hodnoty se přirozeně
shlukují kolem průměru, přičemž
extrémní odchylky jsou vzácné.

Cíl týmu: Nasadit nejvlivnější nástroj
teorie pravděpodobnosti k ovládnutí
tohoto přirozeného chaosu.



Odemčený nástroj: Normální rozdění $N(\mu, \sigma^2)$

Tvar hustoty:

Oswald

Zvonovitý tvar, dokonale symetrický kolem střední hodnoty.

Inter

Vzorec hustoty (Specifikace):

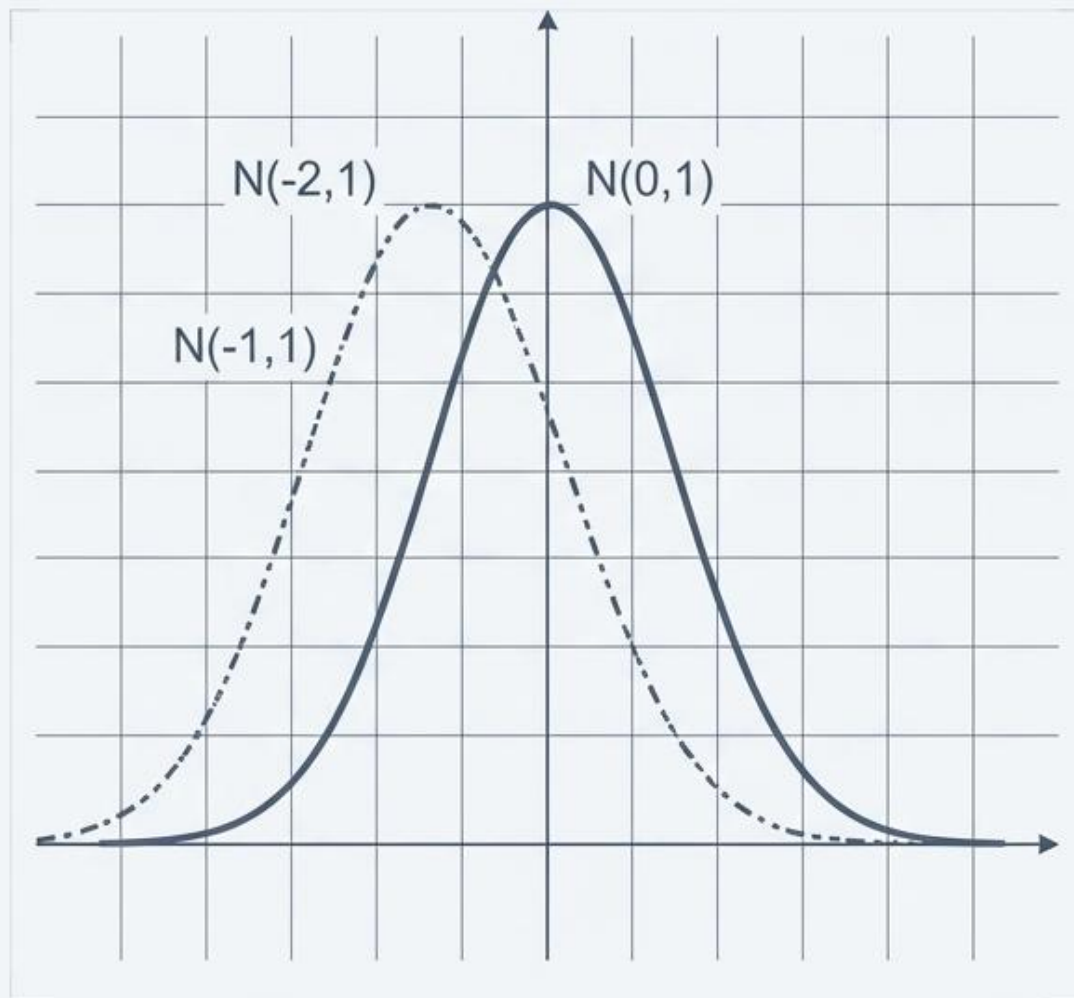
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Klíčové parametry:

Oswald

- μ (Mí): Střední hodnota (určuje polohu středu).
- σ (Sigma): Směrodatná odchylka (určuje šířku/rozptyl σ^2).

Inter



Normální rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Hustota

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1, \sigma > 0.$$

- μ parametr polohy (střední hodnota)
- σ parametr měřítka (směrodatná odchylka)

