Nejpoužívanější **spojitá** rozdělení pravděpodobnosti a jejich základní číselné charakteristiky

XSZD-07a-2025

Kvantily spojité náhodné veličiny

Definice

Nechť $\alpha \in (0, 1)$. α-kvantilem spojité náhodné veličiny X rozumíme kterékoli reálné číslo x_α, které splňuje

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha.$$

- X spojitá: α-kvantil určen jednoznačně vztahem

$$F(x_\alpha) = \alpha$$

- X diskrétní: kvantily nejsou určeny jednoznačně, nebudeme uvažovat

Speciální názvy kvantilů

- $x_{0,5}$ – medián
- $x_{0,25}$ – dolní kvartil
- $x_{0,75}$ – horní kvartil
- $x_{k/10}$, $k = 1, \ldots, 9$ – k-tý decil
- $x_{k/100}$, $k = 1, \ldots, 99$ – k-tý percentil

Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

Model: modelování doby/vzdálenosti čekání na událost, která nemá paměť, tj. zbývající doba/vzdálenost čekání nezávisí na tom, jak dlouho už na událost čekáme

Příklady

- doba životnosti zařízení, u kterého dochází k poruše náhodně, nikoliv z důsledku opotřebení
- délka telefonního hovoru
- doba mezi 2 příchozími telefonáty

Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

Parametr rozdělení

- $\lambda \ldots$ míra rizika výskytu sledované události za jednotku času/vzdálenosti
- $\frac{1}{\lambda} \ldots$ očekávaná doba/vzdálenost do výskytu sledované události

Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

Hustota

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0,\ \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

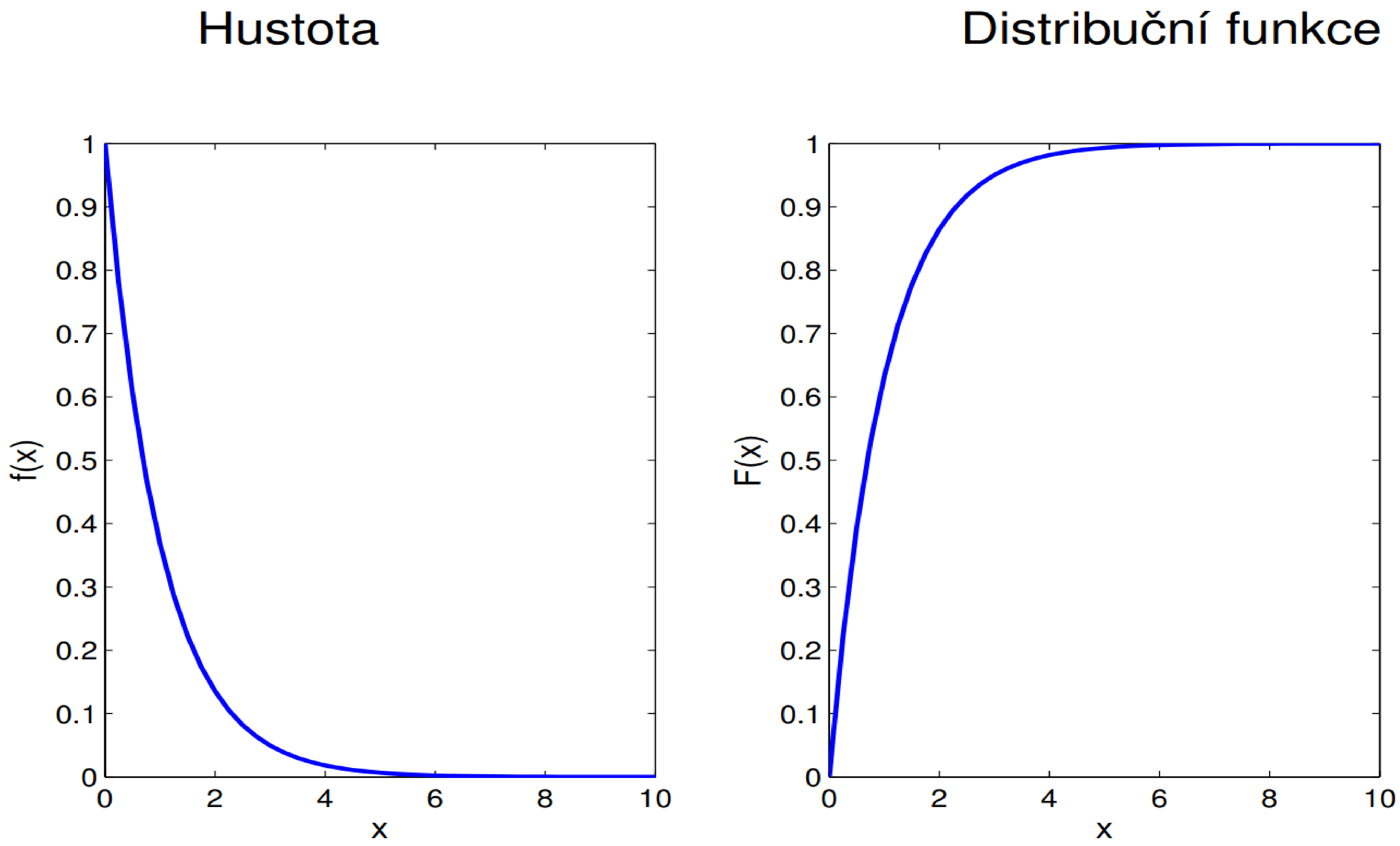
Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Číselné charakteristiky

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(1)$



Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

Excel: EXPON.DIST(x;λ;logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $f(x)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(x)$

Příklad (Obsluha v restauraci)

Doba čekání hosta na pivo v restauraci U Lva je průměrně 5 minut. Určete

a) *pravděpodobnost, že host bude na pivo čekat déle než 12 minut*

b) *dobu čekání hosta na pivo, během níž bude obsloužen s pravděpodobností 0,9.*

Nějaký nápad?

