

Závislé opakované pokusy

P1ZST-03-2026

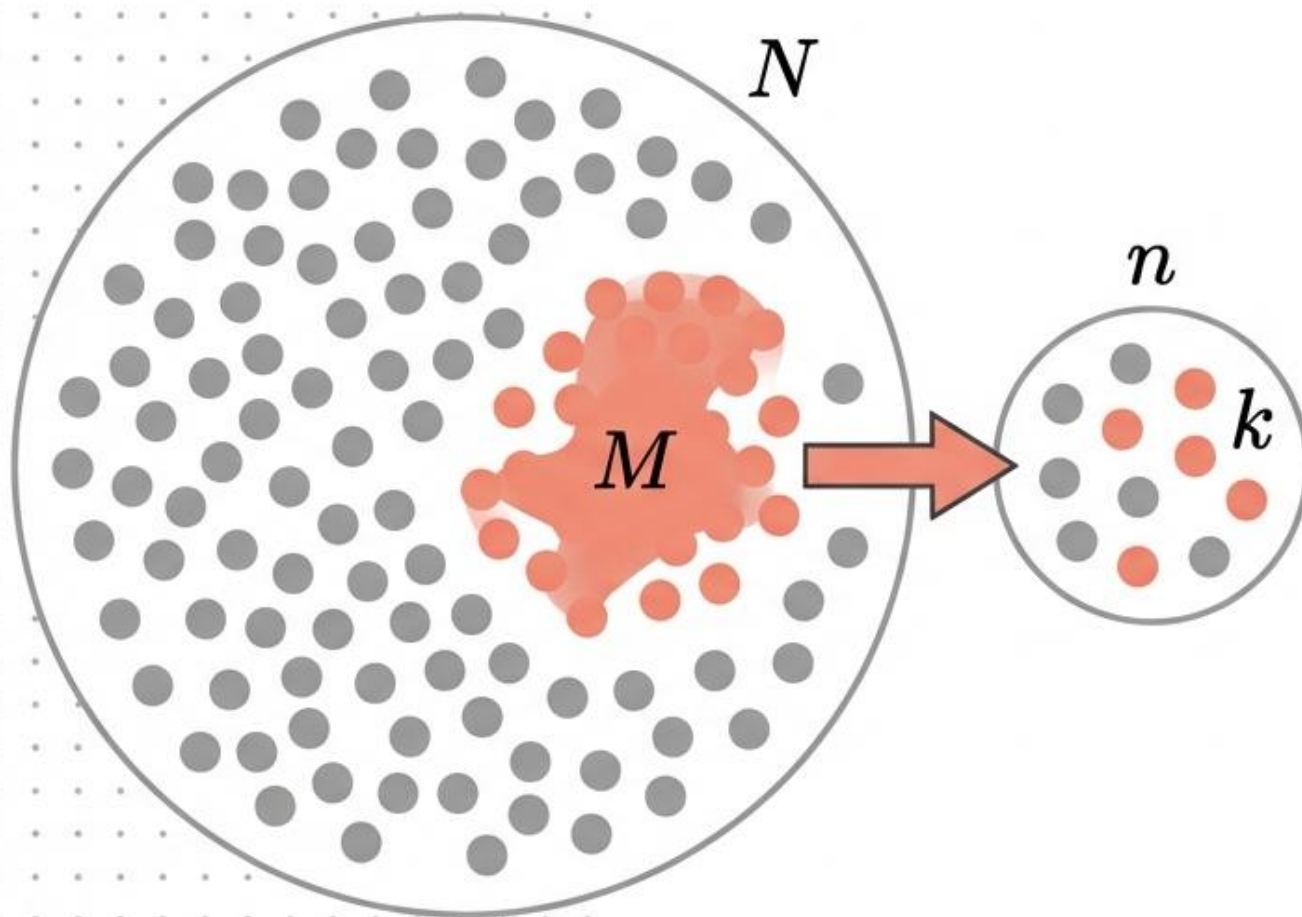


Závislé opakované pokusy

Teorie, logika a praktické příklady z pravděpodobnosti.

Parametry modelu

Definice proměnných pro hypergeometrické rozdělení.



- N : Celkový počet prvků v souboru (Populace)
- M : Počet prvků se sledovanou vlastností (Počet úspěchů v populaci)
- n : Počet prvků, které vybíráme (Velikost výběru)
- k : Počet úspěchů ve výběru (Hledaná hodnota)

Hypergeometrické rozdělení



Úspěchy: Z M úspěšných
vybíráme k .

Neúspěchy: Ze zbytku $(N - M)$
vybíráme zbytek do počtu n .

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N - M}{n - k}}{\binom{N}{n}}$$

Celek: Celkový počet možných
kombinací výběru n z N .

Příklad 1: Koule v osudí



Scenario:

V osudí jsou 2 bílé a 3 černé koule.
Celkem 5 koulí.

