Náhodná veličina

XSZD-05-2025

Obsah

1. Náhodná veličina
   - Diskrétní náhodná veličina
   - Spojitá náhodná veličina
2. Číselné charakteristiky náhodné veličiny
   - polohy
   - variability
   - šikmosti
   - špičatosti

Definice (Náhodná veličina)

Náhodná veličina *X je reálná funkce* $X : \Omega \to \mathbb{R}^1$

- X, Y, Z ... náhodná veličina
- x, y, z ... hodnota náhodné veličiny = **realizace náhodné veličiny**

Dělení náhodných veličin podle oboru hodnot M:

- **diskrétní:** M konečná nebo spočetná
- **spojitá:** M interval

Diskrétní náhodná veličina

Příklad

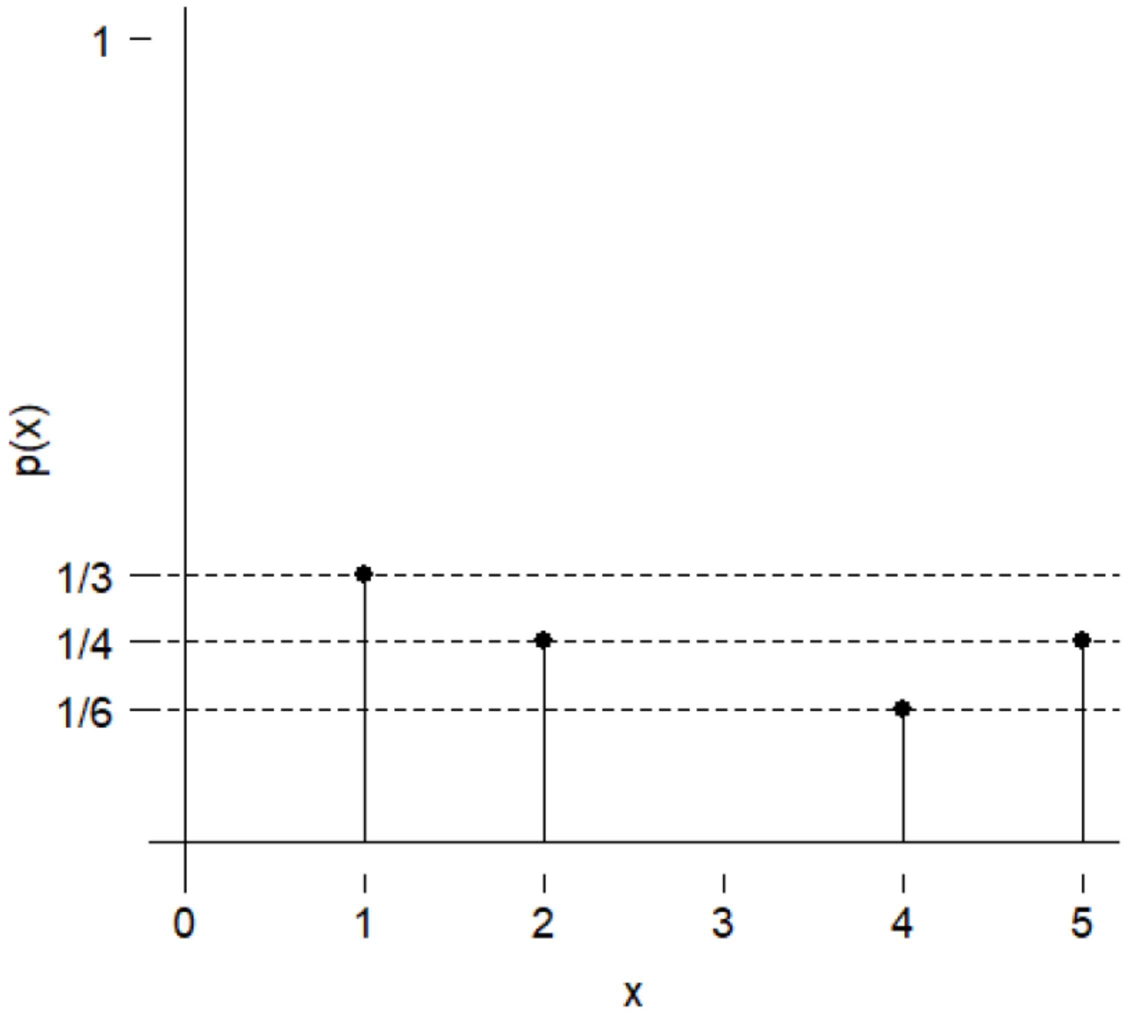
Diskrétní náhodná veličina X

- *nabývá hodnot* $M = \{1, 2, 4, 5\}$
  s pravděpodobnostmi $p(k) = \mathrm{P}[X = k]$, *kde*
- $p(1) = \frac{1}{3}$, $p(2) = \frac{1}{4}$, $p(4) = \frac{1}{6}$, $p(5) = \frac{1}{4}$ *a* $p(x) = 0$ *jinak.*