X … doba čekání na pivo (v minutách)

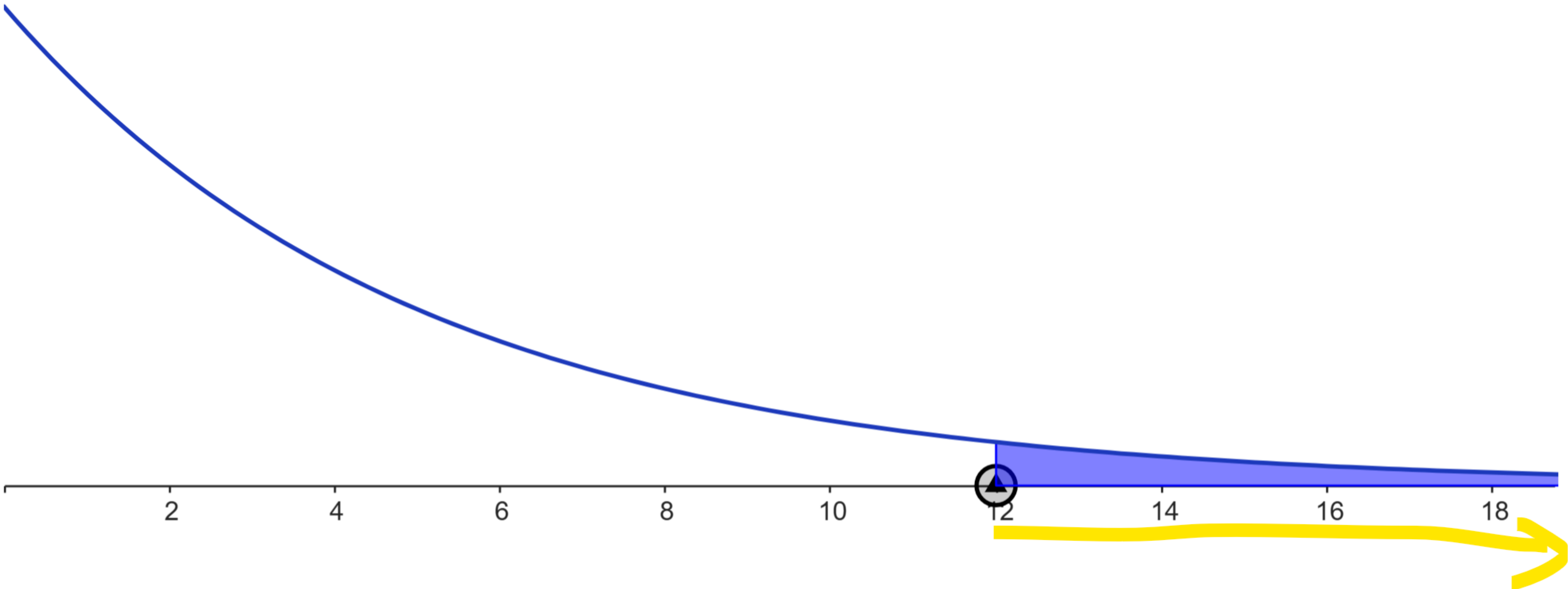
průměrná doba čekání na pivo … 5 minut

$$X \sim \mathrm{Ex}(\lambda),\ \lambda = \frac{1}{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Distribution Statistics