Task:

Určete pravděpodobnost, že vytáhneme 3 koule a budou mezi nimi **2 černé a 1 bílá**.

Variables:

- $N = 5$ (Celkem)
- $M = 3$ (Černé = sledovaná vlastnost)
- $n = 3$ (Vybíráme)
- $k = 2$ (Chceme černé)

Řešení příkladu s osudím

1. Čítatel (Možnosti výběru)

$$\binom{3}{2} \times \binom{2}{1} = 3 \times 2 = 6$$

← 2 černé ze 3
← 1 bílá ze 2

2. Jmenovatel (Všechny kombinace)

$$\binom{5}{3} = 10$$

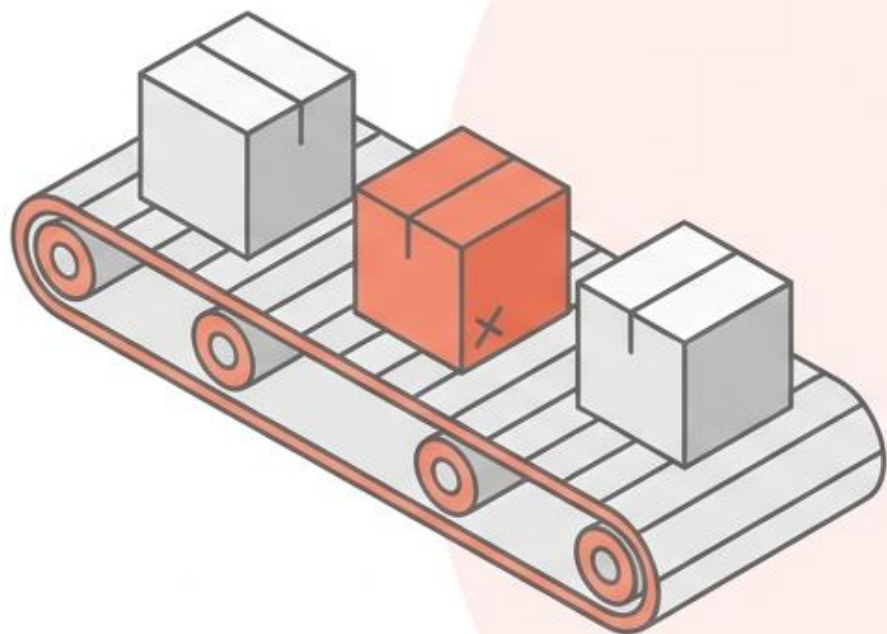
← 3 koule z 5

3. Výsledek

$$P(X = 2) = \frac{6}{10} = 0,6$$

60 %

Aplikace v praxi: Kontrola kvality



Scenario: Mezi 15 výrobky je 5 zmetků (vadných kusů). Vybereme náhodně 3 výrobky ke kontrole.

Otázka: Jaká je pravděpodobnost, že **právě jeden** z nich je vadný?

- $N = 15$ (Výroba)
- $M = 5$ (Zmetky)
- $n = 3$ (Vzorek)
- $k = 1$ (Hledáme)

Výpočet pravděpodobnosti zmetku

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}}$$

- $\binom{5}{1} = 5$ (jeden vadný z pěti)
- $\binom{10}{2} = 45$ (dva dobré z deseti)
- $\binom{15}{3} = 455$ (tři z patnácti)

$$\frac{5 \cdot 45}{455} = \frac{225}{455} \approx 0,4945$$

Pravděpodobnost je **49,45 %**

Výběr bez vracení - příklady

Máme 50 výrobků, mezi nimiž je 8 nekvalitních. Náhodně vybereme 10 výrobků, přičemž vybrané výrobky nevracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bude přesně 6 dobrých výrobků?

Řešení

Použijeme hypergeometrické rozdělení, kde:

- Celkový počet výrobků: $N = 50$
- Počet kvalitních výrobků: $K = 50 - 8 = 42$
- Počet vybraných výrobků: $n = 10$
- Počet dobrých výrobků ve výběru: $k = 6$

Pravděpodobnostní vzorec pro hypergeometrické rozdělení je:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Výběr bez vracení - příklady

Dosadíme hodnoty:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{42}{6} \binom{8}{4}}{\binom{50}{10}}$$

Nyní spočítáme pravděpodobnost.

Výsledek

Pravděpodobnost, že mezi 10 vybranými výrobky bude **přesně 6 dobrých**, je přibližně **0,0357** (tedy **3,57 %**).

Výběr bez vracení - příklady

Příklad 2.10. Při slosování sportky je z osudí postupně vylosováno 6 čísel ze 49. Po vylosování těchto čísel je ze zbývajících 43 čísel vylosováno dodatkové číslo. Při správném tipování:

- a) šesti čísel získává sázející výhru 1. pořadí,
- b) pěti čísel a dodatkového čísla ($5 + 1$) získává sázející výhru 2. pořadí,
- c) pěti čísel získává sázející výhru 3. pořadí,
- d) čtyř čísel získává sázející výhru 4. pořadí,
- e) tří čísel získává sázející výhru 5. pořadí.

