

Nejpoužívanější
spojitá rozdělení
pravděpodobnosti a jejich
základní číselné charakteristiky

P1ZST-05b-2026

Kvantily spojité náhodné veličiny

Definice

Nechť $\alpha \in (0, 1)$. α -kvantilem spojité náhodné veličiny X rozumíme kterékoli reálné číslo x_α , které splňuje

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha.$$

- X spojitá: α -kvantil určen jednoznačně vztahem

$$F(x_\alpha) = \alpha$$

- X diskrétní: kvantily nejsou určeny jednoznačně, nebudeme uvažovat

Odkaz na geogebra

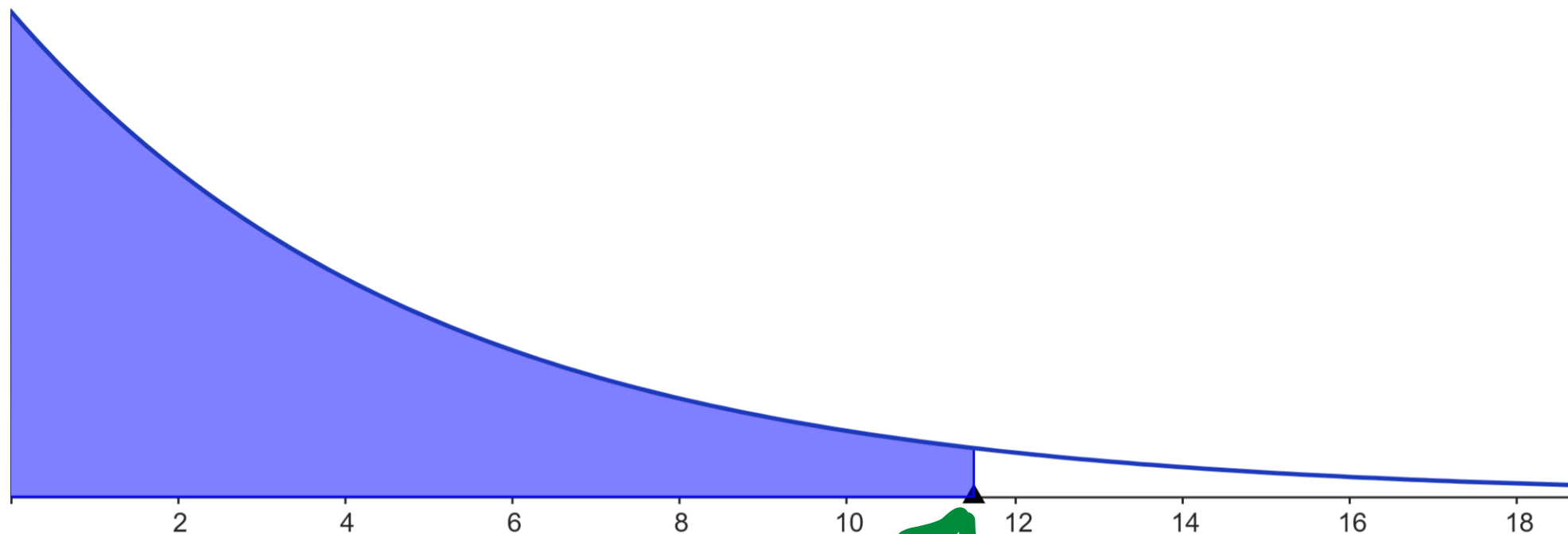


- <https://www.geogebra.org/m/zvh2f8kn>

Speciální názvy kvantilů

- $x_{0,5}$ – medián
- $x_{0,25}$ – dolní kvartil
- $x_{0,75}$ – horní kvartil
- $x_{k/10}$, $k = 1, \dots, 9$ – k -tý decil
- $x_{k/100}$, $k = 1, \dots, 99$ – k -tý percentil

$$\mu = 5 \quad \sigma = 5$$

Exponential ▾ λ 0.2

$$P(X \leq 11.5129) = 0.9$$

Ukázka 9. decilu exponenciálního rozdělení

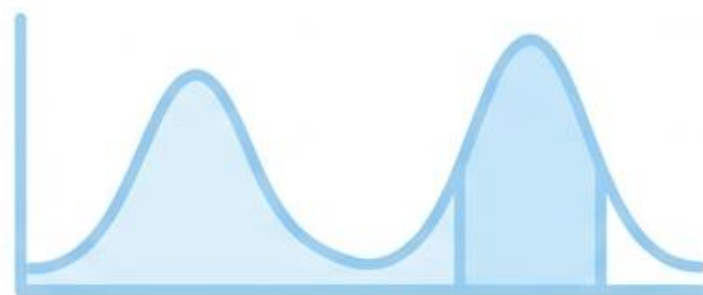


Dva světy datových modelů



Diskrétní náhodná veličina

- Nabývá izolovaných hodnot (např. počet chyb, hod kostkou).
- K popisu slouží pravděpodobnostní funkce (konkrétní pravděpodobnost pro každý bod).
- Vizuál: Schodovité diagramy, izolované body.



Spojité náhodná veličina

- Nabývá jakýchkoli hodnot v intervalu (např. výška, čas čekání).
- K popisu slouží hustota pravděpodobnosti (pravděpodobnost je plocha pod křivkou).
- Vizuál: Plynulé křivky, hladké přechody.

Pravidla hry: Spojitý vs. Diskrétní svět

Starý svět (Diskrétní)



Počítáme konkrétní výsledky
(např. hod kostkou).

Nová realita (Spojité)

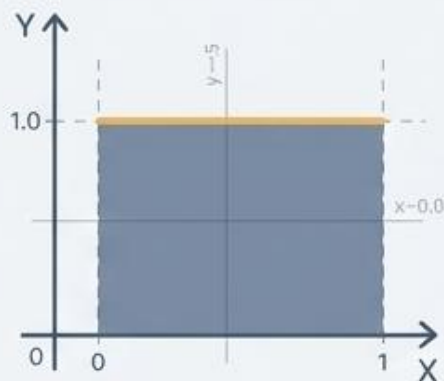


Měříme nekonečné možnosti
v intervalech (čas, výška, váha).

Klíčový poznatek: Ve spojitém světě je pravděpodobnost jedné konkrétní hodnoty prakticky nulová ($P(X=x) = 0$). Nemůžeme ulovit jeden bod.

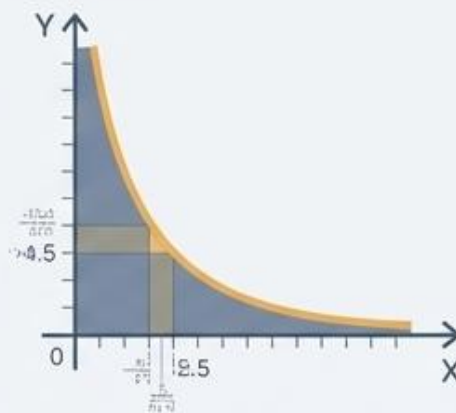
Nová zbraň: Lovíme v intervalech pomocí **Hustoty pravděpodobnosti (Probability Density)**.

Taktický arzenál týmu



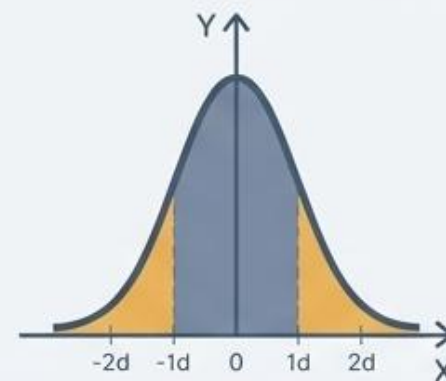
Nástroj 1: Obdélník (Rovnoměrné rozdělení).

Pro situace absolutní náhody ve vymezeném prostoru.



Nástroj 2: Křivka (Exponenciální rozdělení).

Pro modelování času a čekání na další událost.



Nástroj 3: Zvon (Normální rozdělení).

Ultimátní zbraň pro analýzu přírodního chaosu a chyb měření.

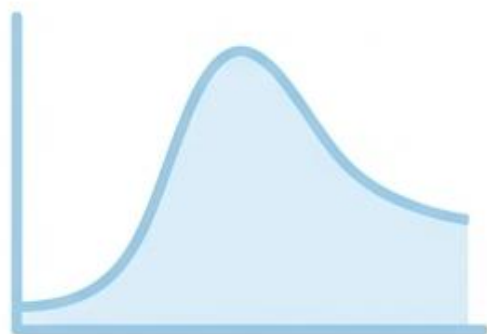
Sjednocený analytický rámec

Každé rozdělení v naší analýze prozkoumáme pomocí čtyř základních pilířů. Tento postupný vzorec nám umožní snadno porovnávat různé modely.



1. Koncept a využití

Kdy a proč tento model použít?



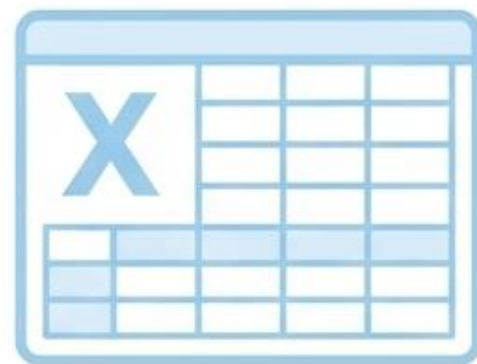
2. Parametry a funkce

Jak model definujeme matematicky (Hustota / Distribuční funkce)?



3. Klíčové charakteristiky

Kde je střed (Střední hodnota) a jaký je rozptyl?



4. Softwarové nástroje

Jak model aplikovat v praxi (MS Excel)?

