Nejpoužívanější diskrétní rozdělení pravděpodobnosti a jejich základní číselné charakteristiky

XSZD-04-2026

Náhodnou veličinu X jednoznačně určují a plně popisují

- X diskrétní
  - pravděpodobnostní funkce
  - distribuční funkce

- X spojitá
  - hustota
  - distribuční funkce

číselné charakteristiky = shrnutí informací o X do několika čísel, které ji dostatečně charakterizují

Typy číselných charakteristik

Členění dle popisované vlastnosti

- **polohy:** „střed“, kolem kterého jsou koncentrovány hodnoty X
  - střední hodnota
  - modus
  - kvantily
- **variability:** rozptýlenost hodnot X kolem charakteristiky polohy
  - rozptyl
  - směrodatná odchylka
- **šikmost:** tvar rozdělení pravděpodobností (symetrické nebo asymetrické)
- **špičatost:** tvar rozdělení pravděpodobností (špičaté nebo zploštělé)

Střední hodnota $\mathrm{E}(X)$

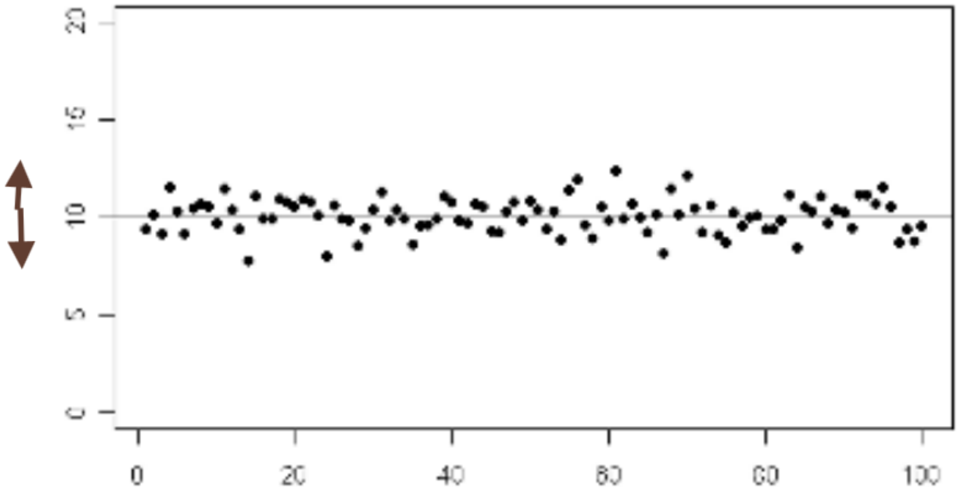
- základní charakteristika polohy
- „střed“ (těžiště), kolem kterého jsou koncentrovány hodnoty X

X diskrétní s oborem hodnot M

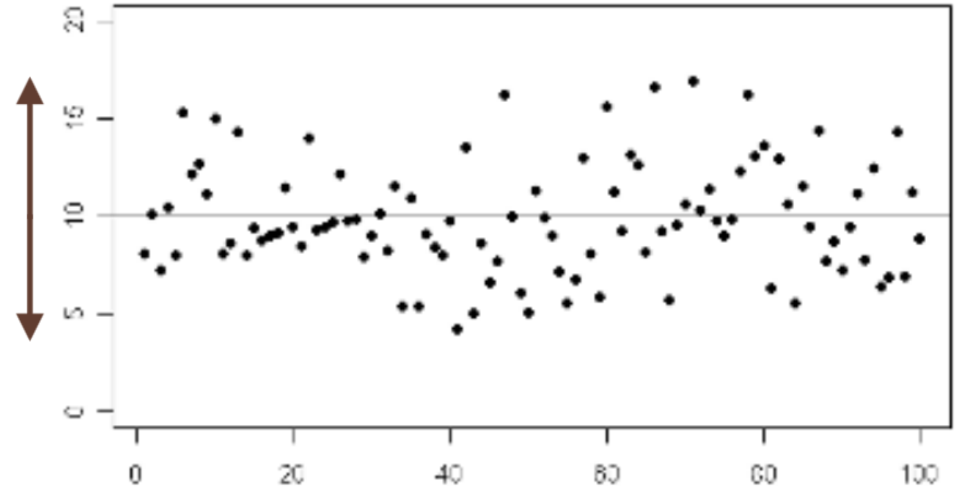
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x_i \in M} x_i \mathrm{P}(X = x_i)$$

