

Pravděpodobnost jevů

P1ZST-02-2026

Svět nejistoty: Náhoda vs. Jistota



Náhodný pokus (Definice 2.1):

Opakovatelný proces, jehož výsledek nelze předem jednoznačně určit.



Náhodný jev (Definice 2.2):

Podmnožina možných výsledků. To, co nás zajímá.

I když jsou podmínky stejné, výsledek se může lišit.

Základní pojmy

Náhodný pokus

- Proces, jehož výsledek **není jistý** a může nabývat různých hodnot v závislosti na náhodě.
- Lze jej **opakovat za stejných podmínek**, ale výsledek se může pokaždé lišit.
- **Příklad:**
- **Hod kostkou** – nevíme, jaké číslo padne.
- **Losování míčku z osudí** – výsledek je náhodný.
-  **Souhrn:** Výsledky náhodného pokusu tvoří množinu *možných výsledků*, kterou nazýváme **prostor elementárních jevů**.

Základní pojmy

Náhodný jev

- Podmnožina prostoru elementárních jevů, která zahrnuje **jeden nebo více možných výsledků** náhodného pokusu.
- **Jev nastává**, pokud výsledek pokusu patří do této podmnožiny.
- **Příklad:**
- **Hod kostkou:** definujeme jev A jako „padne sudé číslo“.
- Možné výsledky tohoto jevu: $A = \{2, 4, 6\}$,
-  **Souhrn:** Náhodný jev je výběr výsledků, které odpovídají určité podmínce.

Druhy jevů: Slovníček náhody

Jev jistý ($P = 1$)

Nastane vždy.



Padne číslo < 7

Jev nemožný ($P = 0$)

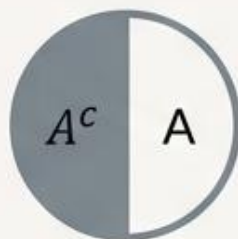
Nenastane nikdy.



Padne číslo 7

Jev opačný (A^c)

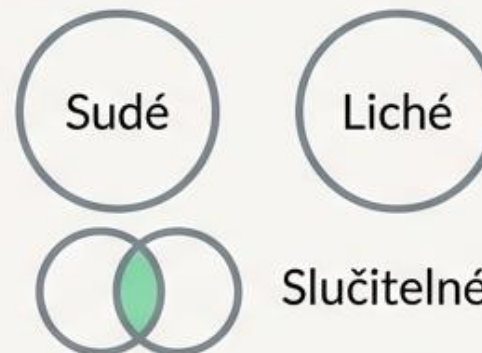
Vše, co není A.



Padne 6 vs. Padne 1-5

Neslučitelné jevy

Nemohou nastat současně.



Slučitelné

Druhy náhodných jevů

- **1 Jistý jev**
- Nastane vždy, obsahuje všechny možné výsledky náhodného pokusu.
- Pravděpodobnost: **1**
- **Příklad:** Při hodu kostkou je jistý jev, že padne číslo mezi 1 a 6.
- $P(J)=1$

Druhy náhodných jevů

- **2** Nemožný jev
- Nikdy nenastane, neobsahuje žádný výsledek pokusu.
- Pravděpodobnost: **0**
- **Příklad:** Při hodu kostkou je nemožný jev, že padne číslo 7.
- $P(\emptyset)=0$

Druhy náhodných jevů

- **3** Elementární jev

- Obsahuje **právě jeden** možný výsledek pokusu.

- **Příklad:** Při hodu kostkou je elementární jev A , že padne číslo 3.

- $A=\{3\}$

- **4** Složený jev

- Obsahuje **více než jeden** možný výsledek pokusu.

- **Příklad:** Při hodu kostkou může být složený jev B , že padne sudé číslo.

- $B=\{2,4,6\}$

Druhy náhodných jevů

- **5 Opačný jev (doplňěk jevu)**
- Nastane tehdy, když nenastane zadaný jev.
- **Příklad:** Pokud jev A znamená, že padne číslo 3, pak opačný jev A^c znamená, že padne jakékoli jiné číslo.
- $A^c = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

Druhy náhodných jevů

- **6 Neslučitelné (disjunktní) jevy**

- Nemohou nastat současně (nemají žádný společný výsledek).
- **Příklad:** Při hodu kostkou jsou neslučitelné jevy A (padne sudé číslo) a B (padne liché číslo).