$\mu = 5$ $\sigma = 5$



Exponential λ 0.2

P(12 ≤ X) = 0.0907

Pravděpodobnost, že host bude na pivo čekat déle než 12 minut

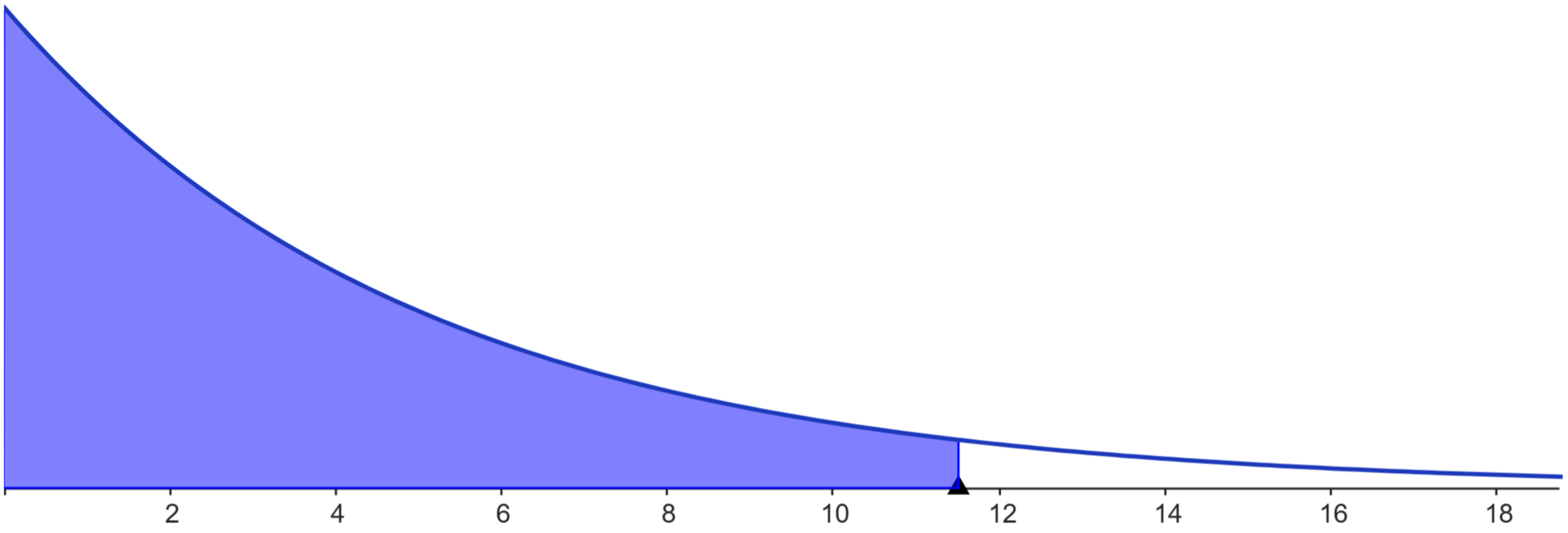
$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - F(12) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{5}\cdot 12}\right)$$

$$= e^{-\frac{12}{5}} = 0{,}09$$

Excel: 1-EXPON.DIST(12;1/5;1)

Distribution Statistics

$\mu = 5$ $\sigma = 5$



Exponential λ 0.2

$P(X \leq$ 11.5129 $) =$ 0.9

Doba čekání hosta na pivo, během níž bude obsloužen s pravděpodobností 0,9

$$P(0 \leq X \leq t) = 0{,}9$$

$$F(t) - F(0) = 0{,}9$$

$$1 - e^{-t/5} - 0 = 0{,}9$$

$$e^{-t/5} = 0{,}1$$

$$t = -5\ln(0{,}1) \doteq 11{,}51 \text{ min} \doteq 11 \text{ min } 30 \text{ s}$$

Normální rozdělení $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Hustota

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ \mu \in \mathbb{R}^1,\ \sigma > 0.$$

- μ parametr polohy (střední hodnota)
- σ parametr měřítka (směrodatná odchylka)

Vlastnosti

- X může nabývat jakýchkoli reálných hodnot
- hustota je symetrická kolem μ
- hustota nabývá maxima v bodě $x = \mu$, $(f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}})$
- normální rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ nazýváme normované (standardizované) normální rozdělení.

Normální rozdělení $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = \mu, \quad x_{0.5} = \mu, \quad \hat{x} = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$$

Excel: NORM.DIST(x;μ;σ;logická proměnná)