Mise 1:

Dokonalá neznámá

Situační zpráva:

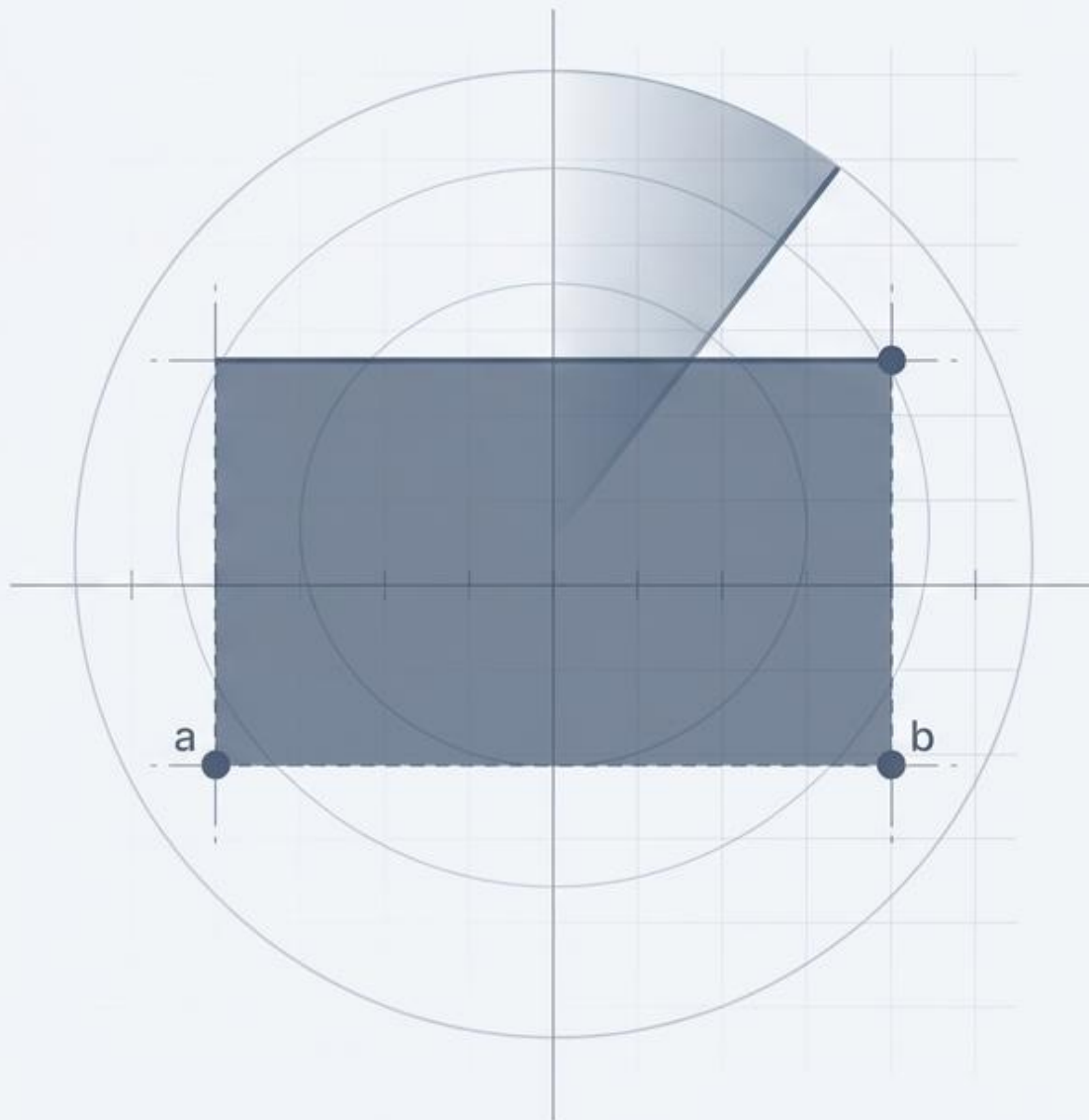
Událost může nastat kdykoliv uvnitř pevně daného okna (od bodu a do bodu b).

Komplikace:

Každá hodnota v tomto intervalu má naprosto stejnou šanci na výskyt. Žádný bod není favorizován.

Cíl týmu:

Jak modelovat pravděpodobnost v prostředí, kde vládne absolutní rovnost šancí?



Odemčený nástroj: Rovnoměrné rozdělení $U(a, b)$

Tvar hustoty: Plochý obdélník. Každá hodnota z intervalu $[a, b]$ je stejně pravděpodobná.

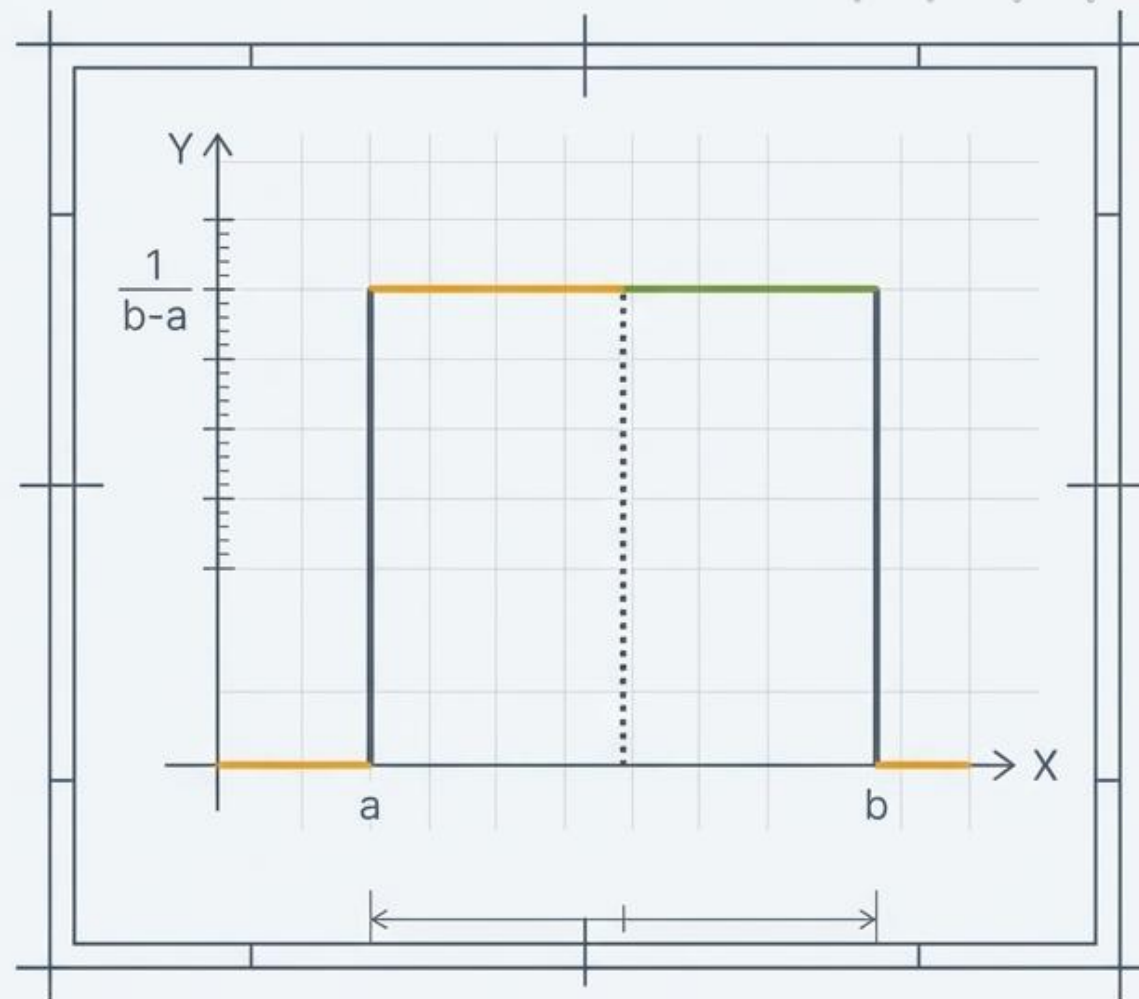
Vzorec hustoty (Specifikace):

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ pro } a \leq x \leq b$$

Klíčové metriky (Parametry):

- Střední hodnota (Těžiště): $(a + b) / 2$
- Rozptyl (Variabilita): $(b - a)^2 / 12$

Symetrie: Dokonale symetrické kolem střední hodnoty.



Rovnoměrné rozdělení: Když je vše stejně možné

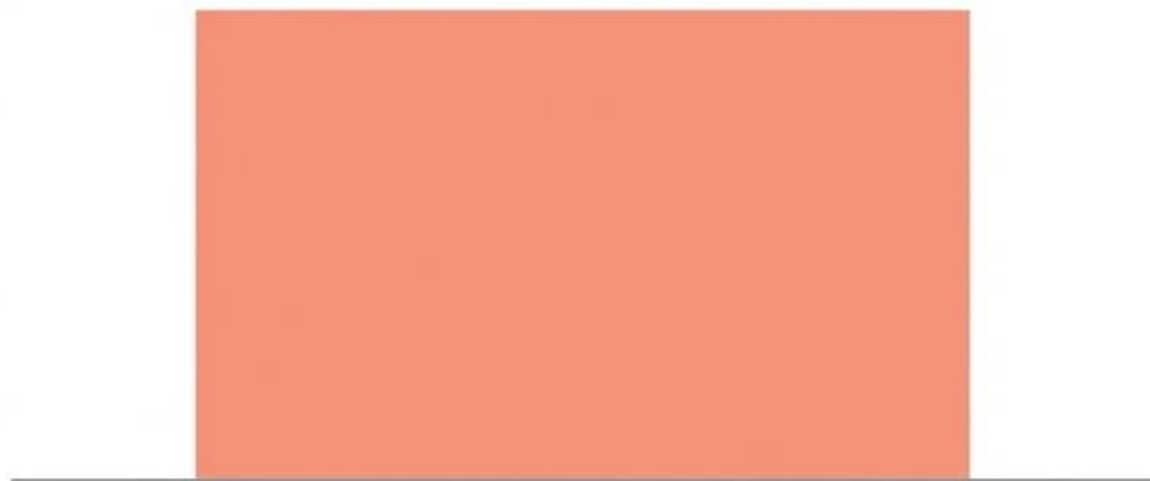


Koncept:

- Popisuje situace, kde má každá hodnota z určitého intervalu zcela stejnou pravděpodobnost.
- Neexistuje žádný preferovaný střed jako u normálního rozdělení.

Praktický příklad:

- Doba čekání na vlak, který jezdí v přesně pravidelných intervalech. Pokud přijdete na nádraží zcela náhodně, doba čekání je rovnoměrně rozdělená.



Hranice a hustota rovnoměrného rozdělení



Parametry $U(a, b)$:

Model je pevně ohraničen dvěma parametry:

- a = Dolní mez
- b = Horní mez

Hustota pravděpodobnosti $f(x)$:

Mimo interval $[a, b]$ je nulová. Uvnitř intervalu je konstantní:

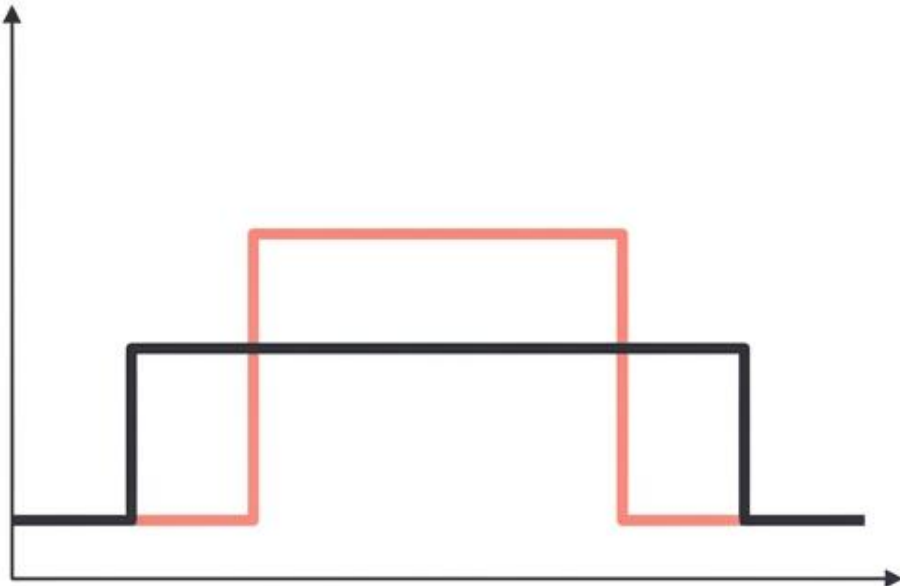
$$f(x) = \frac{1}{b - a}$$

Vizuální profil rovnoměrného rozdělení



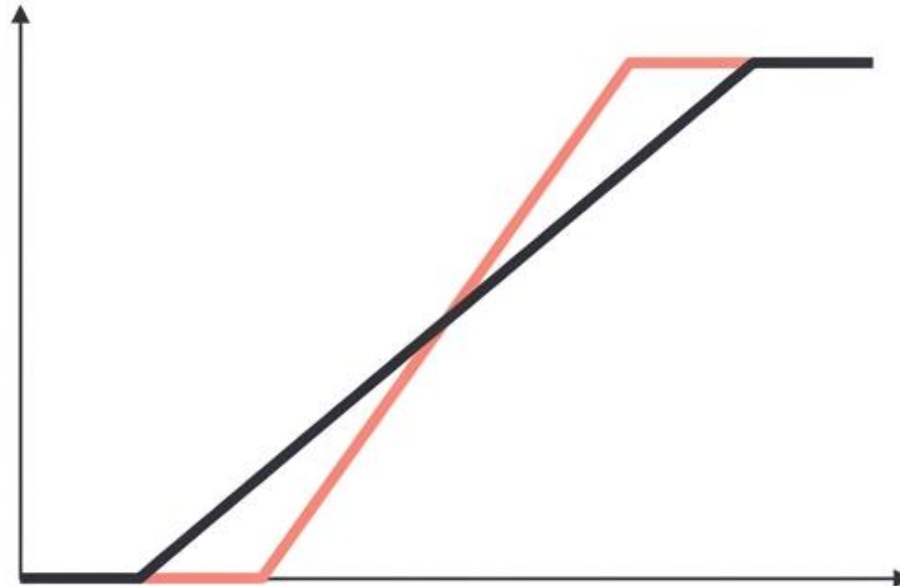
Hustota pravděpodobnosti $f(x)$

- Tvoří dokonalý obdélník (krabicový graf).
- Plocha obdélníka je vždy přesně 1.



Distribuční funkce $F(x)$

- Uvnitř intervalu roste přísně lineárně.
- Dokonalý vizuální kontrast vůči zaobleným S-křivkám normálního rozdělení.



Těžiště a rozptyl rovnoměrného rozdělení



Klíčové charakteristiky:

Střední hodnota $E(X)$:

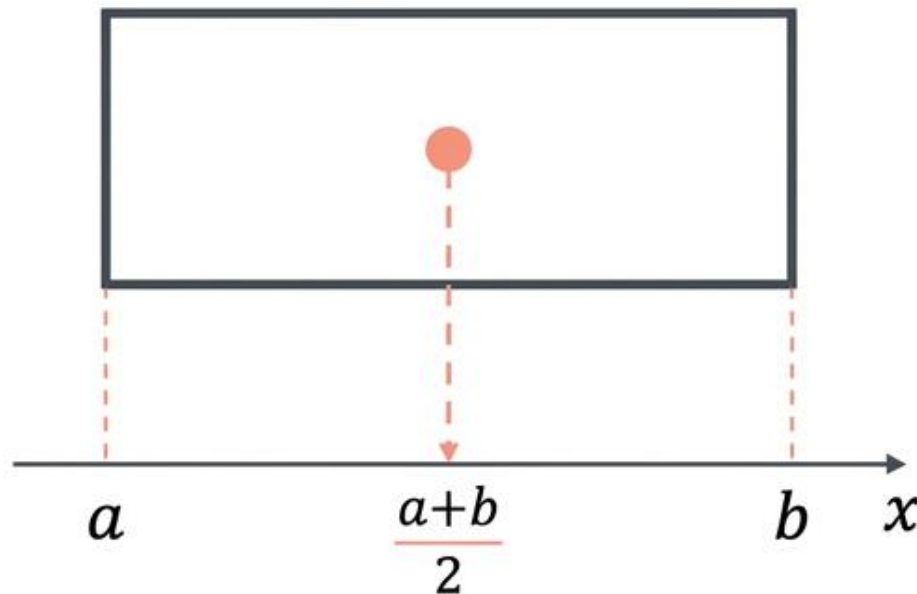
- Geometrický střed intervalu (těžiště obdélníku).

$$E(X) = \frac{a + b}{2}$$

Rozptyl $D(X)$:

- Závisí pouze na šířce intervalu. Čím širší interval, tím větší rozptyl.

$$D(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$



Mise 2: Závod s časem

Situační zpráva:

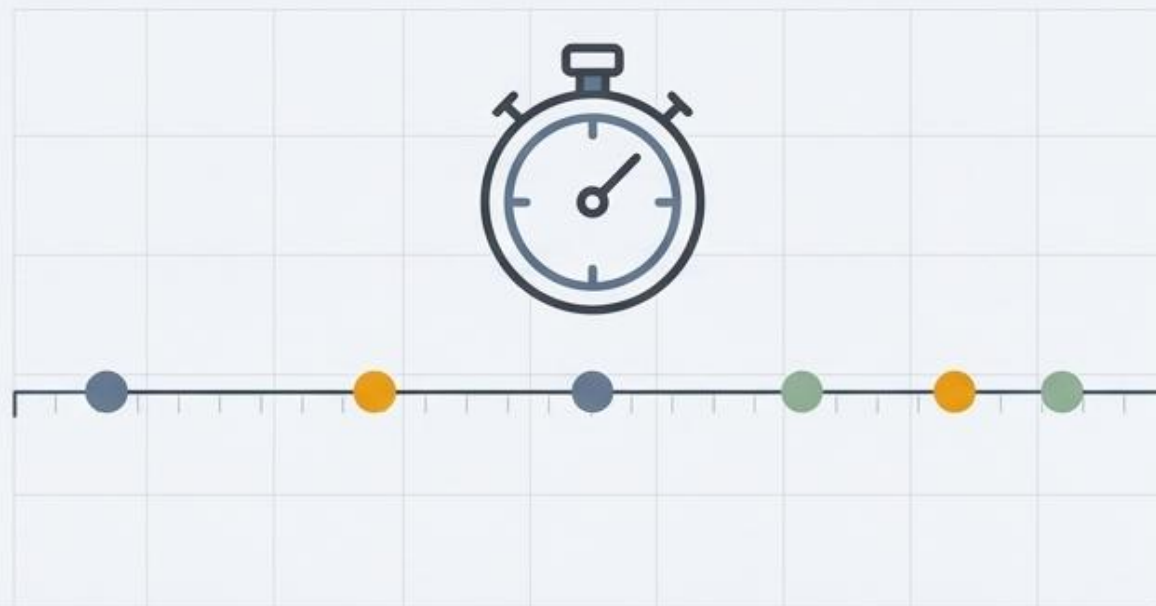
Tým musí predikovat čas. Jak dlouho budeme čekat na další nezávislou událost? (např. příchod zákazníka, porucha stroje).

Komplikace:

Události se vyskytují s konstantní průměrnou intenzitou, ale samotné rozestupy jsou náhodné.

Cíl týmu:

Najít nástroj, který dokáže modelovat dobu čekání na událost v asymetrickém čase.



Odemčený nástroj: Exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\lambda)$

Klíčový parametr: λ (Lambda) = Intenzita událostí (průměrný počet výskytů za jednotku času).

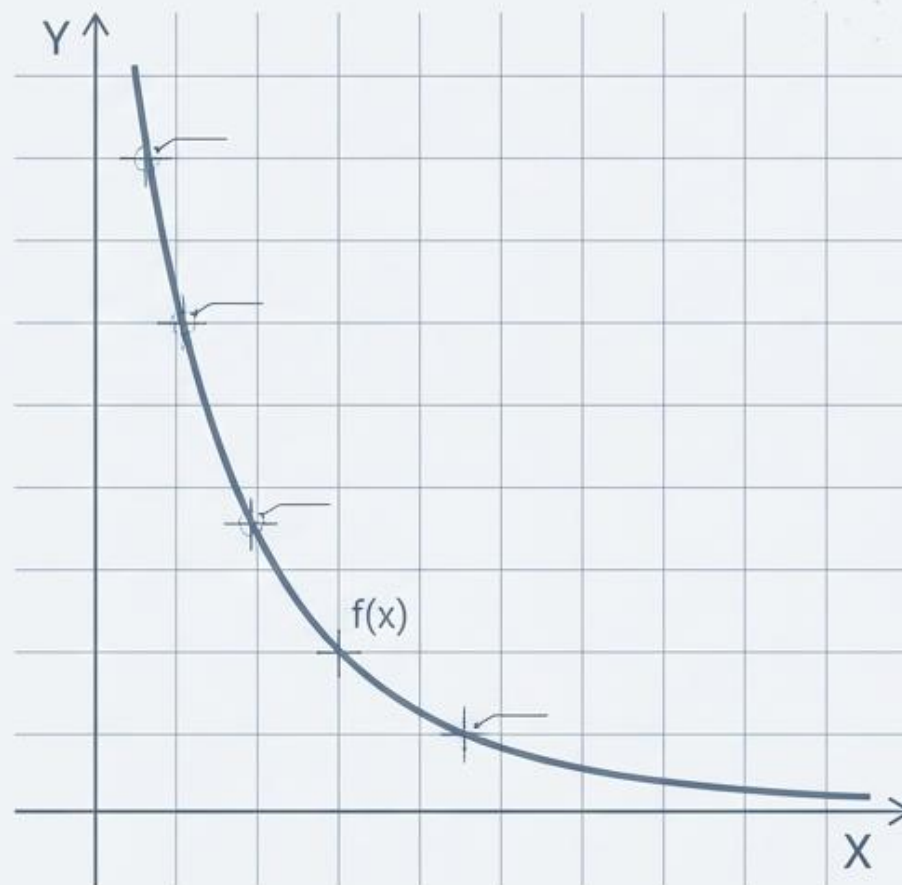
Vzorec hustoty (Specifikace):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ pro } x \geq 0$$

Klíčové metriky:

- Střední hodnota (Průměrné čekání): $1 / \lambda$
- Rozptyl: $1 / \lambda^2$

Taktická poznámka: Silně asymetrické rozdělení (delší pravý chvost). Nulová paměť.



Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(\lambda)$

Model: modelování doby/vzdálenosti čekání na událost, která nemá paměť, tj. zbývající doba/vzdálenost čekání nezávisí na tom, jak dlouho už na událost čekáme

Příklady

- doba životnosti zařízení, u kterého dochází k poruše náhodně, nikoliv z důsledku opotřebení
- délka telefonního hovoru
- doba mezi 2 příchozími telefonáty

Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(\lambda)$

Parametr rozdělení

- λ ... míra rizika výskytu sledované události za jednotku času/vzdálenosti
- $\frac{1}{\lambda}$... očekávaná doba/vzdálenost do výskytu sledované události

Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(\lambda)$

Hustota

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Distribuční funkce

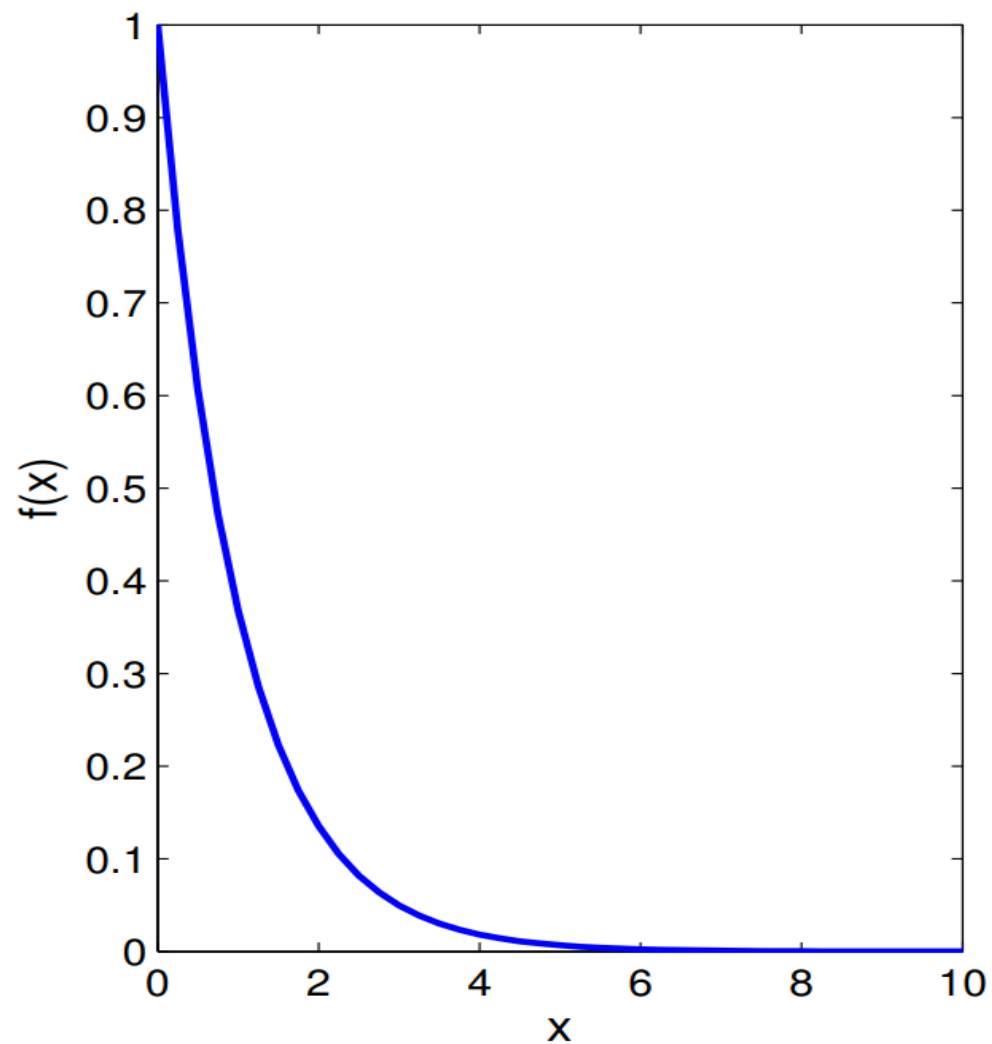
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Číselné charakteristiky

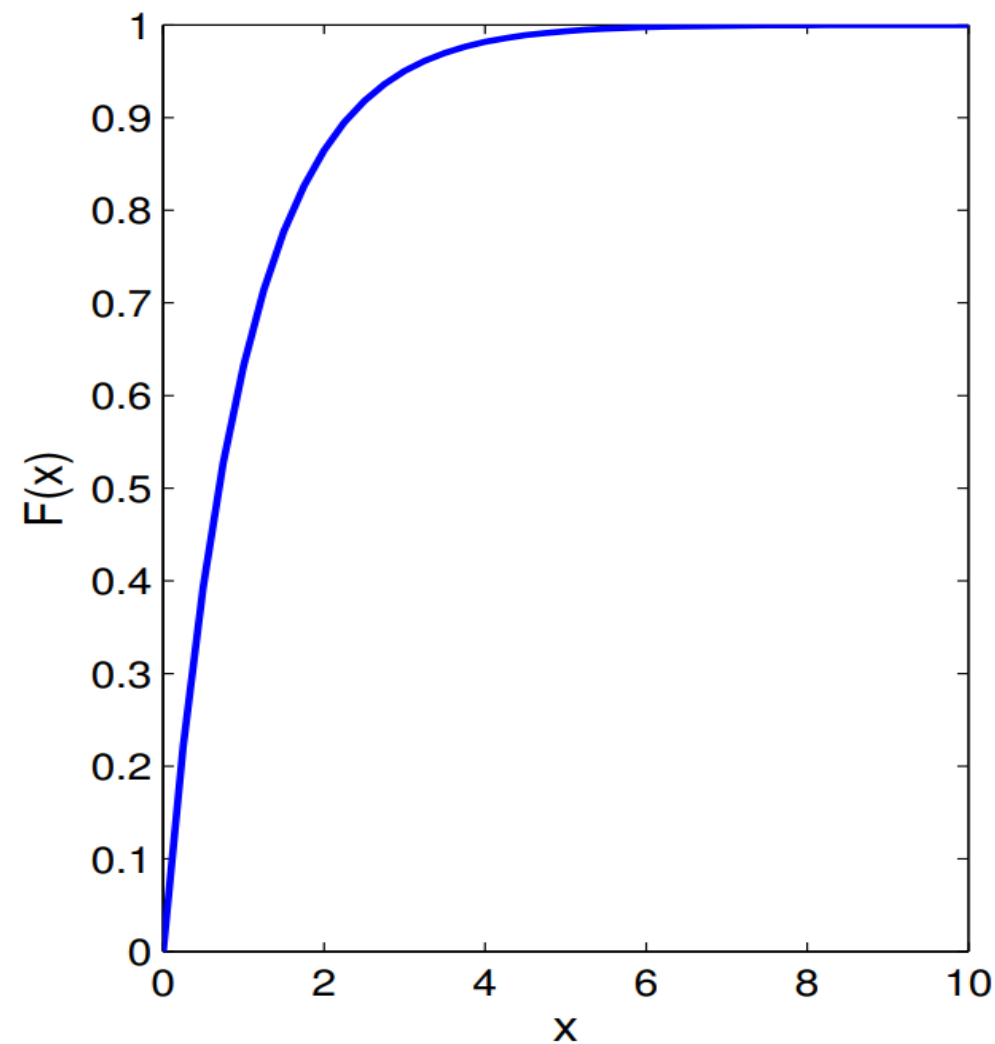
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(1)$

Hustota



Distribuční funkce



Exponenciální rozdělení $X \sim \text{Ex}(\lambda)$

Excel: EXPON.DIST($x; \lambda$; logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $f(x)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(x)$

Příklad (Obsluha v restauraci)

*Doba čekání hosta na pivo v restauraci U Lva je průměrně 5 minut.
Určete*

- a) *pravděpodobnost, že host bude na pivo čekat déle než 12 minut*
- b) *dobu čekání hosta na pivo, během níž bude obsloužen s
pravděpodobností 0,9.*

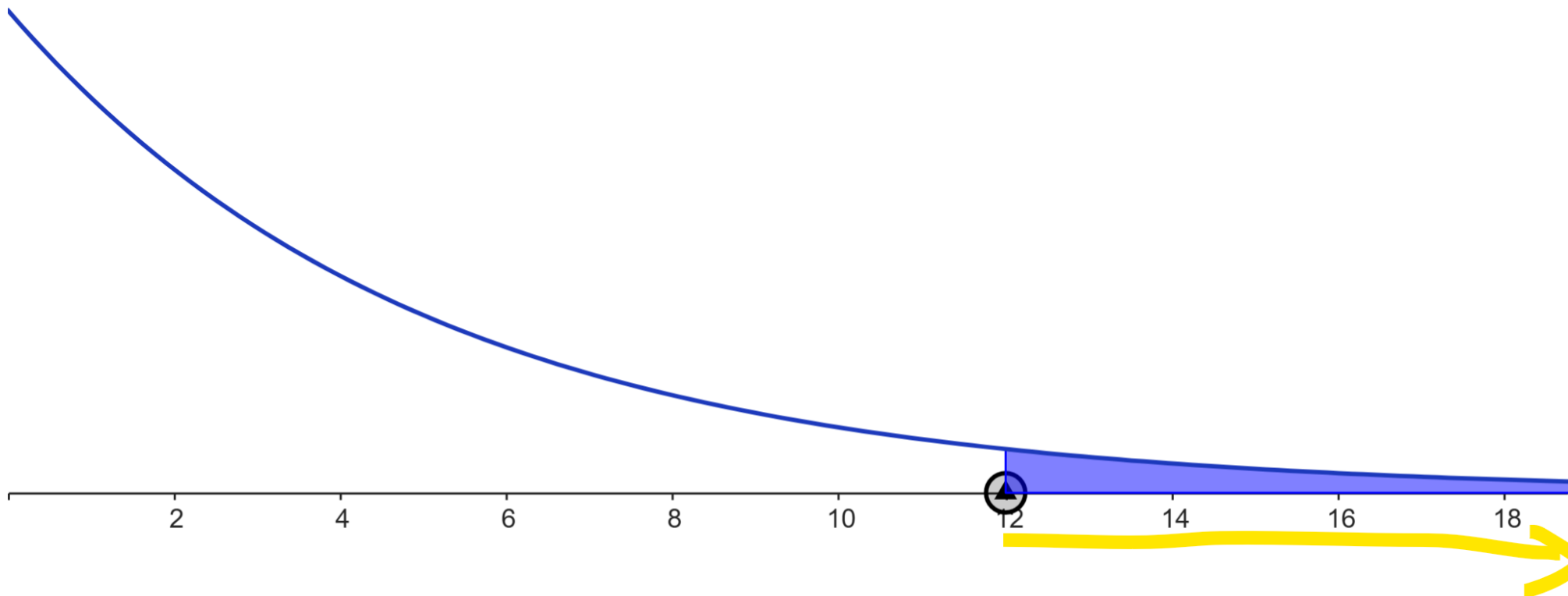
Nějaký nápad?