- $A \cap B = \emptyset$

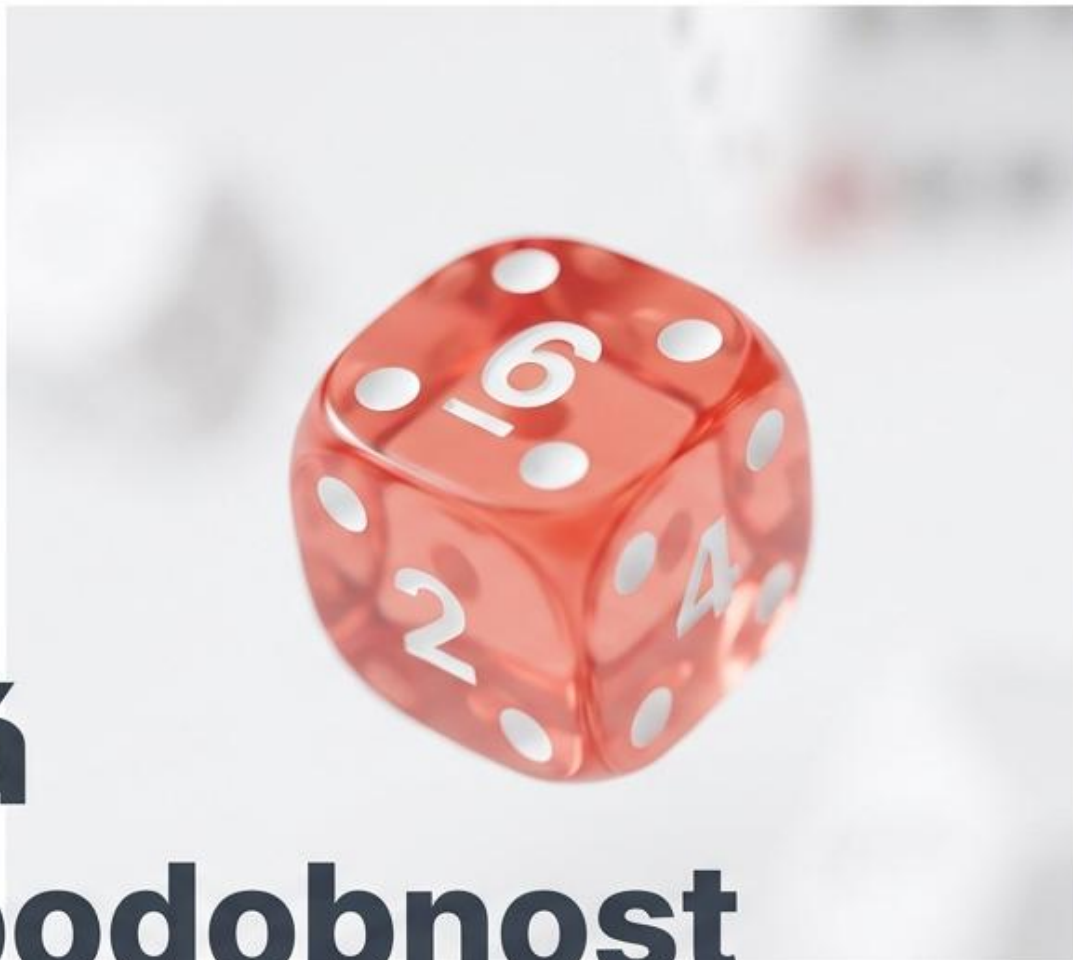
- **7 Slučitelné jevy**

- Mohou nastat současně (mají alespoň jeden společný výsledek).
- **Příklad:** Při hodu kostkou jsou slučitelné jevy A (padne číslo menší než 4) a B (padne sudé číslo).