Vlastnosti

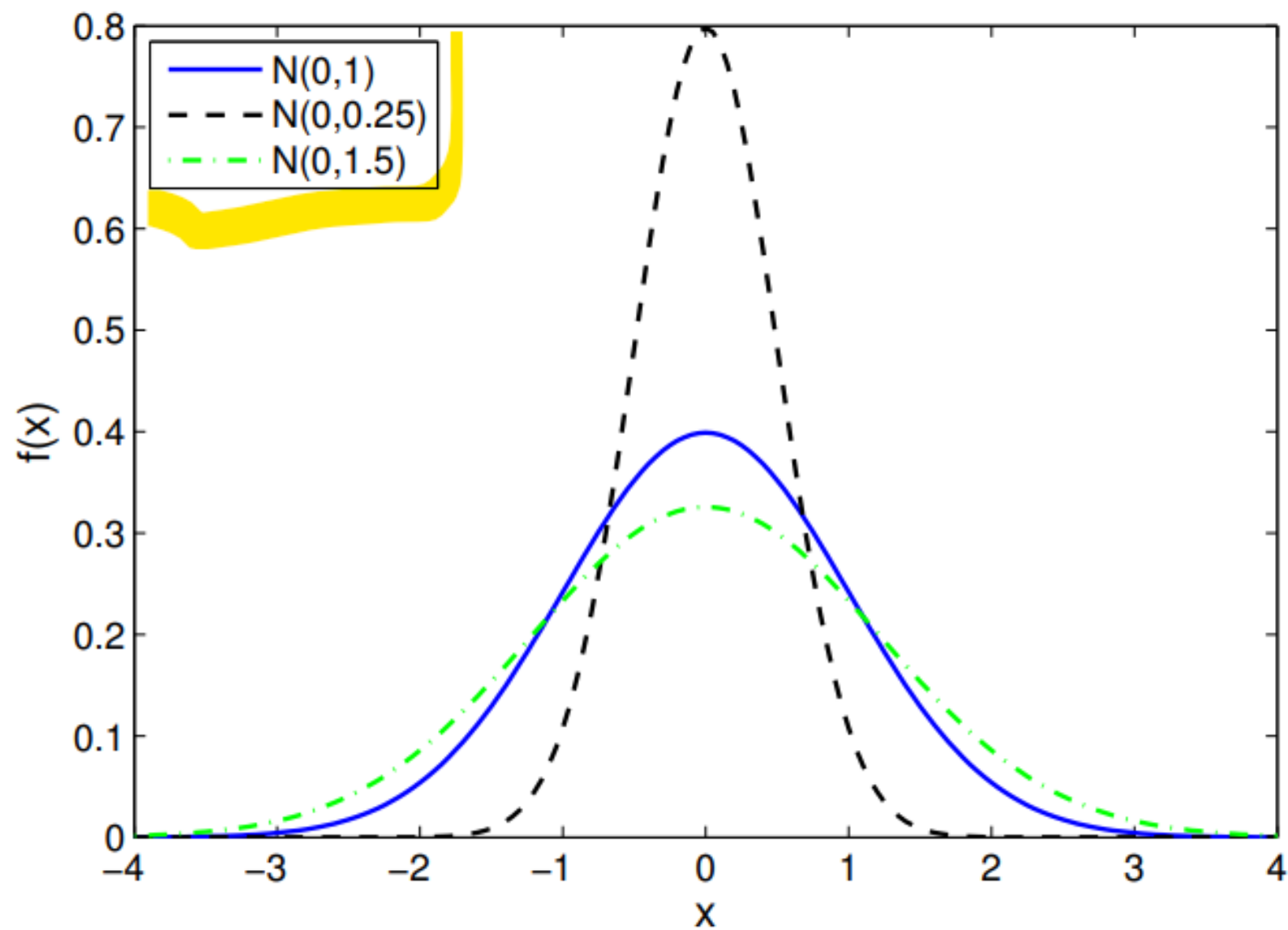
- X může nabývat jakýchkoli reálných hodnot
- hustota je symetrická kolem μ
- hustota nabývá maxima v bodě $x = \mu$, ($f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$)
- normální rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ nazýváme normované (standardizované) normální rozdělení.