X ... doba čekání na pivo (v minutách)

průměrná doba čekání na pivo ... 5 minut

$$X \sim \text{Ex}(\lambda), \lambda = \frac{1}{5}$$


$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0 \end{cases}$$

$\mu = 5 \quad \sigma = 5$ 

Exponential

 λ 0.2

$$P(12 \leq X) = 0.0907$$

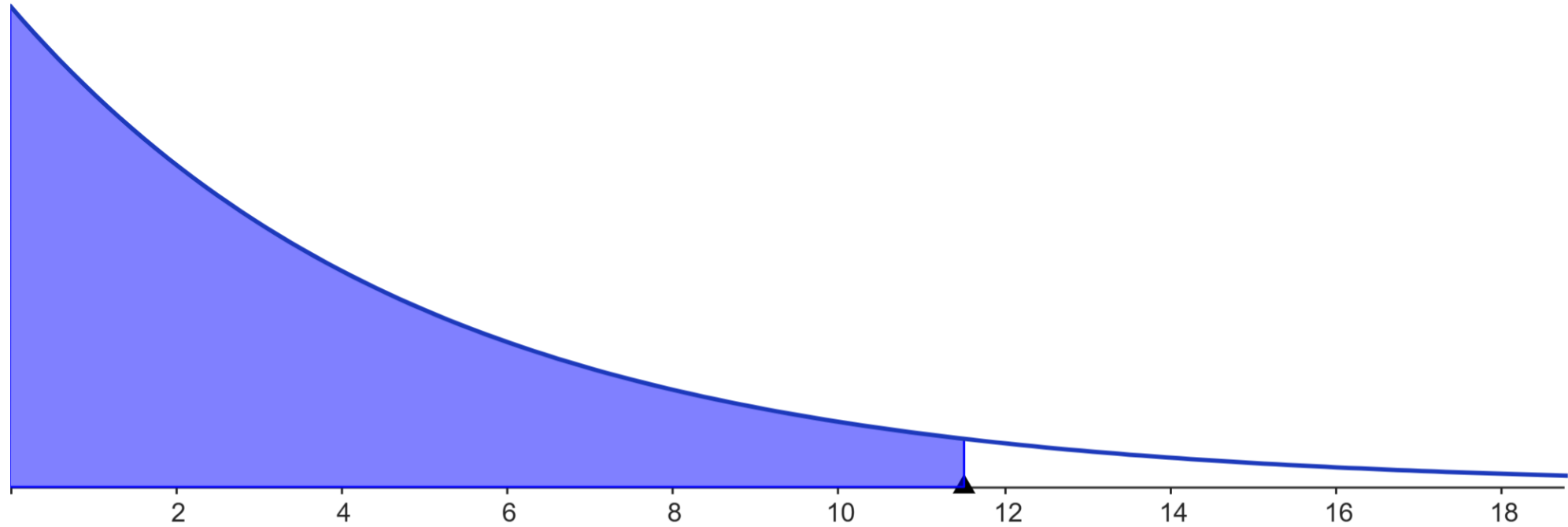


Pravděpodobnost, že host bude na pivo čekat déle než 12 minut

$$\begin{aligned} P(X > 12) &= 1 - P(X \leq 12) = 1 - F(12) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 12}\right) \\ &= e^{-\frac{12}{5}} = 0,09 \end{aligned}$$

Excel: 1-EXPON.DIST(12;1/5;1)

$$\mu = 5 \quad \sigma = 5$$



Exponential

 λ

0.2



$$P(X \leq 11.5129) = 0.9$$



Doba čekání hosta na pivo, během níž bude obsloužen s pravděpodobností 0,9

$$P(0 \leq X \leq t) = 0,9$$

$$F(t) - F(0) = 0,9$$

$$1 - e^{-t/5} - 0 = 0,9$$

$$e^{-t/5} = 0,1$$

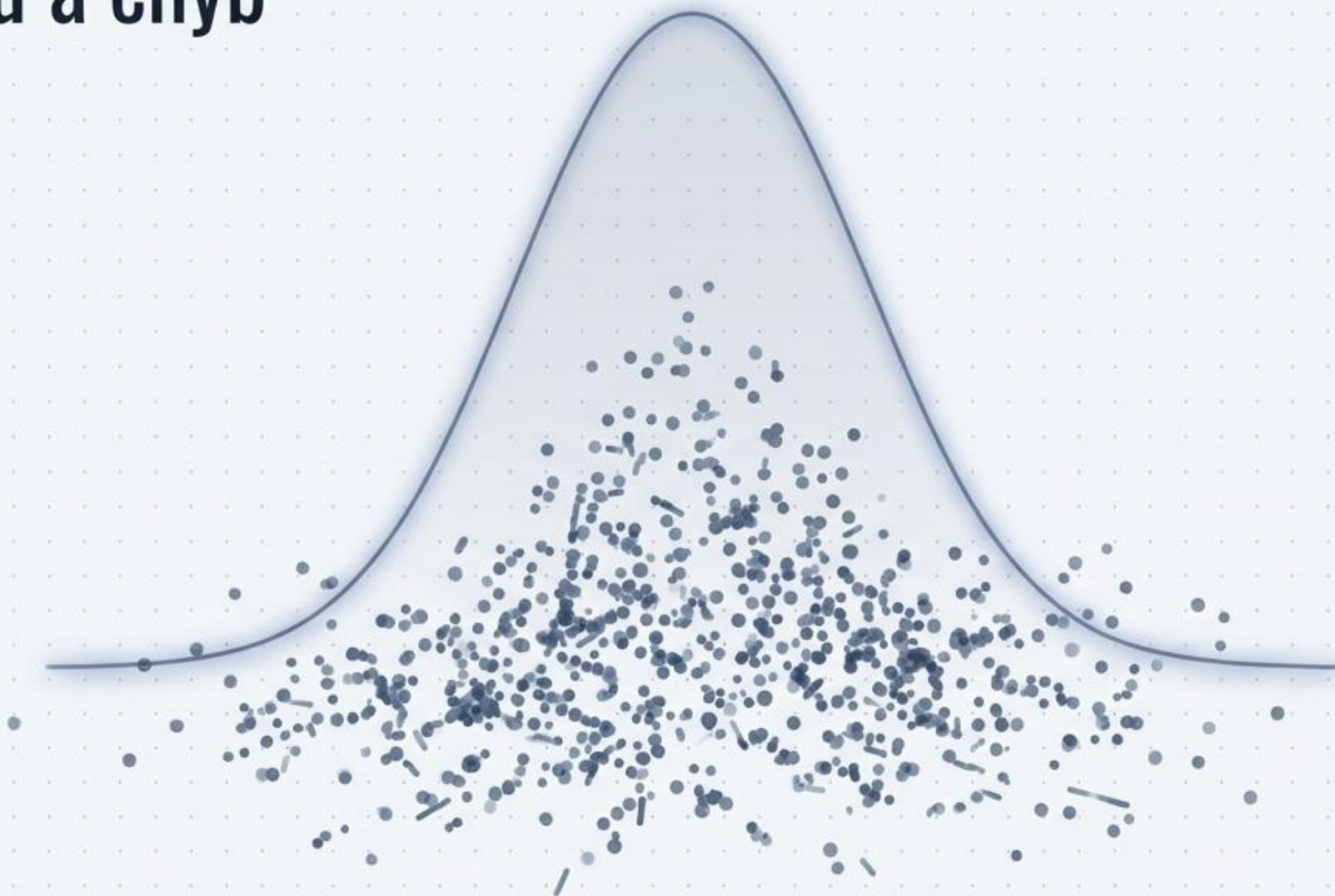
$$t = -5 \ln(0,1) \doteq 11,51 \text{ min} \doteq 11 \text{ min } 30 \text{ s}$$

Mise 3: Král chaosu a chyb

Situační zpráva: Tým čelí masivním
objemům reálných dat – výrobní chyby,
nepřesnosti měření, přírodní jevy.

Komplikace: Hodnoty se přirozeně
shlukují kolem průměru, přičemž
extrémní odchylky jsou vzácné.

Cíl týmu: Nasadit nejvlivnější nástroj
teorie pravděpodobnosti k ovládnutí
tohoto přirozeného chaosu.



Odemčený nástroj: Normální rozdění $N(\mu, \sigma^2)$

Tvar hustoty:

Oswald

Zvonovitý tvar, dokonale symetrický kolem střední hodnoty.

Inter

Vzorec hustoty (Specifikace):

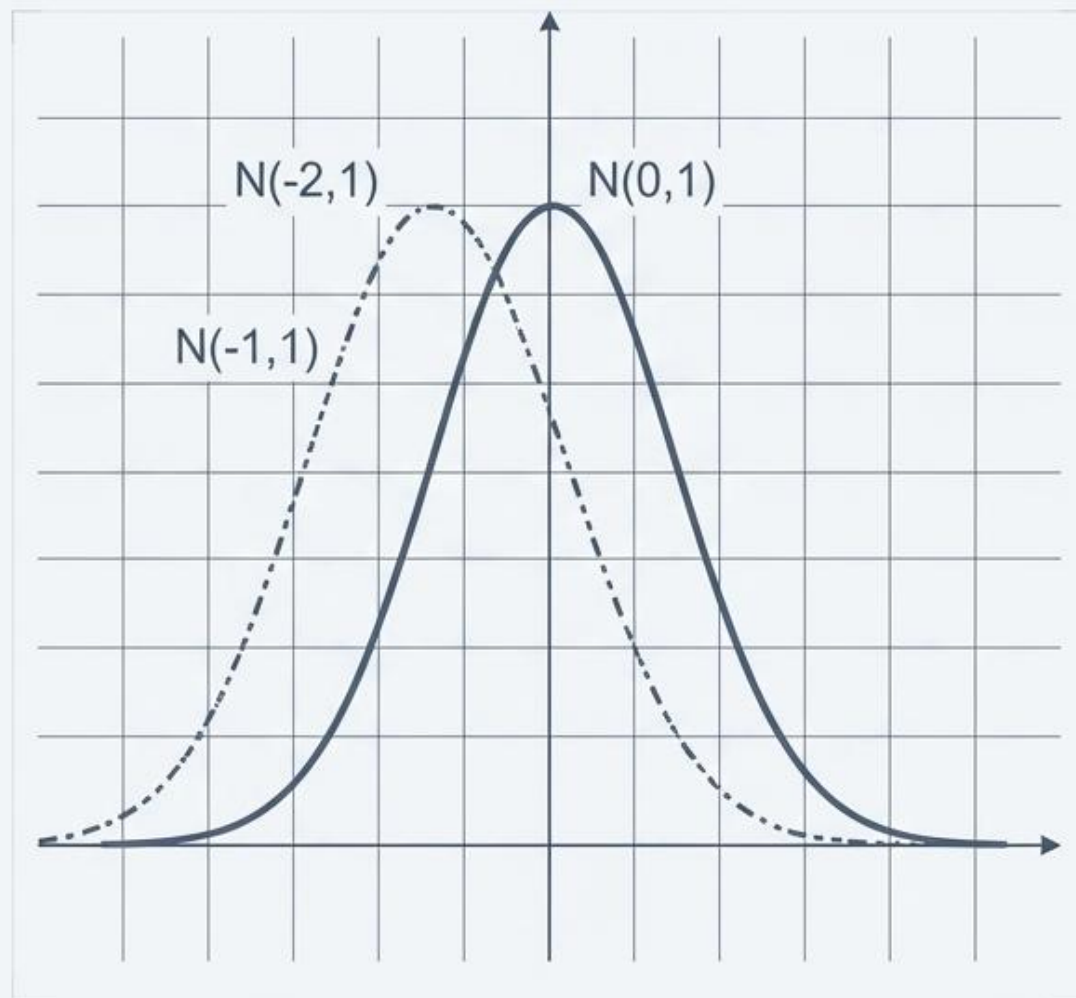
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Klíčové parametry:

Oswald

- μ (Mí): Střední hodnota (určuje polohu středu).
- σ (Sigma): Směrodatná odchylka (určuje šířku/rozptyl σ^2).

Inter



Normální rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Hustota

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \mu \in \mathbb{R}^1, \sigma > 0.$$

- μ parametr polohy (střední hodnota)
- σ parametr měřítka (směrodatná odchylka)

Vlastnosti

- X může nabývat jakýchkoli reálných hodnot
- hustota je symetrická kolem μ
- hustota nabývá maxima v bodě $x = \mu$, $(f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})$
- normální rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ nazýváme normované (standardizované) normální rozdělení.