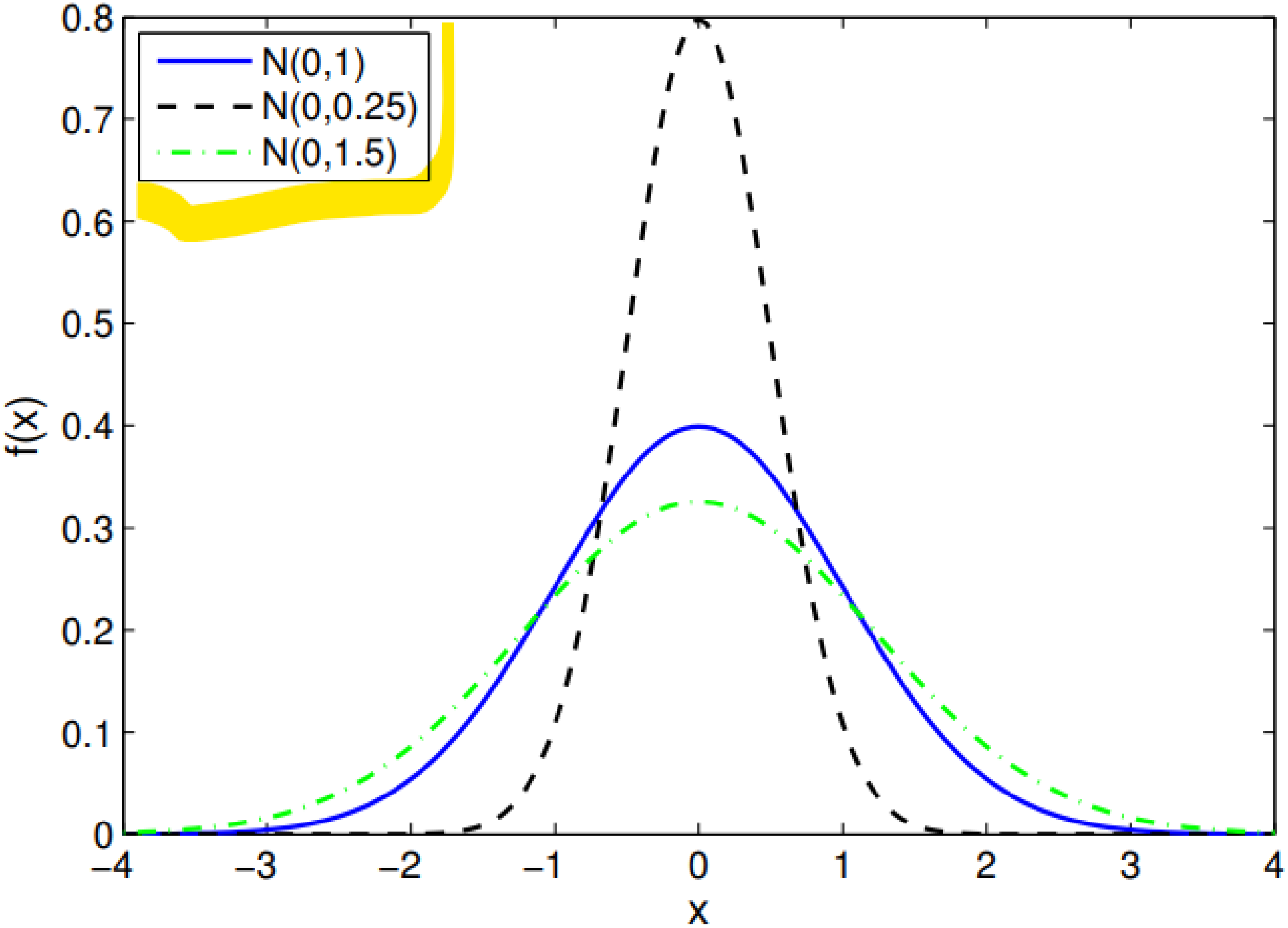
- logická proměnná = 0 pro výpočet $f(x)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(x)$