Normální rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

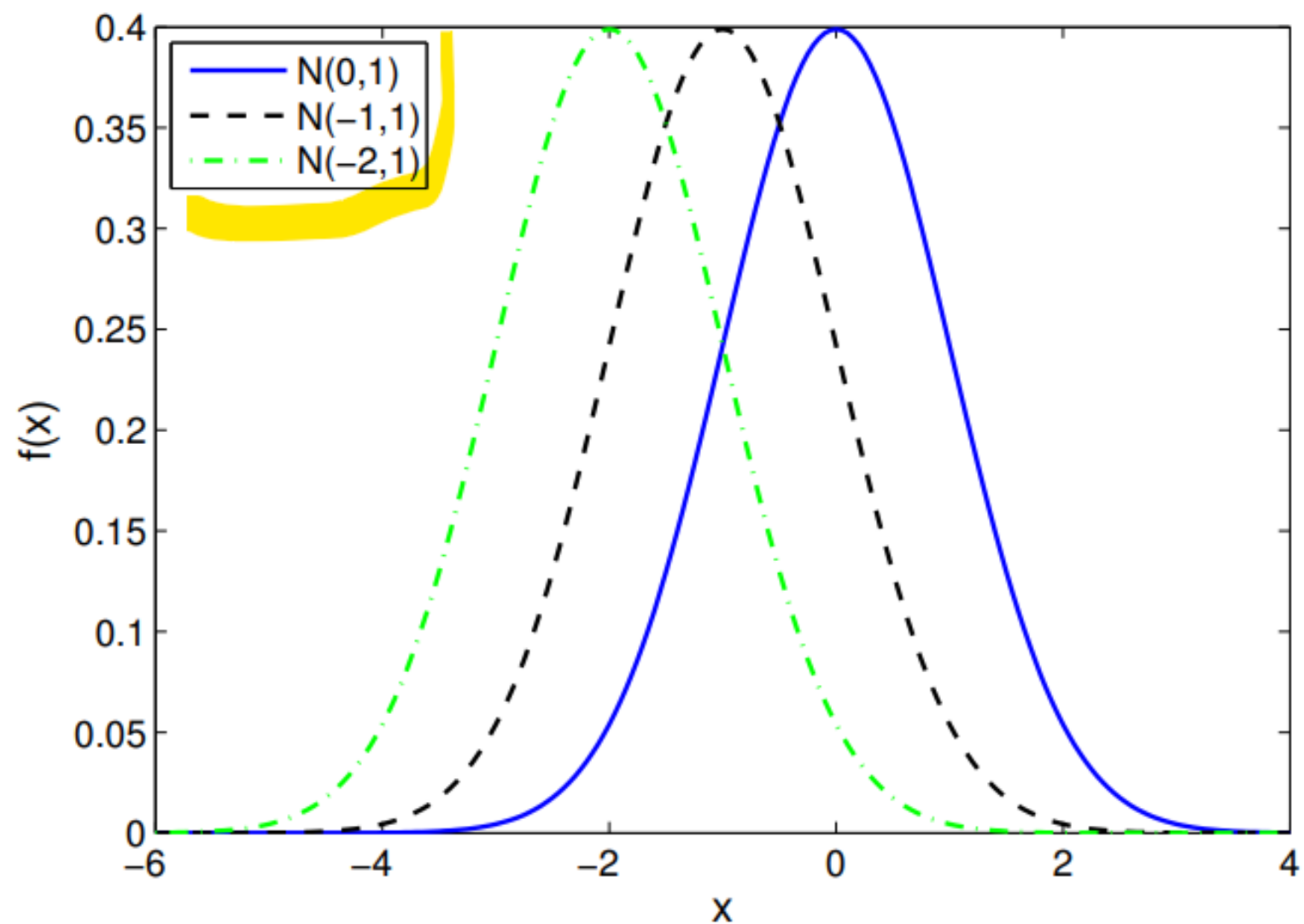
Číselné charakteristiky

$$E(X) = \mu, \quad X_{0.5} = \mu, \quad \hat{X} = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$$

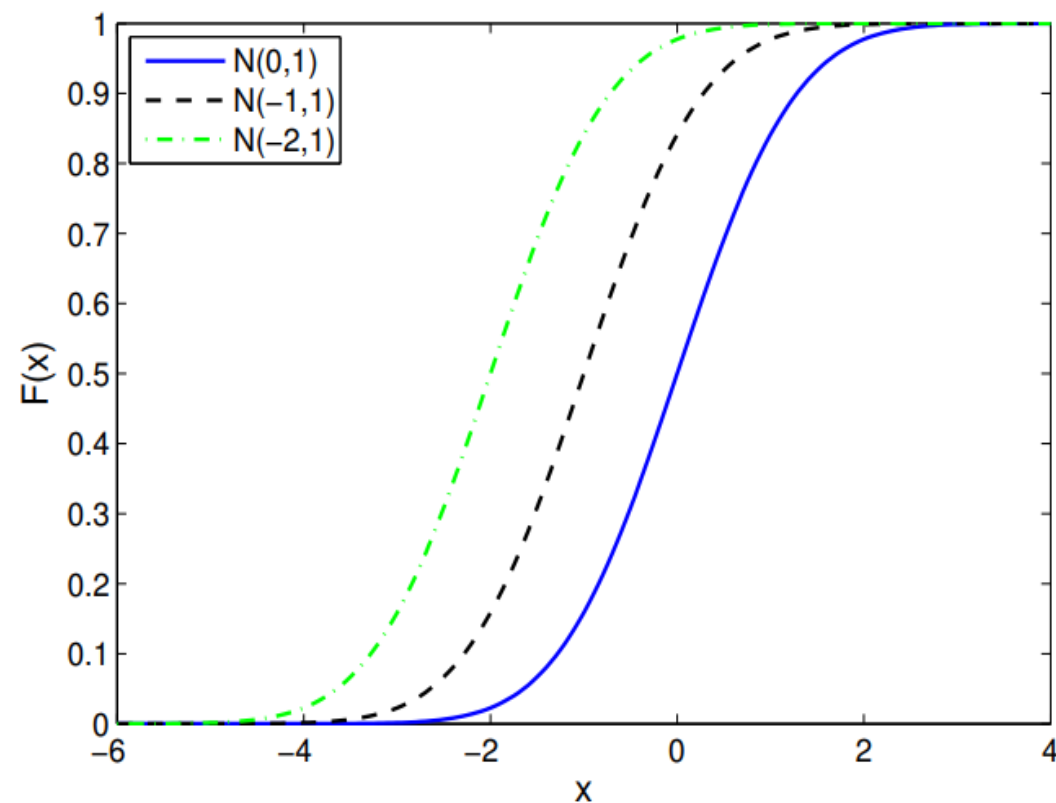
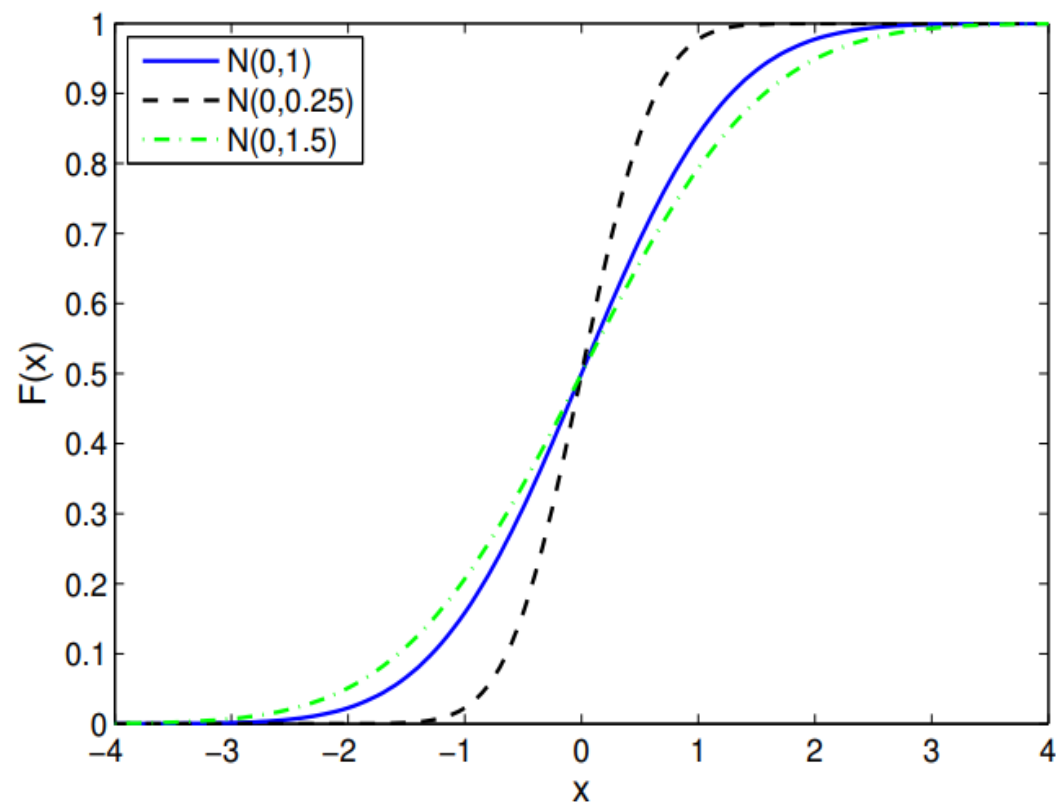
Hustota normálního rozdělení