- $A \cap B = \{2\}$

Klasická pravděpodobnost

Jak změřit náhodu a spočítat nespočítatelné



Zlatý vzorec: Klasická definice



$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m = Počet příznivých výsledků

n = Celkový počet možných výsledků



Platí pouze, pokud jsou všechny výsledky **stejně pravděpodobné!**

Klasická pravděpodobnost - předpoklady

1. **Konečný počet možných výsledků:** Předpokládá se, že jev má konečný počet možných výsledků (elementárních jevů), které jsou všechny jasně definovány a lze je spočítat.
2. **Stejná pravděpodobnost všech výsledků:** Každý z možných výsledků je stejně pravděpodobný. To znamená, že žádný výsledek není preferován nebo diskriminován, což je klíčový předpoklad této definice. Například při hodu férovou kostkou má každá strana stejnou šanci padnout.
3. **Určitelnost jevů:** Všechny možné výsledky (elementární jevy) jsou dopředu známy a lze je spočítat. V praxi to znamená, že prostor elementárních jevů je jasně definovaný a každý výsledek je předem určitelný.
4. **Nezávislost pokusů:** Pokud klasickou pravděpodobnost aplikujeme na opakované pokusy (např. hody kostkou), předpokládá se, že jednotlivé pokusy jsou na sobě nezávislé – výsledek jednoho pokusu neovlivňuje výsledky dalších pokusů.

Klasická pravděpodobnost - příklady

Příklad 2.10. Při slosování sportky je z osudí postupně vylosováno 6 čísel ze 49.

- a) šesti čísel získává sázející výhru 1. pořadí,

Řešení: ad a) Pravděpodobnost uhodnutí všech 6 čísel:

$$P(6 \text{ čísel}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816}.$$

Příklad: Hod dvěma kostkami

Otázka: S jakou pravděpodobností padne součet 6?

n (Celkem) = $6 \times 6 = 36$ možností.

m (Příznivé) = Součet je 6 (1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1) = 5 možností.

Výsledek: $P(A) = \frac{5}{36} \approx 13,9 \%$

		Kostka 1					
		1	2	3	4	5	6
Kostka 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

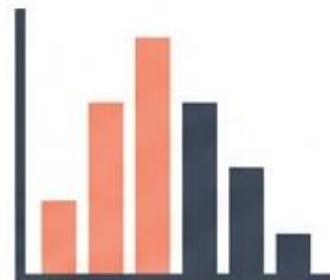
Kdy klasická pravděpodobnost nestačí?



Geometrická pravděpodobnost

Nekonečno možností (spojitý prostor).
Příklad: Zásah do terče.

$$P(A) = \frac{\text{Plocha } A}{\text{Plocha } \Omega}$$



Statistická pravděpodobnost

Neznámá struktura.
Vycházíme z minulých dat (relativní četnost).

Geometrická pravděpodobnost

1 Definice

- Pravděpodobnostní model, kde se pravděpodobnost určuje jako **poměr dvou délek, ploch nebo objemů**.
- Používá se v situacích, kde **náhodný pokus závisí na kontinuu** (čase, délce, ploše, objemu).

2 Matematický zápis

$$P(A) = \frac{\text{velikost příznivé oblasti}}{\text{velikost celkové oblasti}}$$

Geometrická pravděpodobnost

Příklad 2.12. Jak je pravděpodobné, že meteorit padne na pevninu, víme-li, že pevnina má rozlohu 149 milionů km^2 a moře 361 milionů km^2 ?

Řešení: Celková plocha povrchu Země je:

$$S = 149 + 361 = 510 \text{ milionů km}^2.$$

Pravděpodobnost, že meteorit padne na pevninu, je dána podílem rozlohy pevniny a celkové rozlohy povrchu Země:

$$P(\text{pevnina}) = \frac{149}{510} \approx 0.2922.$$

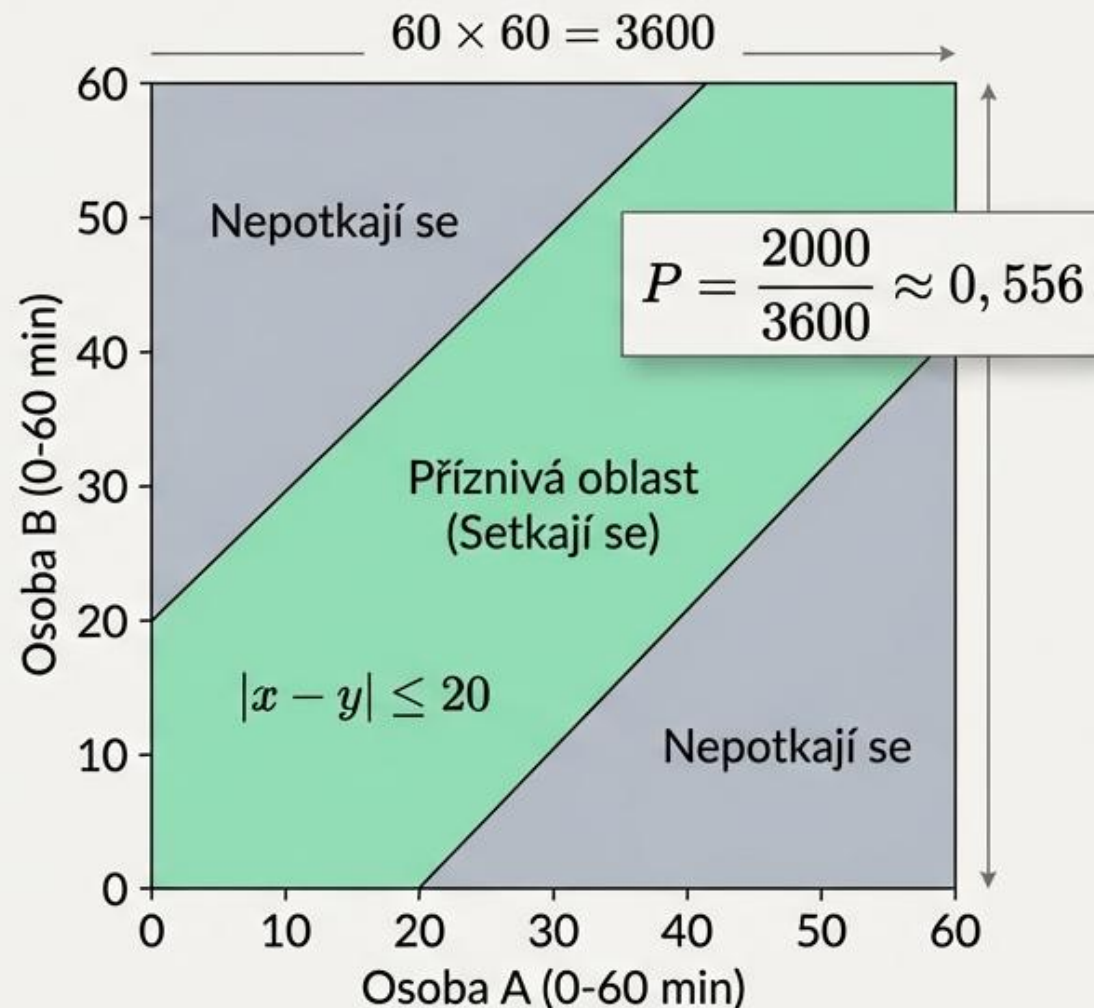
Geometrická pravděpodobnost

Když nelze počítat kusy, měříme plochu.