X spojitá s hustotou $f(x)$

Charakteristiky variability



- číslo udávající **koncentraci (rozptýlení)** hodnot okolo středu



- charakterizuje měřítko (šířku) rozdělení
- popisuje rozptýlenost hodnot kolem střední hodnoty

Rozptyl

$$D(X) = \mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}(X)\right]^2, \text{ existuje-li } \mathrm{E}(X)$$

Směrodatná odchylka

$$\sqrt{D(X)}$$

Modus $\hat{x}$

- charakteristika polohy
- X diskrétní: nejpravděpodobnější hodnota
- X spojitá: bod x, ve kterém hustota pravděpodobností $f(x)$ nabývá lokálního maxima

Základní diskrétní rozdělení pravděpodobností

- Alternativní rozdělení
- Binomické rozdělení
- Hypergeometrické rozdělení
- Diskrétní rovnoměrné rozdělení
- Poissonovo rozdělení

Alternativní rozdělení $X \sim \mathrm{Alt}(p)$

Model: **pokus**, ve kterém nastávají pouze **2 různé (dichotomické) výsledky** a sledujeme, co nastane

- indikátor náhodného jevu (jev nastal/nenastal)
- pravdivostní hodnota výroku (pravda/lež)
- úspěšnost pokusu (úspěch/neúspěch)
- kvalita výrobku (vadný/ bez chyby)
- ...

Parametr rozdělení

- p ... pravděpodobnost úspěchu

Alternativní rozdělení $X \sim \mathrm{Alt}(p)$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{úspěch} \\ 0 & \text{neúspěch} \end{cases}$$

Pravděpodobnostní funkce

$$\mathrm{P}(X = 1) = p, \quad \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p, \quad p \in (0, 1)$$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = p, \quad D(X) = p(1 - p), \ \sigma_X = \sqrt{p(1 - p)}$$

Binomické rozdělení $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$

Model: **počet úspěchů**, které nastanou při provedení n **nezávislých dichotomických pokusů**

Příklady

- počet děvčat v rodině s n dětmi
- počet zmetků mezi n výrobky
- počet úspěšných zkoušek přístroje z celkem n zkoušek

Parametry rozdělení

- n . . . počet nezávislých dichotomických pokusů
- p . . . pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu

Binomické rozdělení $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$

Pravděpodobnostní funkce (Bernoulliho schéma)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, \dots, n, \quad n \geq 1, \; p \in (0, 1)$$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p), \quad \sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$$

Excel: BINOM.DIST(k;n;p;logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $P(X = k)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(k)$

Příklad (Barva květů hrachu)

Je křížen bělokvětý hrách s fialovým, přičemž předpokládáme, že rostliny, na nichž je pokus prováděn, nebyly dosud kříženy. Podle pravidel dědičnosti lze očekávat, že $\frac{3}{4}$ nově vzniklých rostlin (potomků) pokvetou fialově a $\frac{1}{4}$ bíle. Zatím vzklíčilo 10 nových rostlin. ***Jaká je pravděpodobnost, že 9 pokvete fialově?***

Řešení

X ... počet fialově kvetoucích rostlin z 10 rostlin

$$X \sim \mathrm{Bi}(10; 0{,}75)$$

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} 0{,}75^9 0{,}25^1 = 0{,}188$$

Excel: BINOM.DIST(9;10;3/4;0)

Hypergeometrické rozdělení $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$

Model: počet úspěchů, které nastanou při provedení n **závislých dichotomických pokusů** (výběr bez vracení)

Příklady

- počet vybraných zmetků, vybíráme-li n výrobků z N výrobků, přičemž M z nich jsou zmetky
- počet vybraných nenaučených otázek, losujeme-li n otázek z N, přičemž na M z nich nejsme naučeni

Parametry rozdělení

- n ... počet vybraných jednotek (závislých dichotomických pokusů)
- N ... počet všech jednotek
- M ... počet jednotek, které mají sledovanou vlastnost

Hypergeometrické rozdělení $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$