Vypočítejte pravděpodobnost, se kterou při vsazeném jednom sloupci vyhražete v 1. tahu výhry a) až e).

Výběr bez vracení - příklady

Řešení: ad a) Pravděpodobnost uhodnutí všech 6 čísel:

$$P(6 \text{ čísel}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816}.$$

ad b) Pravděpodobnost uhodnutí 5 čísel a dodatkového čísla:

$$P(5 + 1 \text{ číslo}) = \frac{\binom{6}{5} \times \binom{1}{1} \binom{42}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{13\,983\,816}.$$

ad c) Pravděpodobnost uhodnutí 5 čísel:

$$P(5 \text{ čísel}) = \frac{\binom{6}{5} \times \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13\,983\,816}.$$

Výběr bez vracení - příklady

Příklad 2.9: Vytáhneme 10 karet. Šance na alespoň 3 esa?

1. Rozklad

Alespoň 3 esa = (Přesně 3 esa) + (Přesně 4 esa)

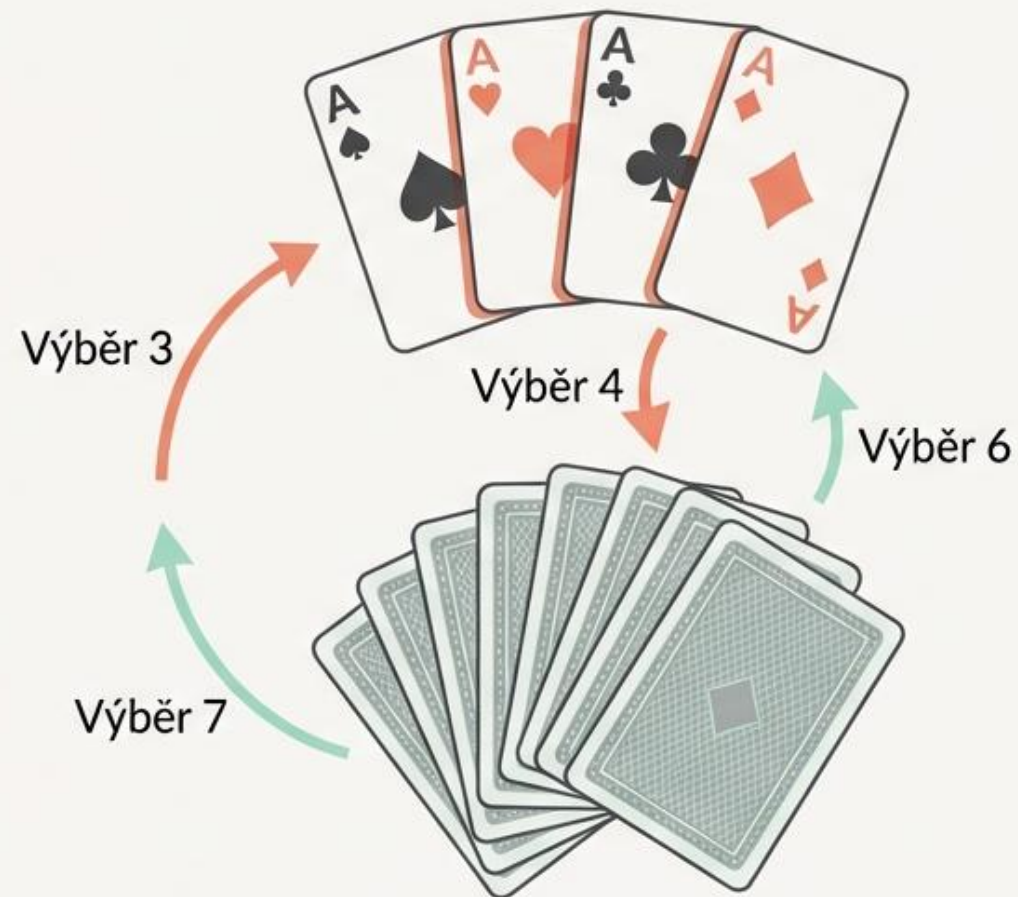
2. Výpočet

$$P(3 \text{ esa}) = \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{7} / \binom{52}{10}$$

$$P(4 \text{ esa}) = \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{6} / \binom{52}{10}$$

} → Výsledek

3. Sečtení



Srovnání: Nezávislé vs. Závislé pokusy

Binomické rozdělení



Výběr **s vracením**.

Pravděpodobnost p je konstantní.

Velké populace, stabilní procesy.

Hypergeometrické rozdělení



Výběr **bez vracení**.

Pravděpodobnost se mění s každým tahem.

Malé soubory (konečné množiny).