Normální rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = \mu, \quad X_{0.5} = \mu, \quad \hat{X} = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$$

Excel: NORM.DIST($x; \mu; \sigma$; logická proměnná)

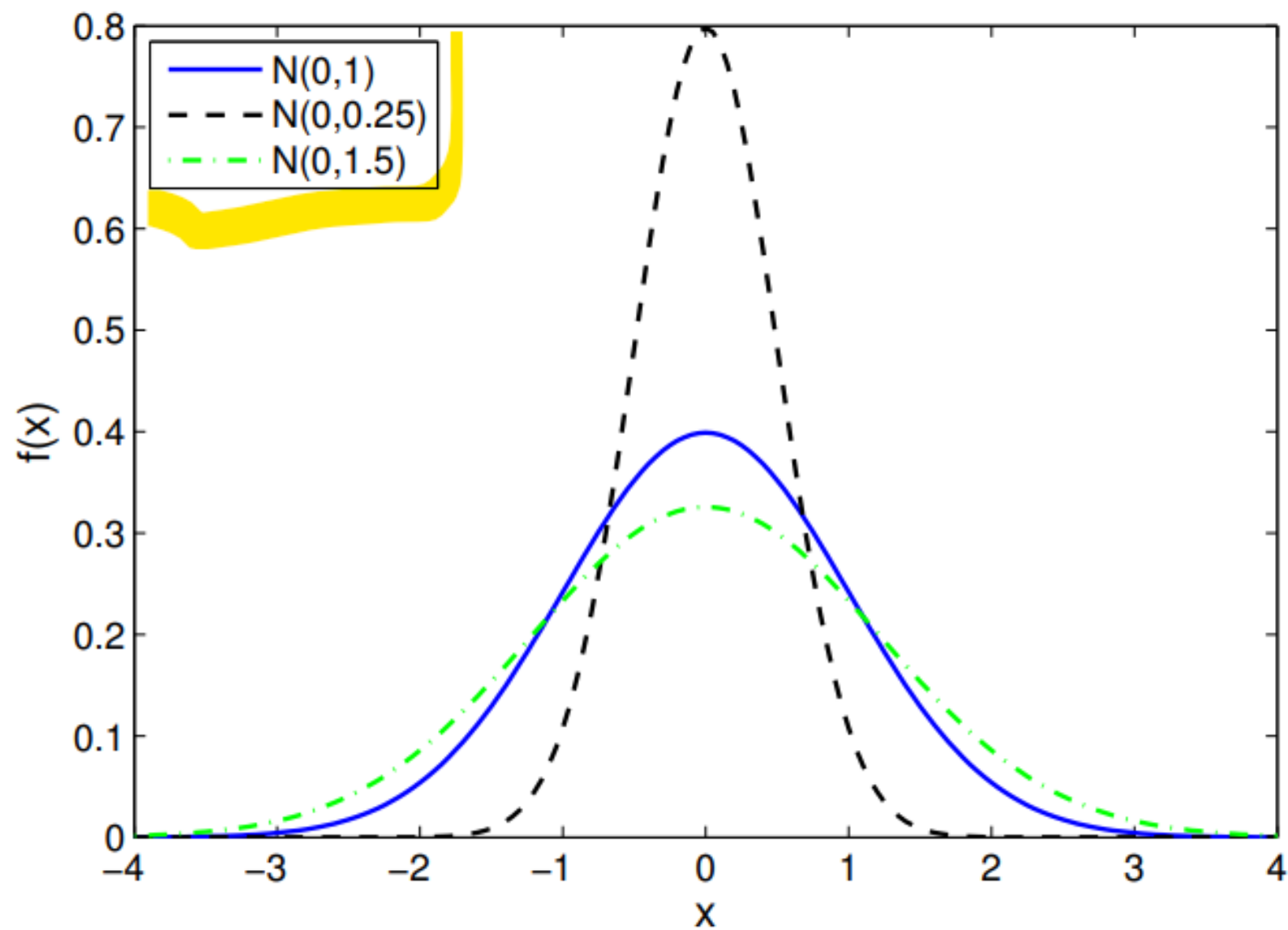
- logická proměnná = 0 pro výpočet $f(x)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(x)$

NORM.S.DIST(x ; logická proměnná) pro práci s $N(0, 1)$

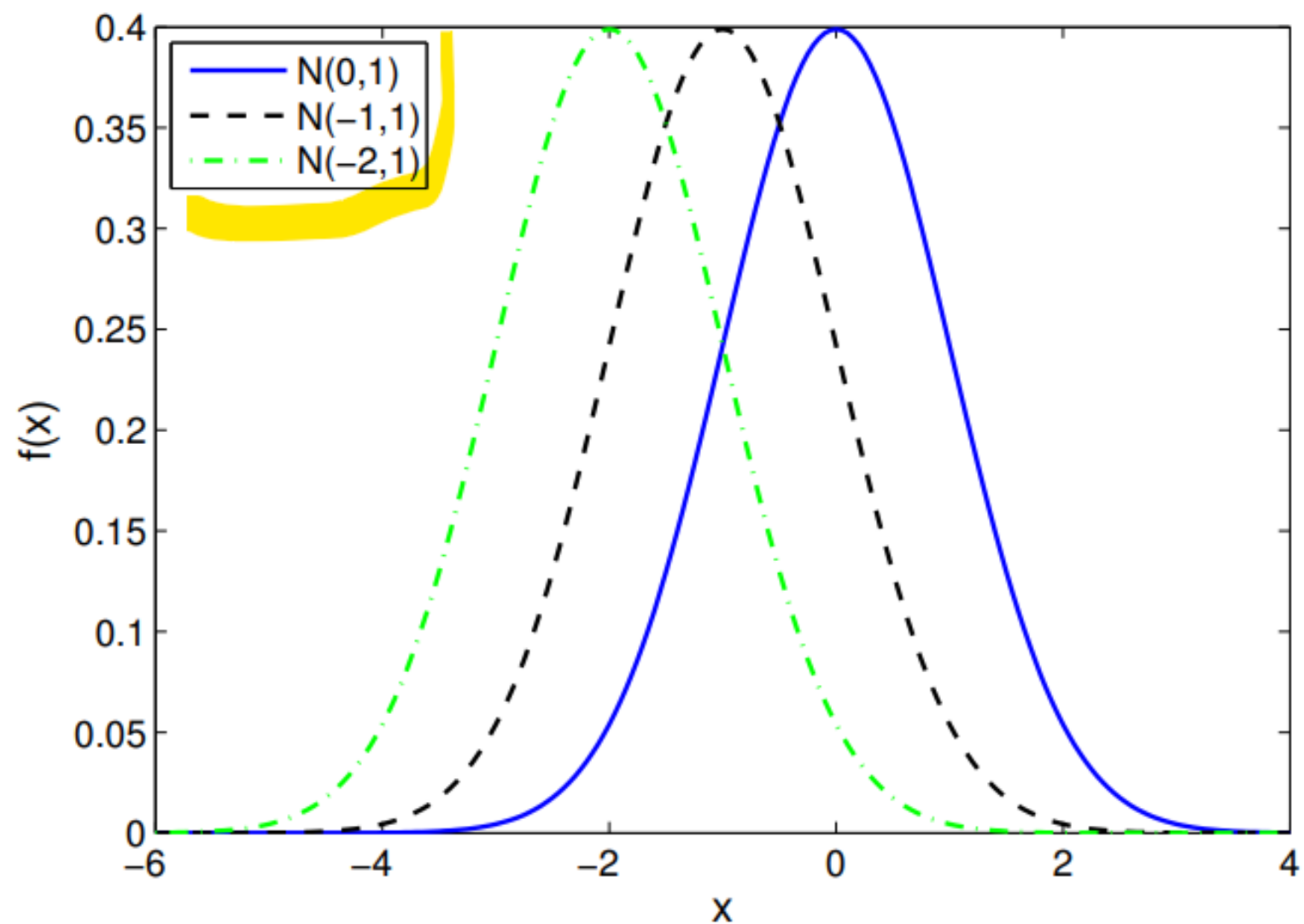
NORM.INV($\alpha; \mu; \sigma$) výpočet α kvantilu

NORM.S.INV(α) výpočet α kvantilu pro $X \sim N(0, 1)$

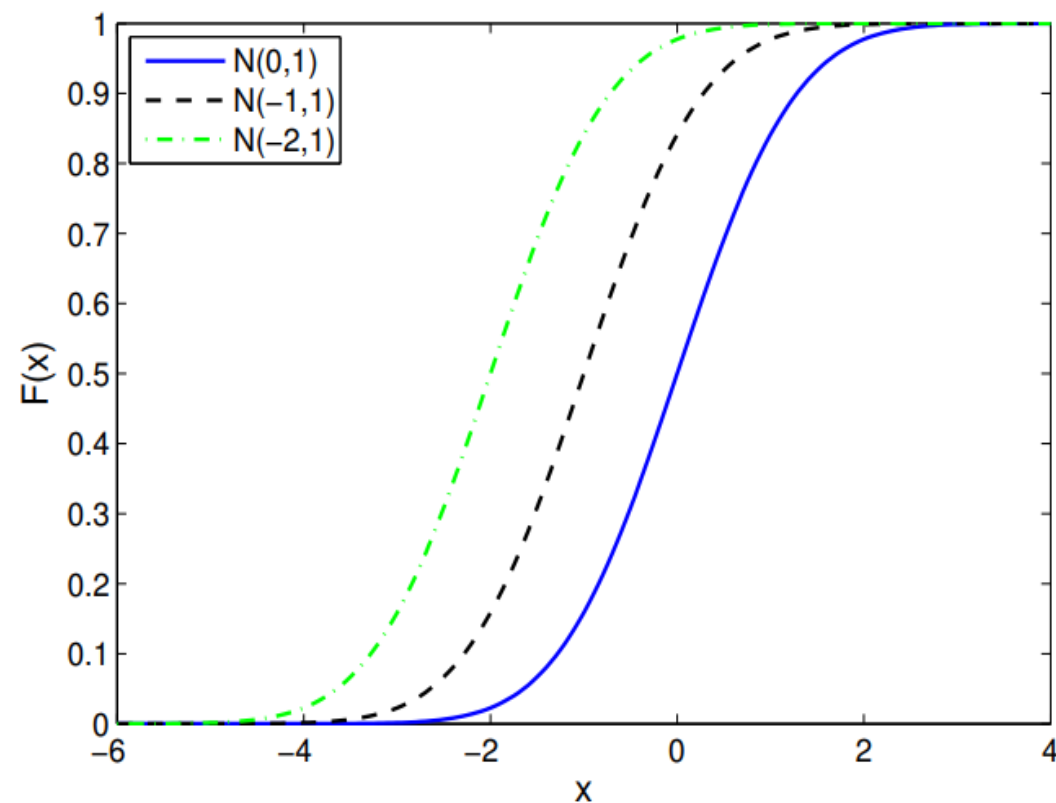
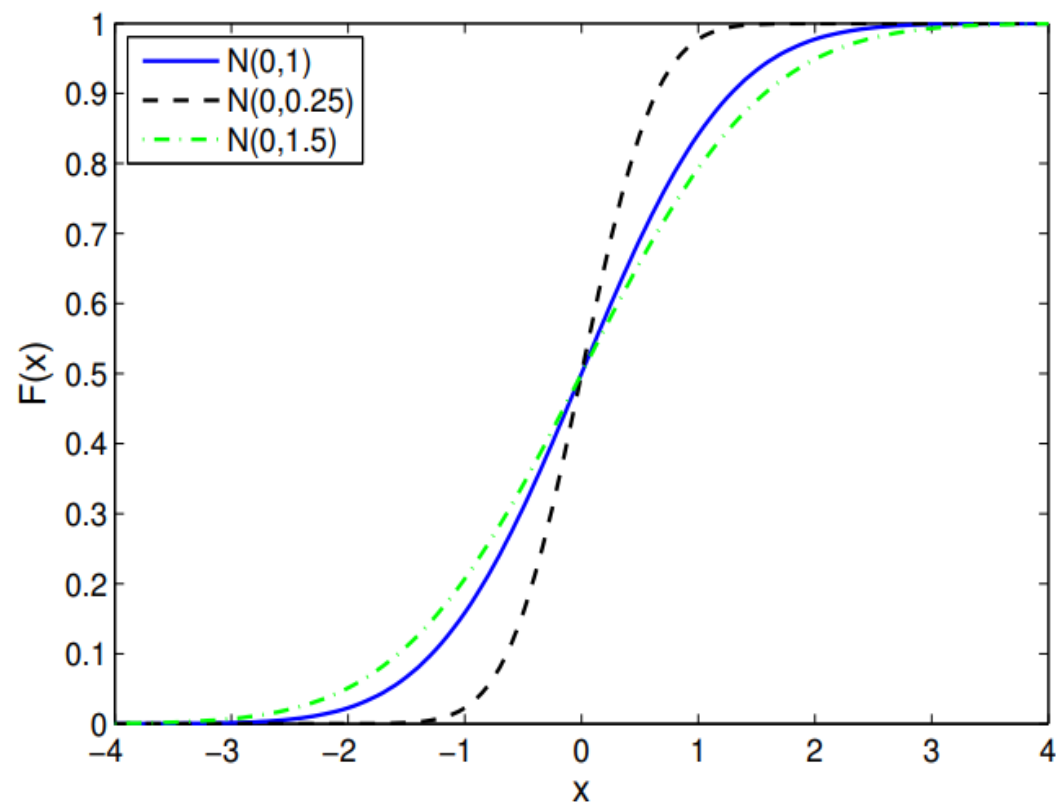
Hustota normálního rozdělení