NORM.S.DIST(x;logická proměnná) pro práci s $\mathrm{N}(0,1)$

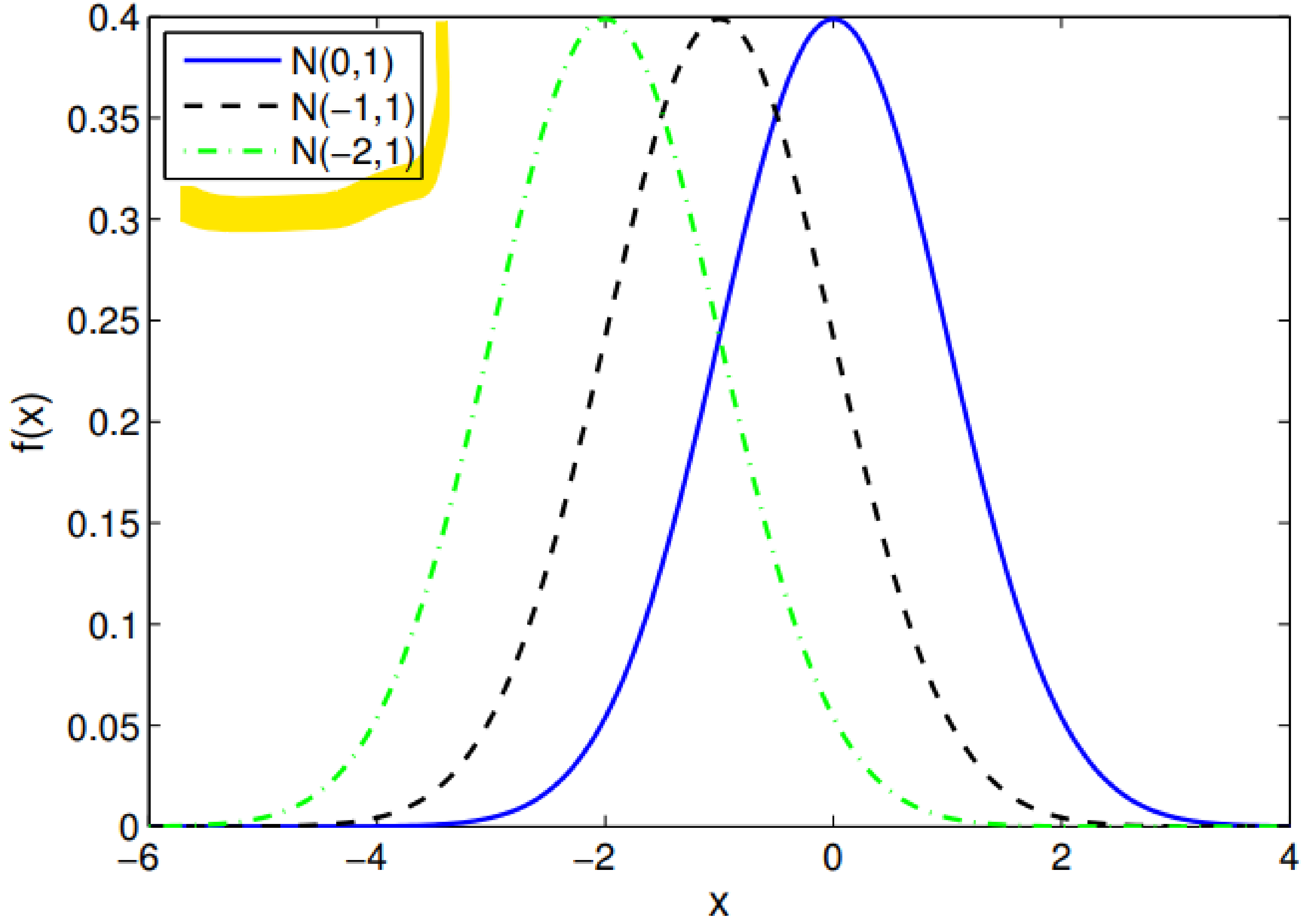
NORM.INV(α;μ;σ) výpočet α kvantilu

NORM.S.INV(α) výpočet α kvantilu pro $X \sim \mathrm{N}(0,1)$

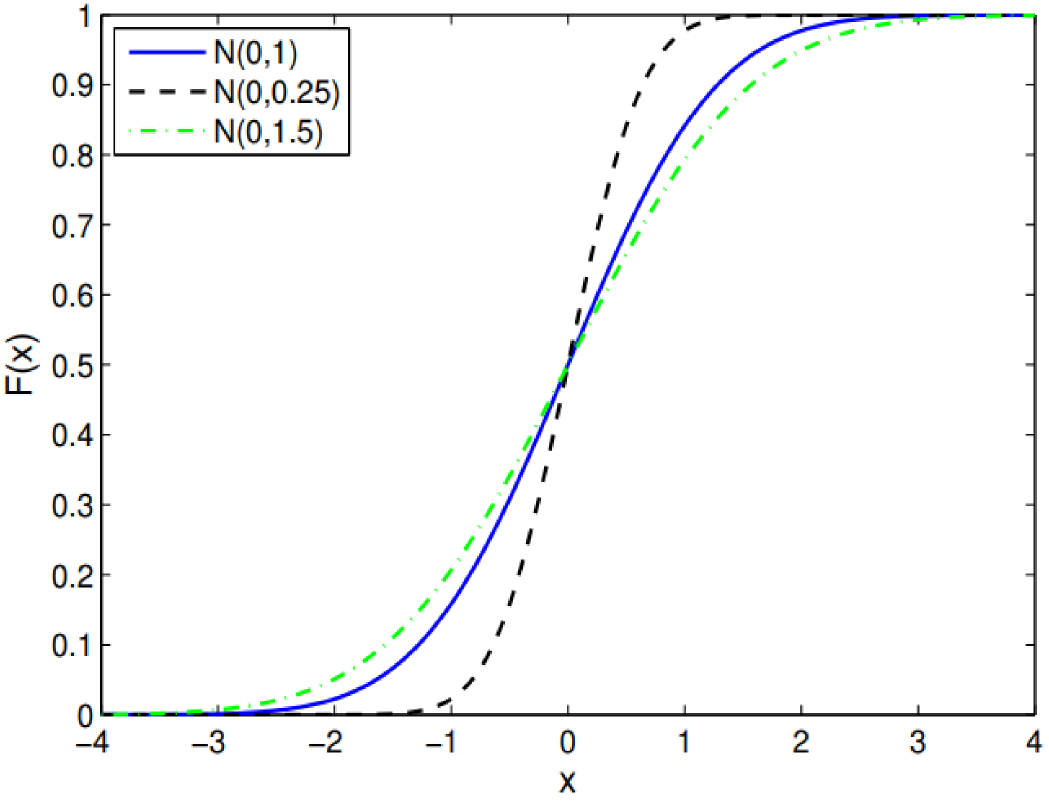
Hustota normálního rozdělení

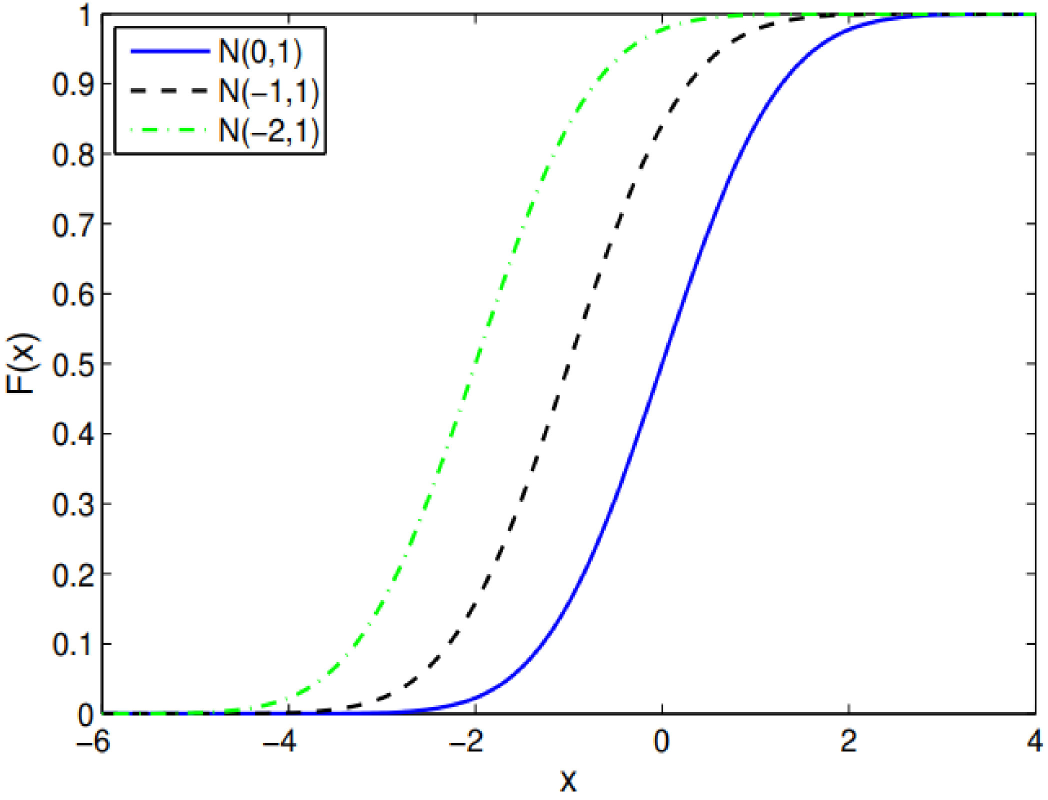


Hustota normálního rozdělení



Distribuční funkce normálního rozdělení