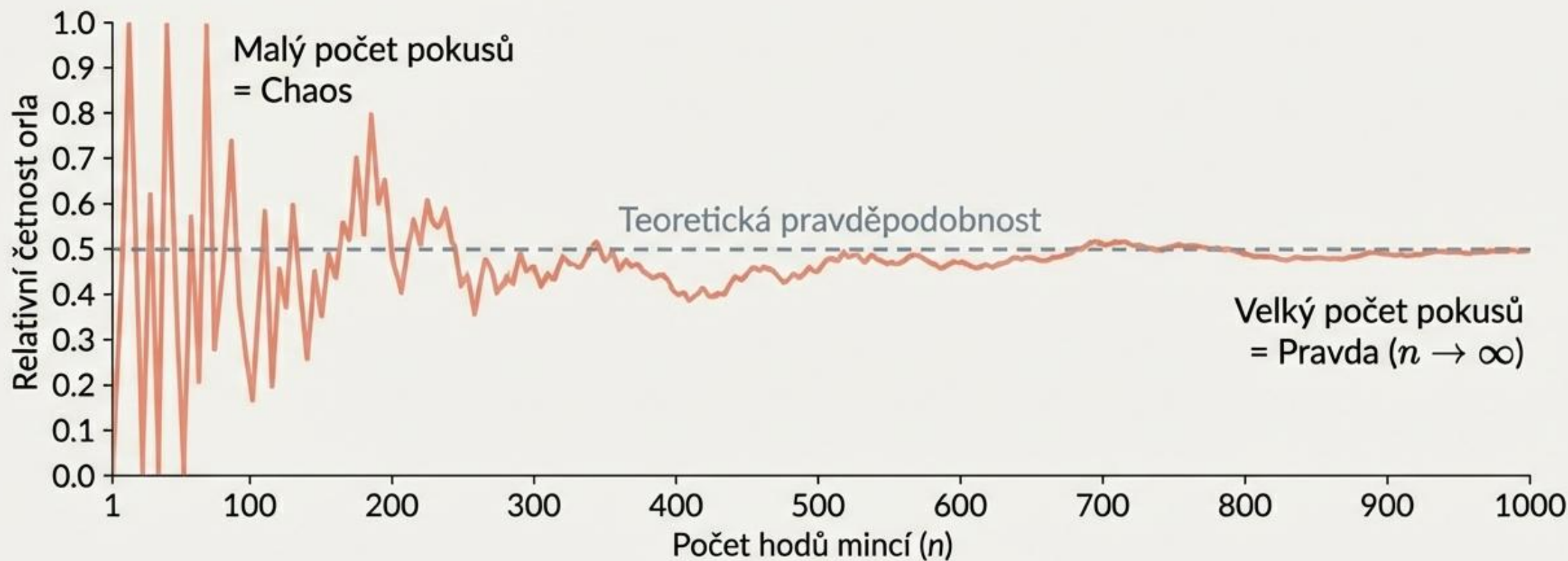
$$P(A) = \frac{\text{Velikost příznivé oblasti}}{\text{Velikost celkové oblasti}}$$

Příklad: Setkání mezi 12:00 a 13:00.
Čekají na sebe max. 20 minut.



Statistická pravděpodobnost

Učení se ze zkušenosti (Relativní četnost)



$$\text{Formula: } P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

Statistická pravděpodobnost

Definice 2.15. Statistickou pravděpodobnost definujeme jako relativní četnost, s jakou určitý jev nastává v dlouhodobém opakování experimentu. Její výpočet se odvozuje z pozorovaných dat a lze ji vyjádřit vztahem

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Počet výskytů jevu } A}{\text{Celkový počet pokusů}}.$$

Statistická pravděpodobnost - předpoklady

1. **Opakovatelnost experimentu:** Pokus, při kterém je zkoumán jev, lze opakovat za stejných podmínek mnohokrát.
2. **Stabilní výsledky při velkém počtu pokusů:** S narůstajícím počtem pokusů se relativní četnost výskytu daného jevu stabilizuje a blíží se určité hodnotě. Tato hodnota je považována za pravděpodobnost jevu.
3. **Nezávislost pokusů:** Jednotlivé pokusy jsou na sobě nezávislé, což znamená, že výsledek jednoho pokusu nemá vliv na výsledky dalších pokusů.
4. **Dostatečně velký počet pokusů:** Statistická pravděpodobnost má smysl pouze v situacích, kdy je k dispozici velký počet pokusů nebo měření. Relativní četnost se totiž stabilizuje až po dostatečně velkém počtu opakování.

Statistická pravděpodobnost - aplikace

1 Diskrétní konečná situace

- Počet možných výsledků je **konečný** (např. hod kostkou).
- Pravděpodobnost lze odhadnout z relativních četností v řadě pokusů.
- **Příklad:** Při 100 hodech kostkou se počet šestek může stabilizovat kolem hodnoty $\frac{1}{6}$.

Statistická pravděpodobnost - aplikace

2 Diskrétní nekonečná situace

- Počet možných hodnot je **nekonečný**, ale hodnoty jsou **diskrétní** (např. počet zákazníků denně).
- Model se zaměřuje na **odhady pravděpodobností jednotlivých hodnot nebo intervalů**.
- **Příklad:** Pravděpodobnost, že do obchodu přijde přesně **10 zákazníků** nebo **více než 50**.