Hustota normálního rozdělení



Distribuční funkce normálního rozdělení



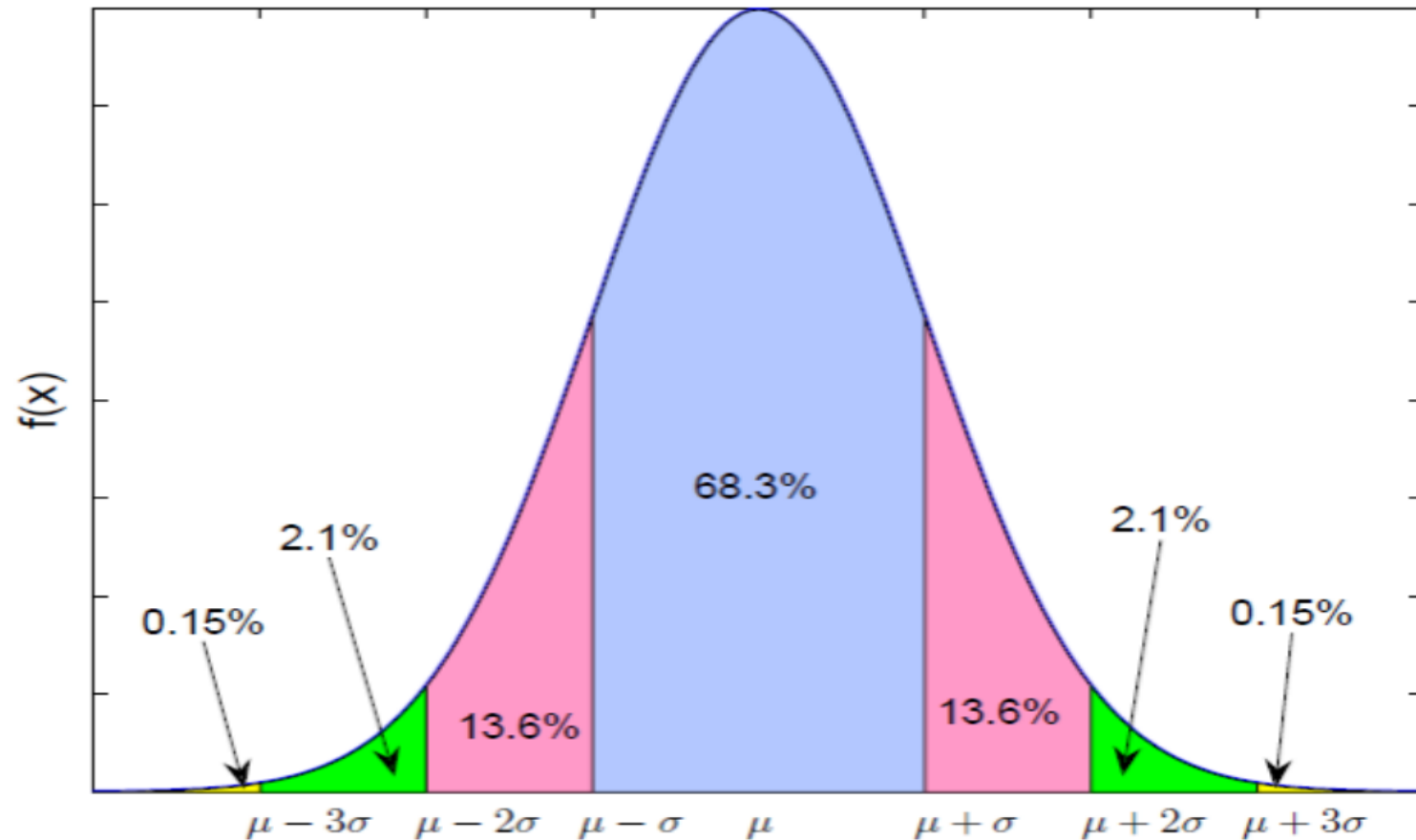
Pravidlo 3 sigma

Pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

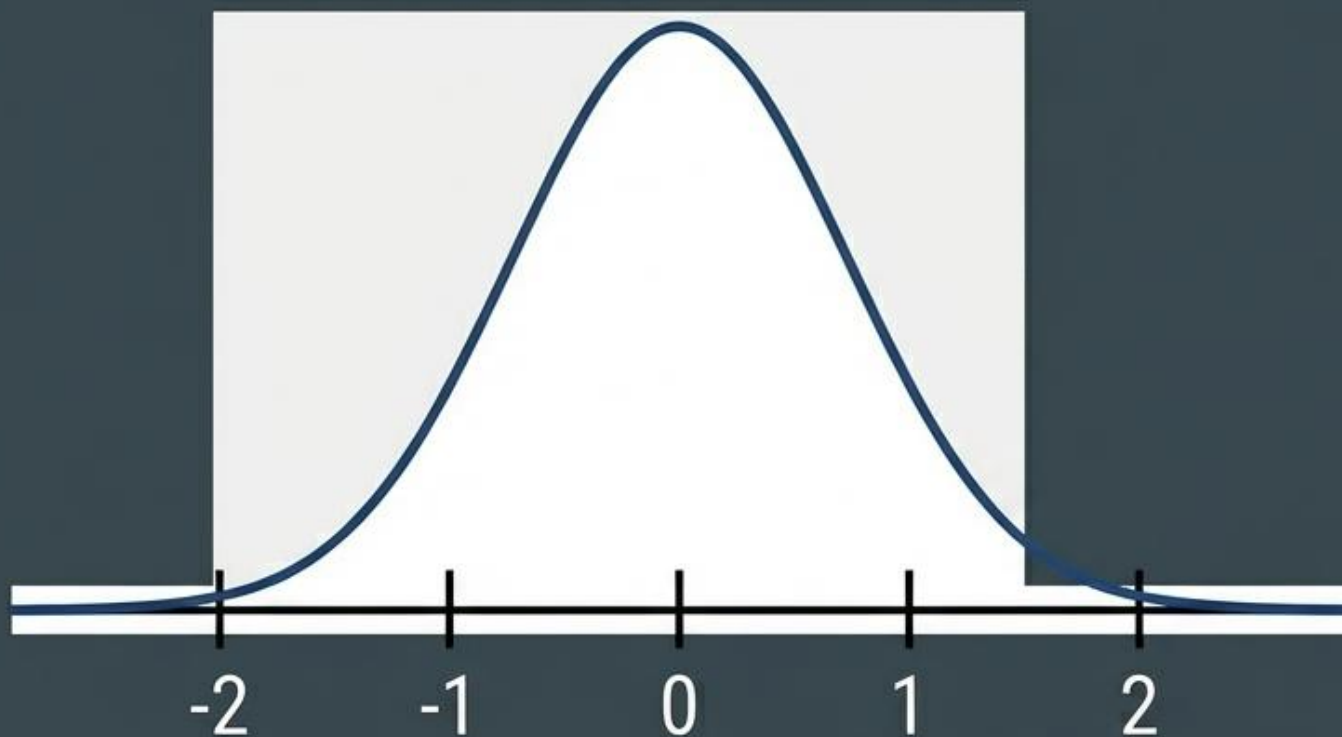
$$P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] \approx 68,3\%$$

$$P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \approx 95,5\%$$

$$P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] \approx 99,7\%$$



Standardizované normální rozdělení $N(0,1)$



- Nejdůležitější případ ve statistice.
- Posuneme střední hodnotu na $\mu = 0$ a rozptyl na $\sigma^2 = 1$.
- Umožňuje univerzální tabulky a porovnávání rozdílných datových sad (např. váhy vs. výšky).

Excel: `=NORM.S.INV(p)`

(Písmeno S znamená Standardized).

Excel: NORM.DIST($x; \mu; \sigma$; logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $f(x)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(x)$

NORM.S.DIST(x ; logická proměnná) pro práci s $N(0, 1)$

NORM.INV($\alpha; \mu; \sigma$) výpočet α kvantilu

NORM.S.INV(α) výpočet α kvantilu pro $X \sim N(0, 1)$

Příklad (IQ testy)

Hodnota IQ se řídí normálním rozdělením $N(100, 15^2)$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba bude mít

- a) IQ více než 130 bodů,*
- b) IQ méně než 90 bodů,*
- c) IQ v intervalu od 100 do 130 bodů?*

X ... hodnota IQ (v bodech)

$$X \sim N(100, 15^2) \quad P(X > 130) = 1 - P(X \leq 130)$$

Excel: `1-NORM.DIST(130;100;15;1)`

Příklad (IQ testy)

Hodnota IQ se řídí normálním rozdělením $N(100, 15^2)$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba bude mít