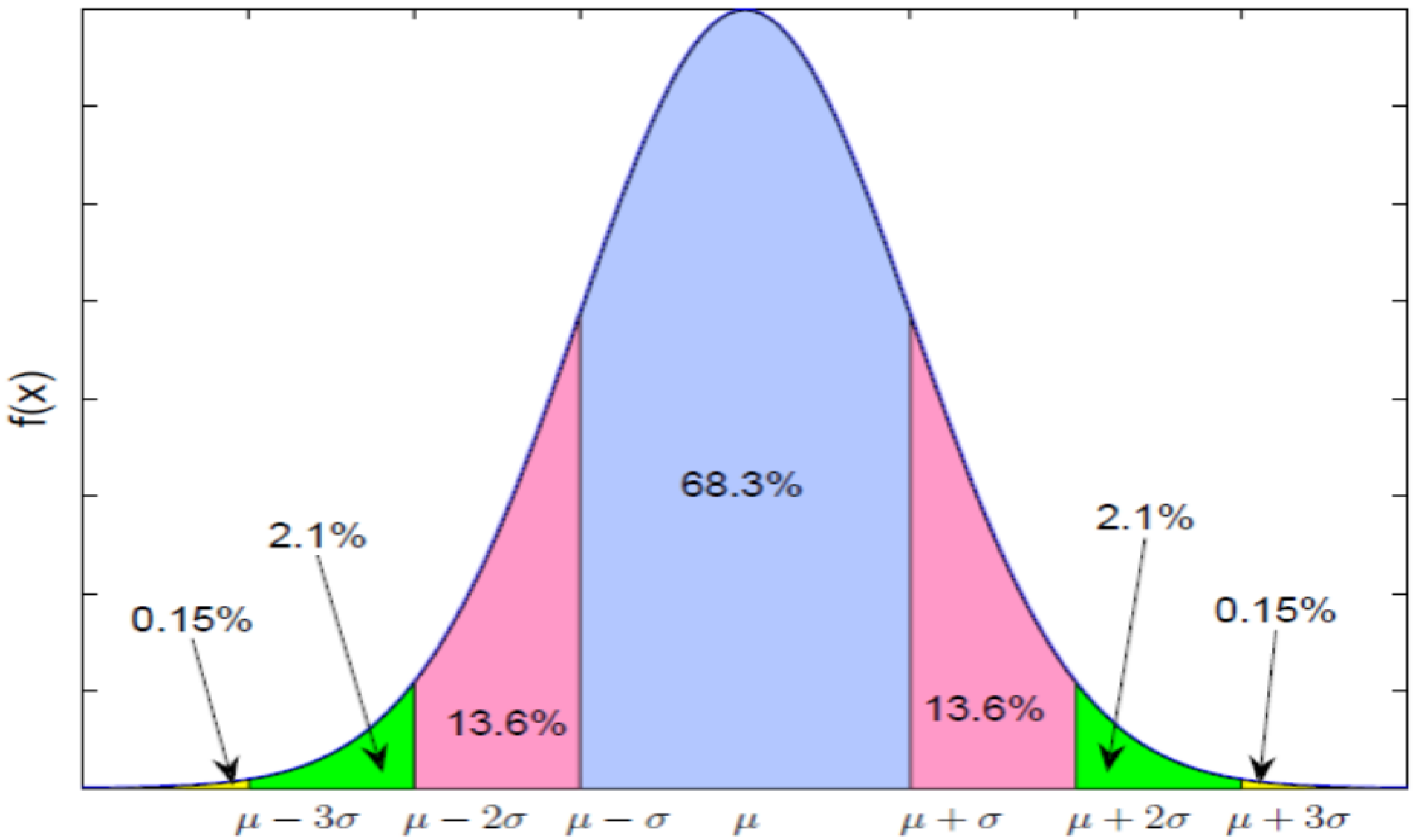




Pravidlo 3 sigma

Pro $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ platí

$$P[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] \approx 68{,}3\%$$
$$P[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \approx 95{,}5\%$$
$$P[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] \approx 99{,}7\%$$