Statistická pravděpodobnost - aplikace

3 Spojitá situace

- Náhodná veličina nabývá **spojitých hodnot** (např. výška člověka).
- Pravděpodobnost, že veličina nabude přesné hodnoty, je **prakticky nulová**.
- Pracuje se s pravděpodobností **spadnutí do určitého intervalu**.
- **Příklad:** Pravděpodobnost, že výška člověka bude mezi **170 a 175 cm**.

Statistická pravděpodobnost - příklady

Příklad 2.16 (spojitý případ). Sledujeme dobu, po kterou se zákazníci zdržují v obchodě. Čas pobytu byl zaznamenán a rozdělen do intervalů o délce 5 minut. Data o četnostech pro jednotlivé intervaly jsou shrnuta v následující tabulce:

Tab. 1: Četnosti zdržení se zákazníků v obchodě (intervaly 5 minut)

Interval (min)	Četnost
0-5	77
5-10	83
10-15	25
15-20	15
Celkem	200

Určete jednotlivé statistické pravděpodobnosti.

Statistická pravděpodobnost - příklady

Řešení: Z tabulky je zřejmé, že celkem bylo sledováno 200 zákazníků. Nyní spočítáme statistické pravděpodobnosti pro jednotlivé intervaly na základě relativních četností.

- $P(0-5 \text{ minut}) = \frac{77}{200} = 0,385,$
- $P(5-10 \text{ minut}) = \frac{83}{200} = 0,415,$
- $P(10-15 \text{ minut}) = \frac{25}{200} = 0,125,$
- $P(15-20 \text{ minut}) = \frac{15}{200} = 0,075.$

Podmíněná pravděpodobnost

Jak nová informace mění šance.

Notation:

$P(A|B)$ = Pravděpodobnost A,
pokud víme, že nastalo B.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Nezávislé jevy

Jeden neovlivňuje druhý.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Test nezávislosti: Změní znalost jevu A můj odhad pro B? Pokud NE → **Nezávislé**.
Pokud AN → **Neslučitelné**.

Nezávislé



Mince neví, co padlo na kostce.