Pravděpodobnostní funkce

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \; k = 0, \dots, n, \quad N \geq n \geq 1, \; 0 \leq M \leq N$$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = \frac{n \cdot M}{N}, \quad D(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Excel: HYPGEOM.DIST(k;n;M;N;logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $P(X = k)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(k)$

Příklad (Vadné výrobky)

Mezi 100 výrobky je 20 zmetků. Vybereme 10 výrobků a sledujeme počet zmetků mezi vybranými výrobky. ***Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali právě 3 zmetky?***

Řešení

X ... počet vybraných zmetků

$N = 100,\ M = 20,\ n = 10$

$$X \sim \mathrm{Hg}(100; 20; 10)$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{20}{3}\binom{80}{7}}{\binom{100}{10}} = 0{,}209$$

Excel: HYPGEOM.DIST(3;10;20;100;0)

Diskrétní rovnoměrné rozdělení $X \sim \mathrm{Ro}(n)$

Model: **pokus**, který má n **různých výsledků**, které jsou **stejně pravděpodobné** a sledujeme, co nastane

Příklady

- hod pravidelnou kostkou $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(i) = \frac{1}{6}$
- hod férovou mincí $M = \{0, 1\}$, $p(i) = \frac{1}{2}$
- padnutí čísla v ruletě v Monte Carlo $M = \{0, 1, 2, \ldots, 36\}$, $p(i) = \frac{1}{37}$
- padnutí čísla v ruletě v Las Vegas $M = \{0, 00, 1, 2, \ldots, 36\}$, $p(i) = \frac{1}{38}$

Pravděpodobnostní funkce

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{1}{n}, \; x = 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Poissonovo rozdělení $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$

Model: **počet událostí**, které nastanou při provedení **velkého počtu nezávislých dichotomických pokusů**, přičemž **pravděpodobnost** vzniku události **je velmi malá**

- výskyt jevu v daném časovém/prostorovém intervalu nezávisí co se stalo jindy/jinde
- v daném okamžiku/bodě nemohou nastat 2 jevy současně
- pro každý časový okamžik/bod je pravděpodobnost výskytu jevu v malém časovém/prostorovém intervalu stejná
- λ . . . intenzitu výskytu události za jednotku času/délky/objemu

Příklady

- # částic emit. za jedn. času radioaktivní látkou dané hmotnosti
- # signálů, které dojdou do telefonní ústředny za jednotku času
- # jednob. organizmů na ploše velikosti t v zorném poli mikroskopu
- # dopravních nehod za jednotku času
- # typografických chyb na stránce
- # volných dnů ve firmě během měsíce

Poissonovo rozdělení $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$

Pravděpodobnostní funkce

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \; k = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0$$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad \sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

Excel: POISSON.DIST(k;λ;logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $P(X = k)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(k)$

Příklad (Poruchy obráběcího stroje)

Při práci obráběcího stroje dochází náhodně k výpadkům. Průměrně jsou 2 výpadky za 24 hodin.

a) ***Jaká je pst, že za 24 hodin dojde alespoň k jednomu výpadku?***

b) *Jaká je pst, že za týden nebudou více než 3 výpadky?*

Řešení

X ... počet výpadků za 1 den

$$\text{průměrně 2 výpadky za 24 hodin} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

$$X \sim \mathrm{Po}(2)$$

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X < 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - e^{-2} = 0{,}865$$

Excel: 1-POISSON.DIST(0;2;0)

Příklad (Poruchy obráběcího stroje)

Při práci obráběcího stroje dochází náhodně k výpadkům. Průměrně jsou 2 výpadky za 24 hodin.

a) *Jaká je pst, že za 24 hodin dojde alespoň k jednomu výpadku?*

b) ***Jaká je pst, že za týden nebudou více než 3 výpadky?***

Řešení

Y ... počet výpadků za 1 týden

$$\begin{aligned} & \text{průměrně 2 výpadky/24 hodin} \\ \Leftrightarrow\quad & \text{průměrně } 2 \cdot 7 = 14 \text{ výpadků/týden} \end{aligned}$$

$$Y \sim \mathrm{Po}(14)$$

$$\mathrm{P}(Y \leq 3) = e^{-14}\left(1 + 14 + \frac{14^2}{2!} + \frac{14^3}{3!}\right) = 0{,}000474$$

Excel: POISSON.DIST(3;14;1)