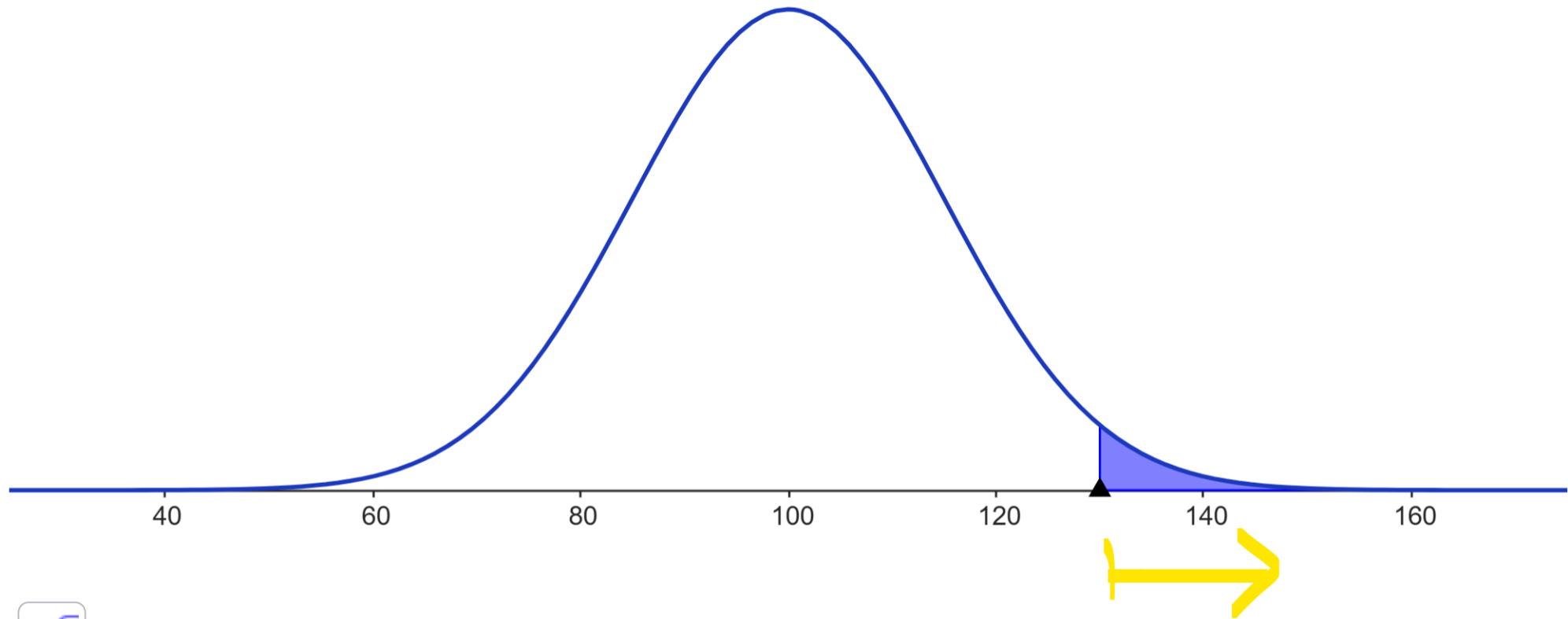
- a) IQ více než 130 bodů,*
- b) IQ méně než 90 bodů,*
- c) IQ v intervalu od 100 do 130 bodů?*

X ... hodnota IQ (v bodech)