Závislé

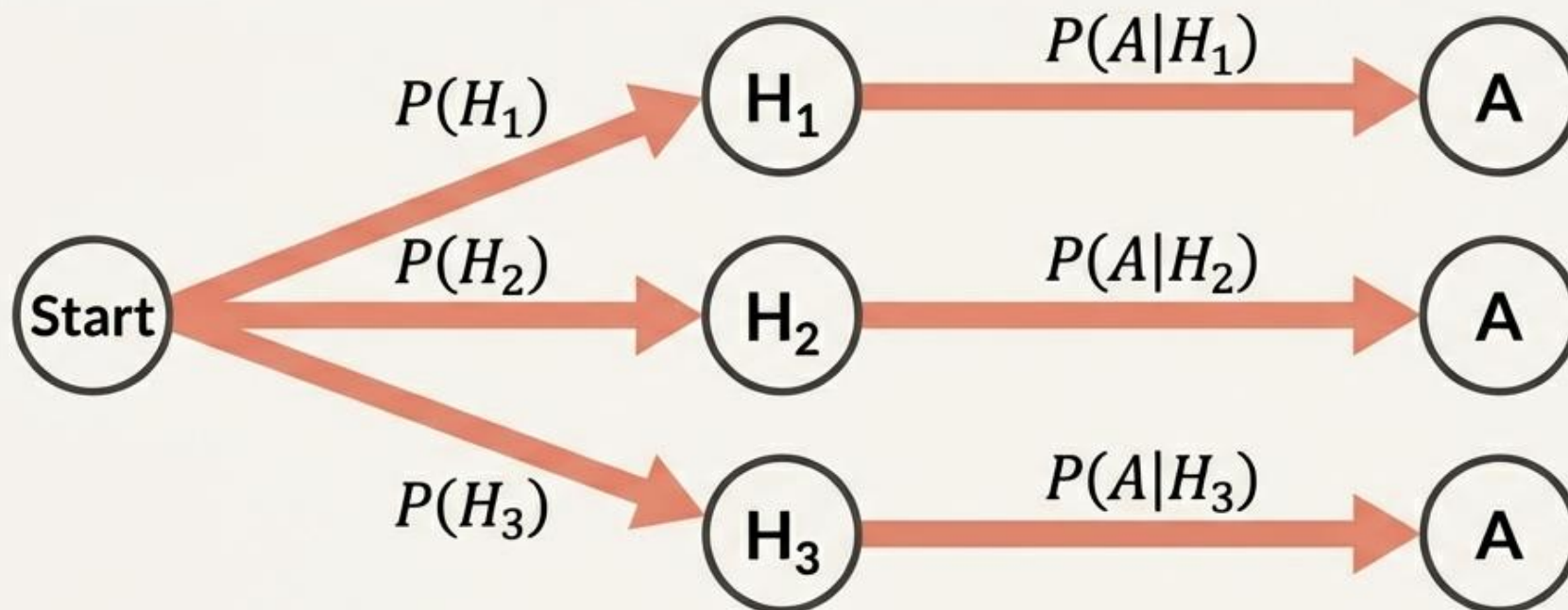


Balíček se změnil (Výběr bez vracení).

Pozor!
Nezávislé ≠ **Neslučitelné**.
Neslučitelné =
Nemohou nastat naráz.
Nezávislé =
Neovlivňují se.

Úplná pravděpodobnost

Sčítání všech cest k vítězství.



$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)$$

Celková šance je součtem vážených šancí v každém scénáři.

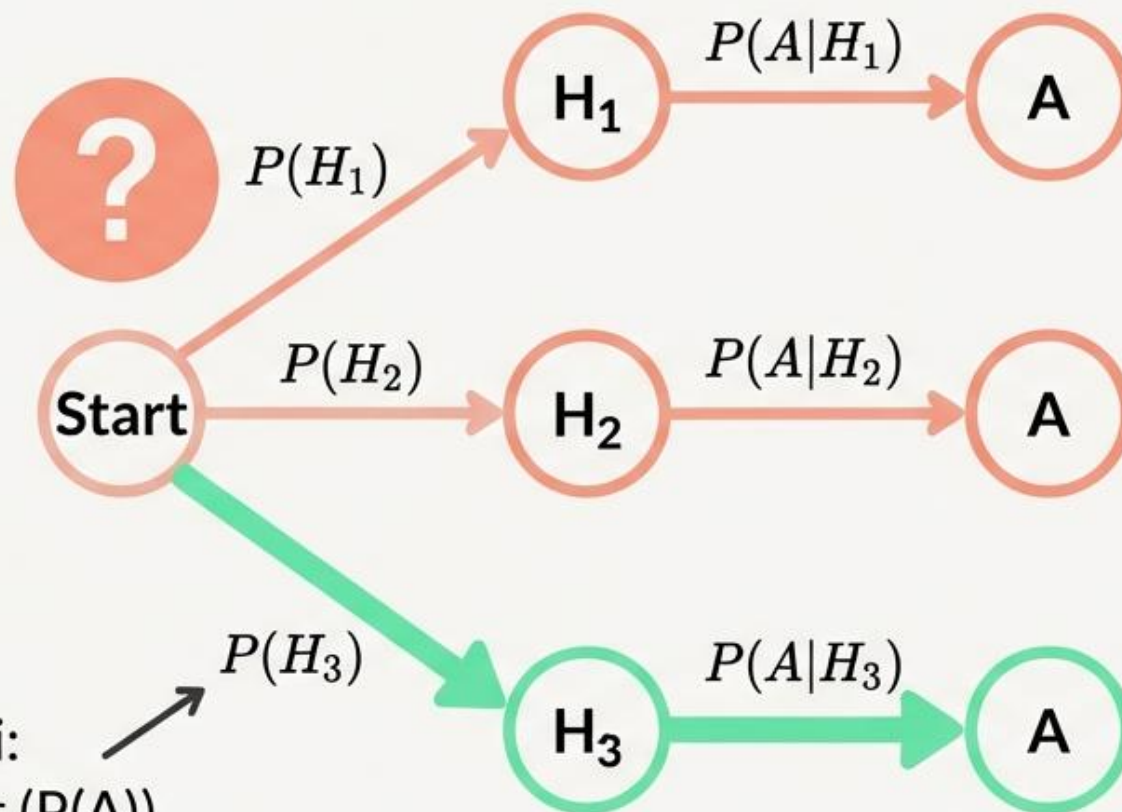
Bayesova věta

Zpětné inženýrství: Známe výsledek, hledáme příčinu.