Příklad (IQ testy)

Hodnota IQ se řídí normálním rozdělením $\mathrm{N}(100, 15^2)$. *Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba bude mít*

a) *IQ více než 130 bodů,*
b) *IQ méně než 90 bodů,*
c) *IQ v intervalu od 100 do 130 bodů?*

X ... hodnota IQ (v bodech)

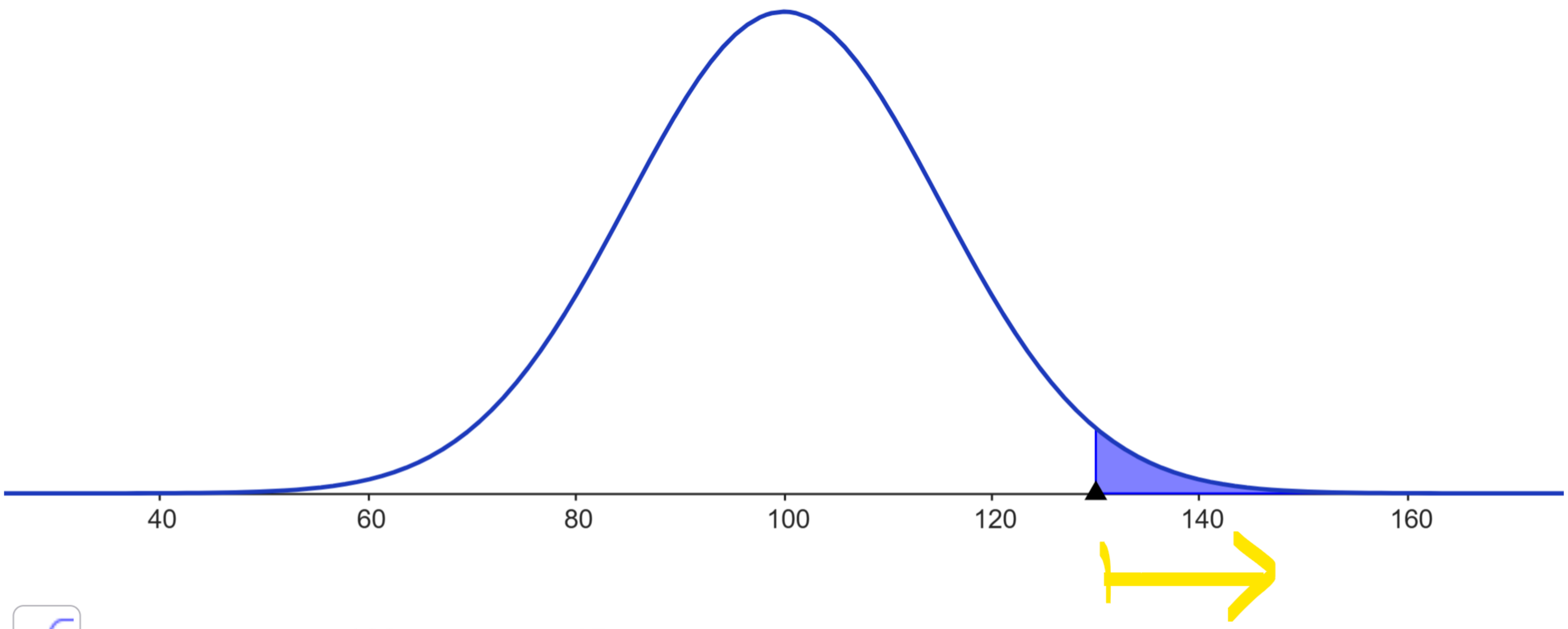
$X \sim \mathrm{N}(100, 15^2)$

$$\mathrm{P}(X > 130) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 130)$$

Excel: 1-NORM.DIST(130;100;15;1)