Hustota normálního rozdělení



Distribuční funkce normálního rozdělení



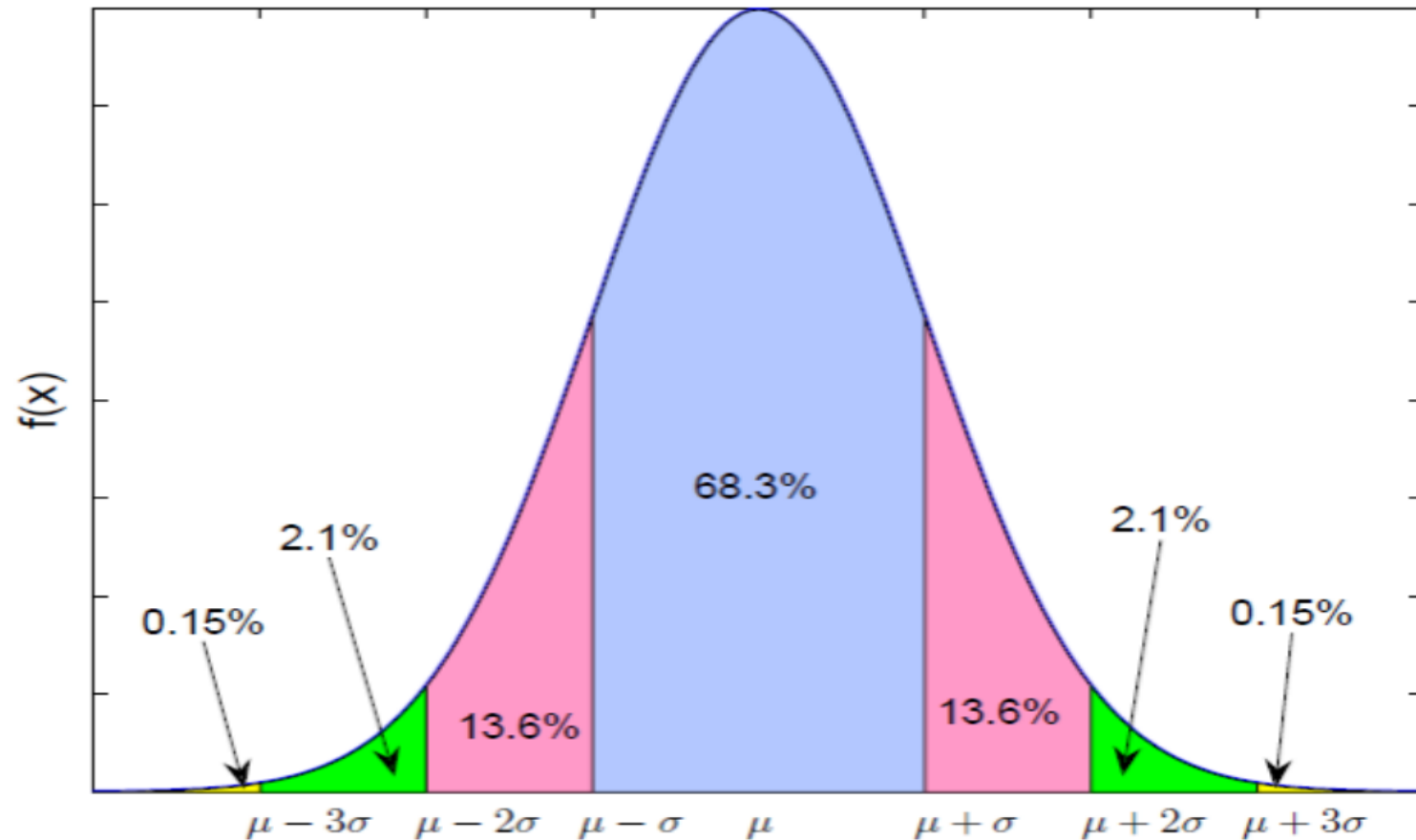
Pravidlo 3 sigma

Pro $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ platí

$$P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] \approx 68,3\%$$

$$P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \approx 95,5\%$$

$$P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] \approx 99,7\%$$



Příklad (IQ testy)

Hodnota IQ se řídí normálním rozdělením $N(100, 15^2)$. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba bude mít

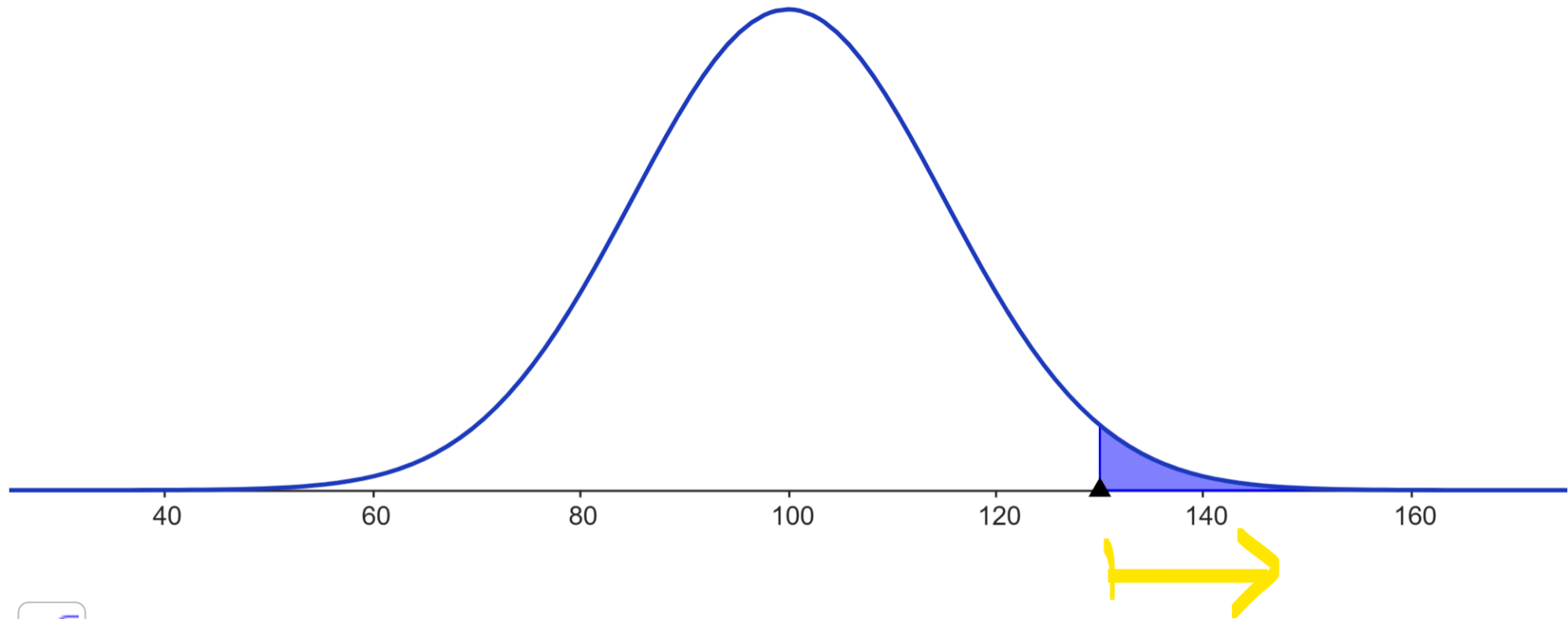
- a) IQ více než 130 bodů,*
- b) IQ méně než 90 bodů,*
- c) IQ v intervalu od 100 do 130 bodů?*