Scénář (**Příklad 2.25**): “Našla se chyba v účtu (Jev A). Která pokladna (1, 2, nebo 3) ji udělala?”

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3) \cdot P(H_3)}{P(A)}$$

Výpočet pravděpodobnosti:
Zelená cesta / Součet vršech cest (P(A))



Přehled vzorců

Koncept	Vzorec
Klasická pravděpodobnost	$P(A) = \frac{m}{n}$
Nezávislé jevy	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Podmíněná pravděpodobnost	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Úplná pravděpodobnost	$P(A) = \sum P(A H_i) \cdot P(H_i)$
Bayesova věta	$P(H_i A) = \frac{P(A H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}$

Opakované pokusy

Definice 2.28. Opakované pokusy představují situace, kdy se experiment, při kterém sledujeme určitý jev, opakuje vícekrát za stejných podmínek. Při takových pokusech nás zajímá, jak se chovají pravděpodobnosti jednotlivých jevů v závislosti na počtu pokusů.

Definice 2.29. Nezávislé opakované pokusy jsou takové, kde výsledek jednoho pokusu nemá žádný vliv na výsledky dalších pokusů. To znamená, že pravděpodobnost daného jevu zůstává ve všech pokusech stejná.

Opakované pokusy (Bernoulli)

Hledáme přesně k úspěchů v n pokusech.

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Kolika způsoby to lze vybrat? (Kombinace)

Úspěchy

Neúspěchy

Příklad: 6 hodů kostkou ($n = 6$), chceme dvě šestky ($k = 2$).



Jen jedna z mnoha možných kombinací.

Opakované pokusy – Bernoulliho schéma

2 Nejpravděpodobnější počet úspěchů

- Nejpravděpodobnější počet úspěchů k splňuje nerovnici:

$$p \cdot (n + 1) - 1 \leq k \leq p \cdot (n + 1)$$

📌 Tento model se využívá např. při analýze pravděpodobnosti výher v opakovaných pokusech (hry, testování výrobků, genetika atd.).

Bernoulliho schéma - příklady

Příklad 2.33. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude znát učivo, je 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že mezi dvaceti vybranými studenty bude:

- a) právě 5 znalých studentů,
- b) nejvýše 2 znalí studenti,
- c) alespoň jeden znalý student?

Řešení:

- $p = 0,05$: pravděpodobnost, že náhodně vybraný student zná učivo,
- $n = 20$: počet pokusů (studentů).

Bernoulliho schéma - příklady

a) Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty bude právě 5 znalých:

$$P(5) = \binom{20}{5} \cdot (0,05)^5 \cdot (0,95)^{15},$$

$$P(5) = \frac{20!}{5!(20-5)!} \cdot (0,05)^5 \cdot (0,95)^{15},$$

$$P(5) = 15504 \cdot 0,0000003125 \cdot 0,46329 = 0,00225.$$

Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty bude právě 5 znalých, je 0,00225.

Bernoulliho schéma - příklady

b) Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty budou nejvýše 2 znalí:

$$P(\text{nejvýše } 2) = P(0) + P(1) + P(2),$$

$$P(0) = \binom{20}{0} \cdot (0,05)^0 \cdot (0,95)^{20} = 1 \cdot 1 \cdot (0,95)^{20} = 0,35849,$$

$$P(1) = \binom{20}{1} \cdot (0,05)^1 \cdot (0,95)^{19} = 20 \cdot 0,05 \cdot 0,37735 = 0,37735,$$

$$P(2) = \binom{20}{2} \cdot (0,05)^2 \cdot (0,95)^{18} = \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,0025 \cdot 0,39759 = 0,18846,$$

$$P(\text{nejvýše } 2) = 0,35849 + 0,37735 + 0,18846 = 0,9243.$$

Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty budou nejvýše 2 znalí, je 0,9243.

Bernoulliho schéma - příklady

c) Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty bude alespoň jeden znalý:

$$P(\text{alespoň } 1) = 1 - P(0),$$

$$P(\text{alespoň } 1) = 1 - 0,35849 = 0,64151.$$

Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty bude alespoň jeden znalý, je 0,64151.