Distribution Statistics

$\mu = 100$ $\sigma = 15$

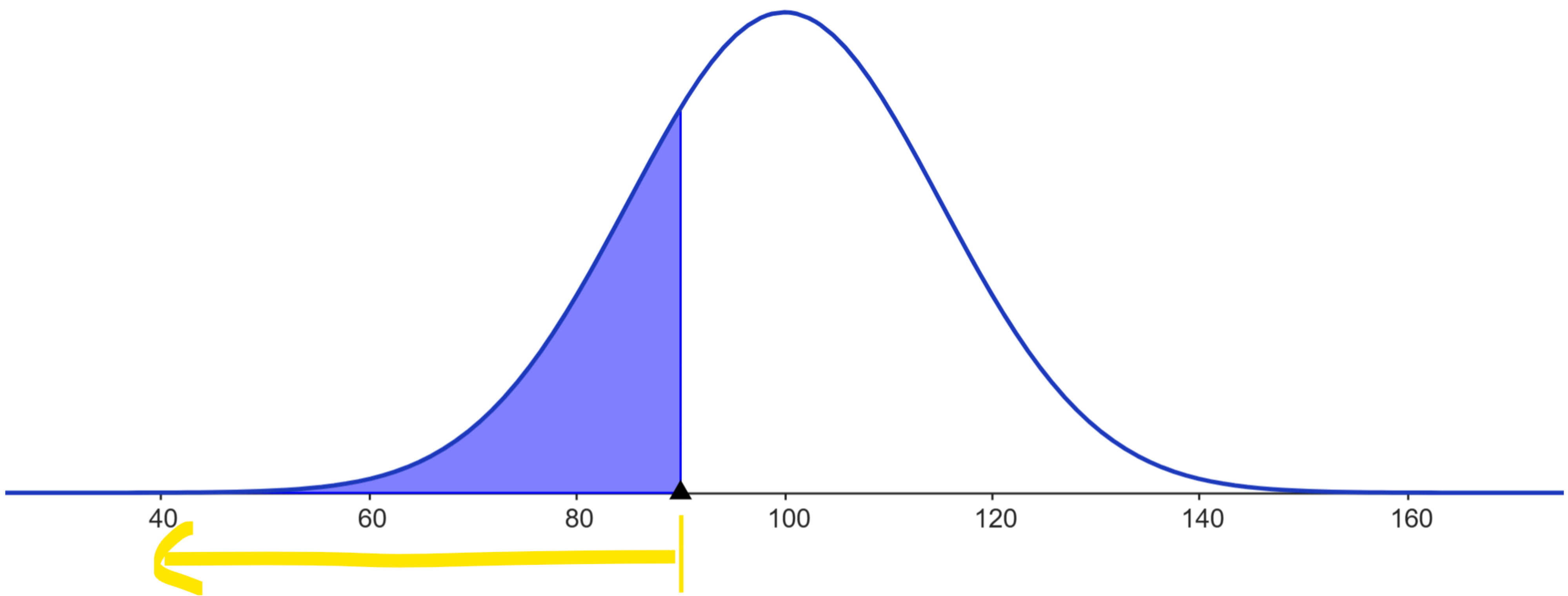


Normal μ 100 σ 15

$P(\ 130 \leq X\ ) = 0.0228$

Distribution | Statistics

$\mu = 100$ $\sigma = 15$

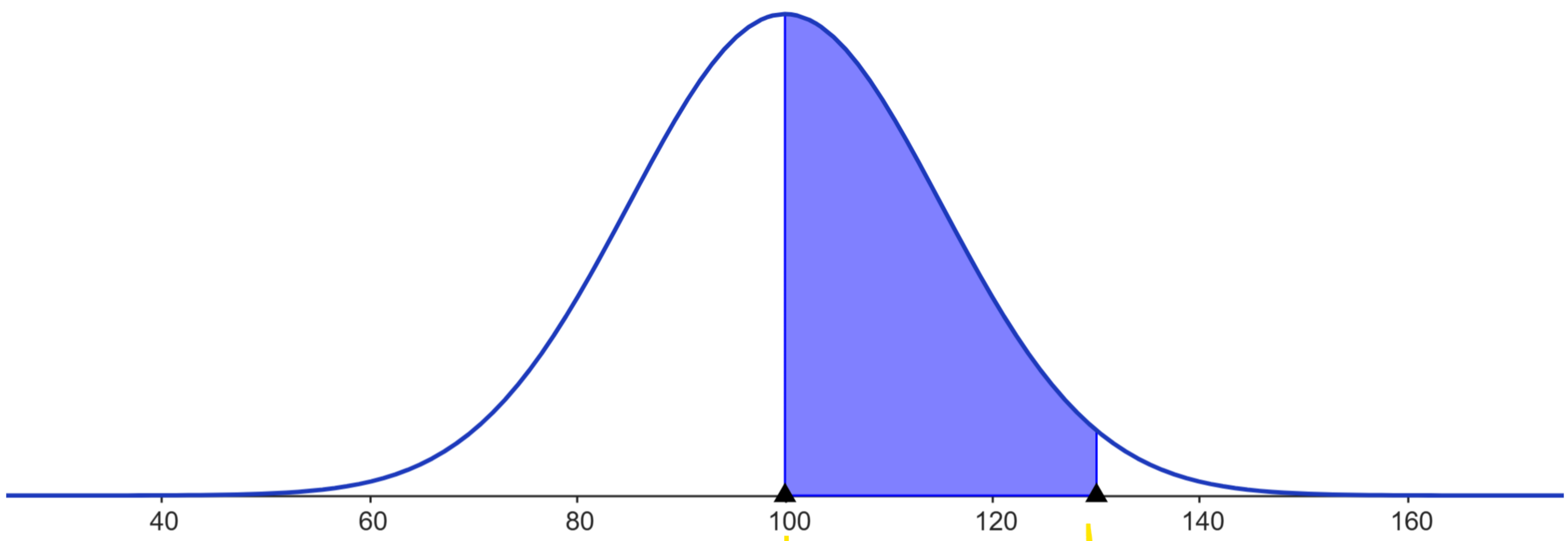


Normal μ 100 σ 15

$P(X \le 90) = 0.2525$

Distribution | Statistics

$\mu = 100$ $\sigma = 15$



Normal μ 100 σ 15

$P(100 \le X \le 130) = 0.4772$