X ... hodnota IQ (v bodech)

$$X \sim N(100, 15^2) \quad P(X > 130) = 1 - P(X \leq 130)$$

Excel: 1-NORM.DIST(130;100;15;1)

$$\mu = 100 \quad \sigma = 15$$



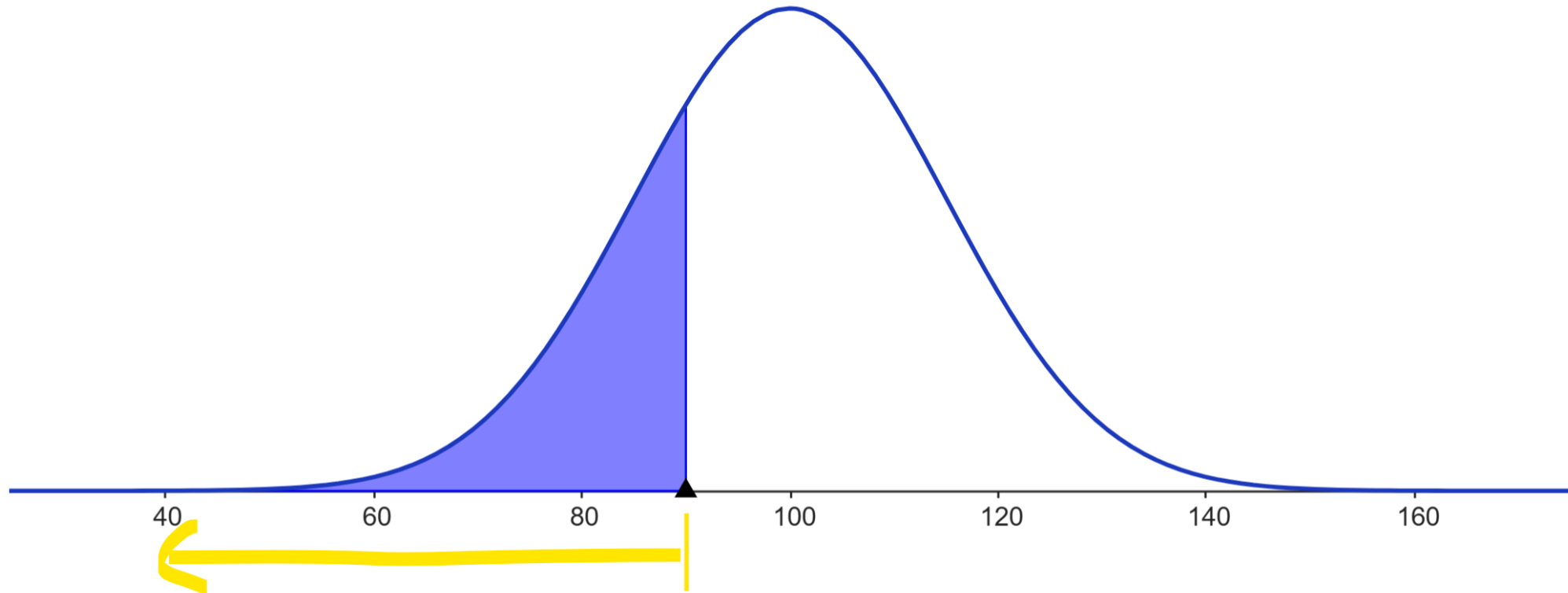
 Normal μ 100 σ 15



$$P(130 \leq X) = 0.0228$$



$$\mu = 100 \quad \sigma = 15$$



Normal ▾

 μ

100

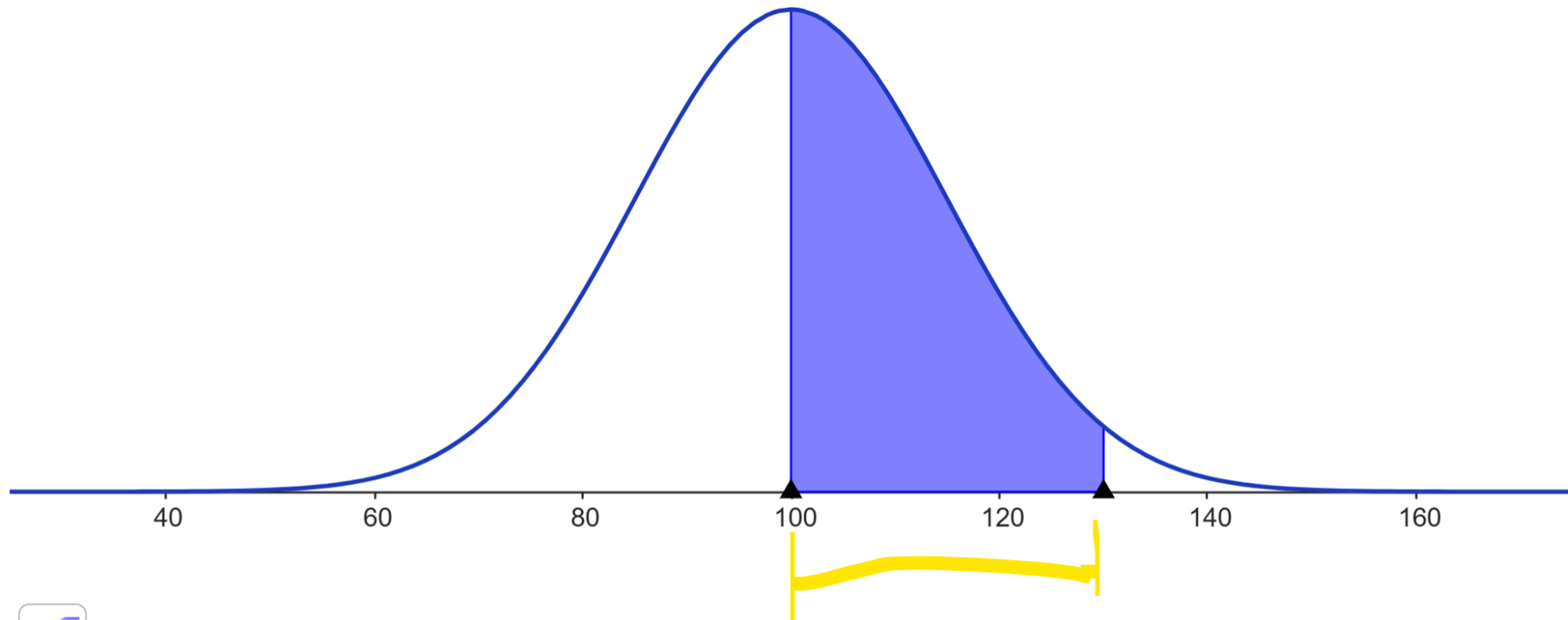
 σ

15



$$P(X \leq 90) = 0.2525$$



$\mu = 100$ $\sigma = 15$ 

Normal ▾

 μ

100

 σ

15



100

 $\leq X \leq 130$ $) = 0.4772$ 

Případová studie: Váha v uhelných skladech

Cíl mise:

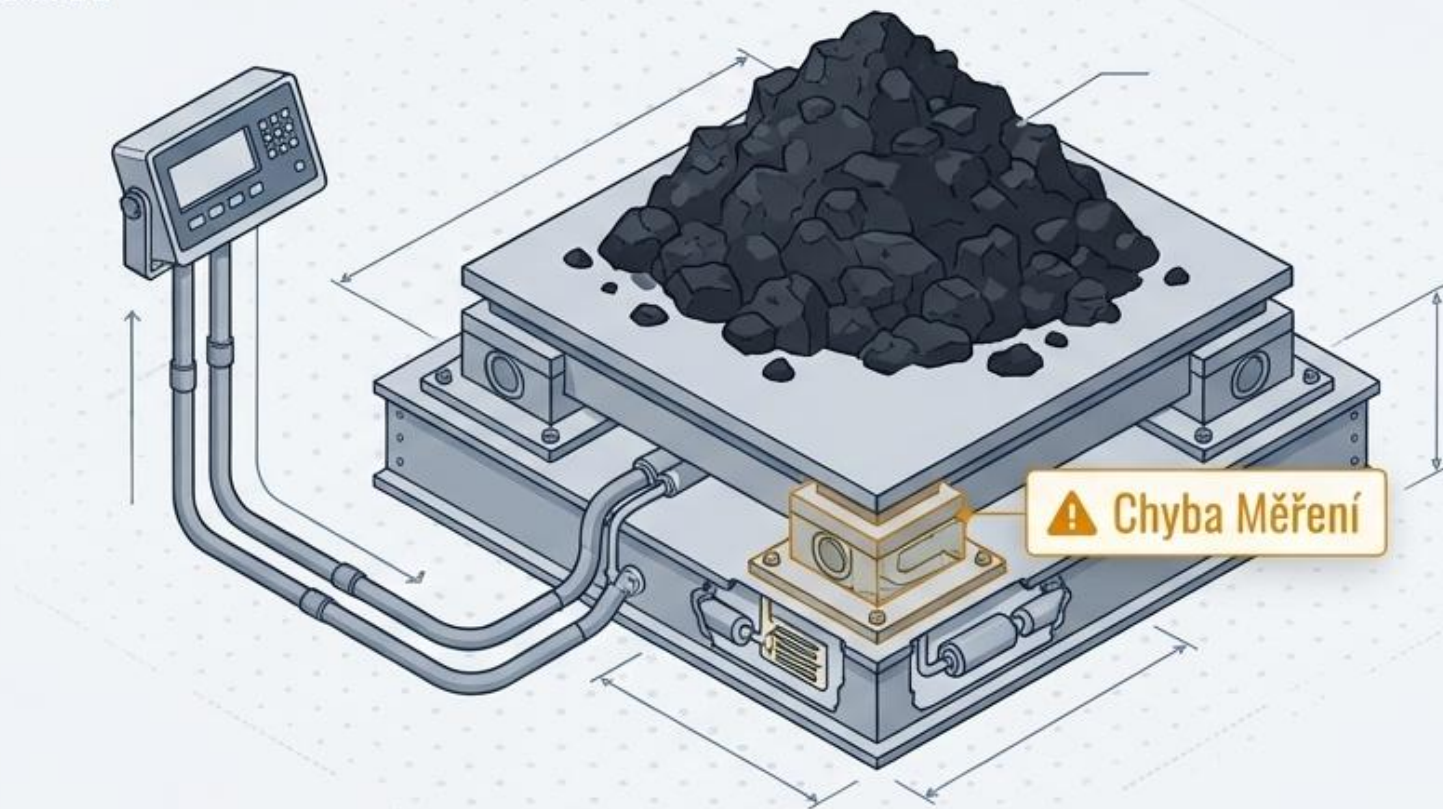
Průmyslová váha váží s chybou.
Snižuje váhu o 30 kg.

Vstupní data:

Náhodné chyby mají normální
rozdělení se směrodatnou
odchylkou $\sigma = 100$ kg.

Taktická otázka:

Jaká je pravděpodobnost, že
chyba zjištěné váhy nepřekročí v
absolutní hodnotě 90 kg?



Výsledek operace:

Po aplikaci standardizovaného normálního rozdělení získáme **přesnou pravděpodobnost: 0,6730 (67,3 %)**.

chyba?

ověřit

Shrnutí mise: Výběr správného nástroje

$U(a, b)$ Rovnoměrné 	$\text{Exp}(\lambda)$ Exponenciální 	$N(\mu, \sigma^2)$ Normální 
Tvar: Obdélník (Symetrický)	Tvar: Klesající křivka (Asymetrická)	Tvar: Zvonovitá křivka (Symetrická)
Použití: Stejná šance napříč intervalem.	Použití: Doba čekání na událost.	Použití: Měření s chybami, přírodní procesy.
Parametry: Mez a, Mez b	Parametry: Intenzita λ	Parametry: Střed μ , Rozptyl σ^2

Výzva splněna: Chaos je nyní predikovatelný



Final debrief

- ➡ Úspěšně jste přešli od prostého počítání diskrétních jevů k měření nekonečných spojitých možností.
- 📈 Pomocí hustoty pravděpodobnosti dokážete odhadnout vývoj dříve nepředvídatelných systémů.
- 📈 Taktické nástroje $U(a, b)$, $\text{Exp}(\lambda)$ a $N(\mu, \sigma^2)$ tvoří základ moderní datové analýzy a strojového učení.

Status týmu: Připravení na nasazení v reálných operacích. 😊