$$X \sim N(100, 15^2) \quad P(X > 130) = 1 - P(X \leq 130)$$

Excel: `1-NORM.DIST(130;100;15;1)`

$$\mu = 100 \quad \sigma = 15$$



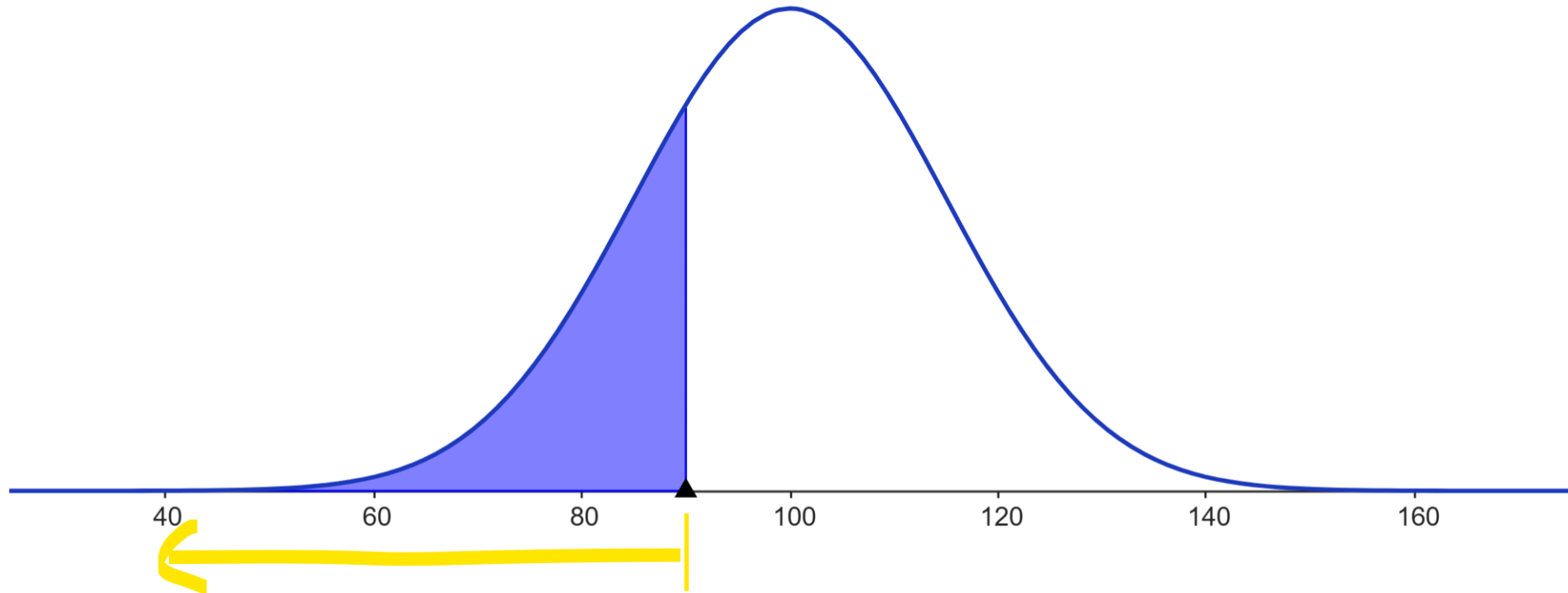
 Normal μ 100 σ 15



$$P(130 \leq X) = 0.0228$$



$$\mu = 100 \quad \sigma = 15$$



Normal ▾

 μ

100

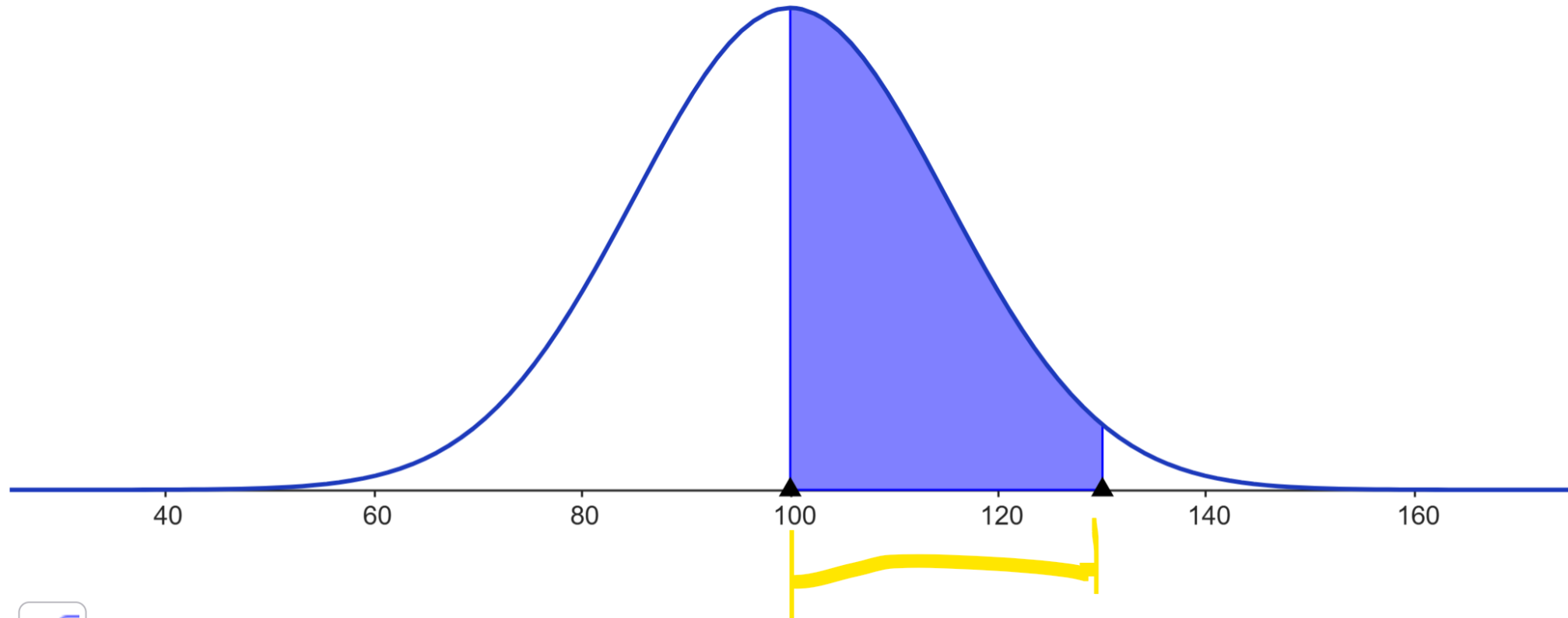
 σ

15



$$P(X \leq 90) = 0.2525$$



$\mu = 100$ $\sigma = 15$ 

Normal ▾

 μ

100

 σ

15



100

 $\leq X \leq 130$ $) = 0.4772$ 

Případová studie: Váha v uhelných skladech

Cíl mise:

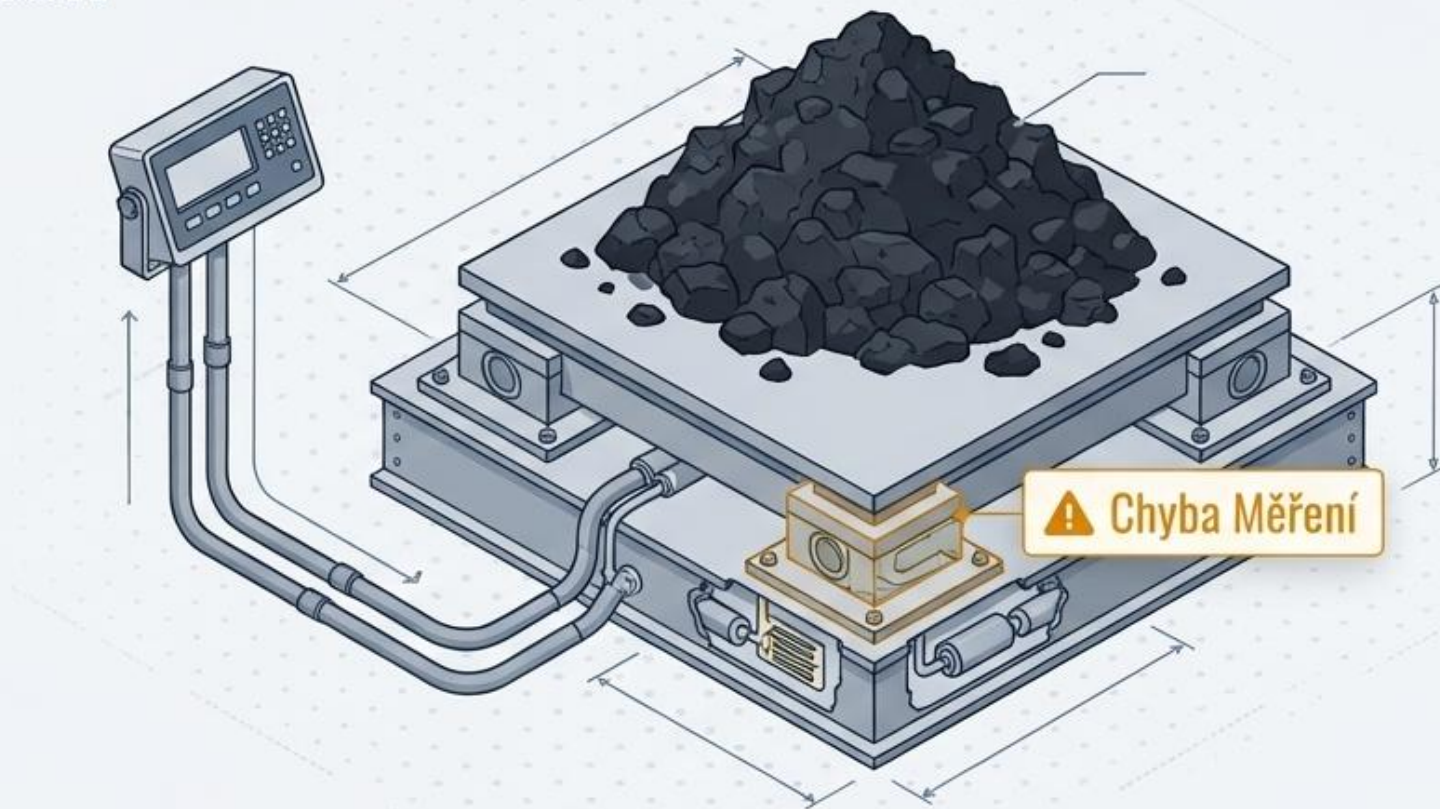
Průmyslová váha váží s chybou.
Snižuje váhu o 30 kg.

Vstupní data:

Náhodné chyby mají normální
rozdělení se směrodatnou
odchylkou $\sigma = 100$ kg.

Taktická otázka:

Jaká je pravděpodobnost, že
chyba zjištěné váhy nepřekročí v
absolutní hodnotě 90 kg?



Výsledek operace:

Po aplikaci standardizovaného normálního rozdělení získáme **přesnou pravděpodobnost: 0,6730 (67,3 %)**.

chyba?

ověřit

Které rozdělení a jaký kvantil? (Praktická diagnostika)

Hranice cholesterolu, kterou nepřekročí 90 % populace.

Normální rozdělení → $\text{NORM.INV}(0.90; \mu; \sigma)$

Zjištění výšky hladiny řeky, která definuje 'stoletou vodu' (1x za 100 let).

Logika extrémů → 99%-kvantil ($p = 0.99$).

Rozdělení studentů do lepších a horších tříd po SCIO testech podle kvartilů.

Normální rozdělení → První kvartil ($p=0.25$) a Třetí kvartil ($p=0.75$).

Shrnutí mise: Výběr správného nástroje

$U(a, b)$ Rovnoměrné 	$\text{Exp}(\lambda)$ Exponenciální 	$N(\mu, \sigma^2)$ Normální 
Tvar: Obdélník (Symetrický)	Tvar: Klesající křivka (Asymetrická)	Tvar: Zvonovitá křivka (Symetrická)
Použití: Stejná šance napříč intervalem.	Použití: Doba čekání na událost.	Použití: Měření s chybami, přírodní procesy.
Parametry: Mez a, Mez b	Parametry: Intenzita λ	Parametry: Střed μ , Rozptyl σ^2

Výzva splněna: Chaos je nyní predikovatelný



Final debrief

- ➡ Úspěšně jste přešli od prostého počítání diskrétních jevů k měření nekonečných spojitých možností.
- 📈 Pomocí hustoty pravděpodobnosti dokážete odhadnout vývoj dříve nepředvídatelných systémů.
- 📈 Taktické nástroje $U(a, b)$, $\text{Exp}(\lambda)$ a $N(\mu, \sigma^2)$ tvoří základ moderní datové analýzy a strojového učení.

Status týmu: Připravení na nasazení v reálných operacích. 😊