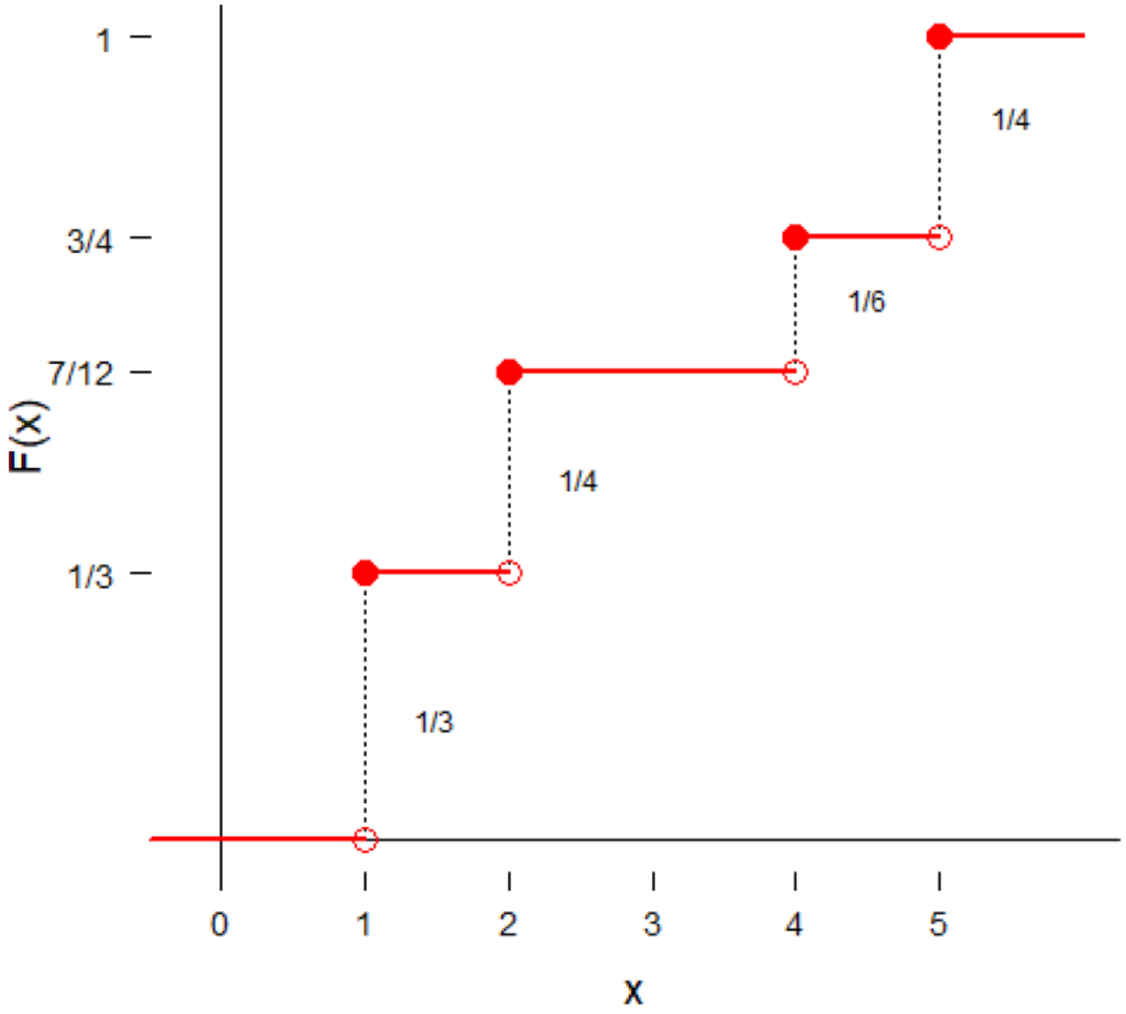
$$M = \{1, 2, 4, 5\}$$

k	1	2	4	5
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Pravděpodobnostní funkce



Distribuční funkce



Definice (Pravděpodobnostní funkce)

Funkce $p(x) = \mathrm{P}(X = x)$ *se nazývá* ***pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny*** X.

Vlastnosti

- $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$
- $\sum\limits_{x \in M} p(x) = 1$

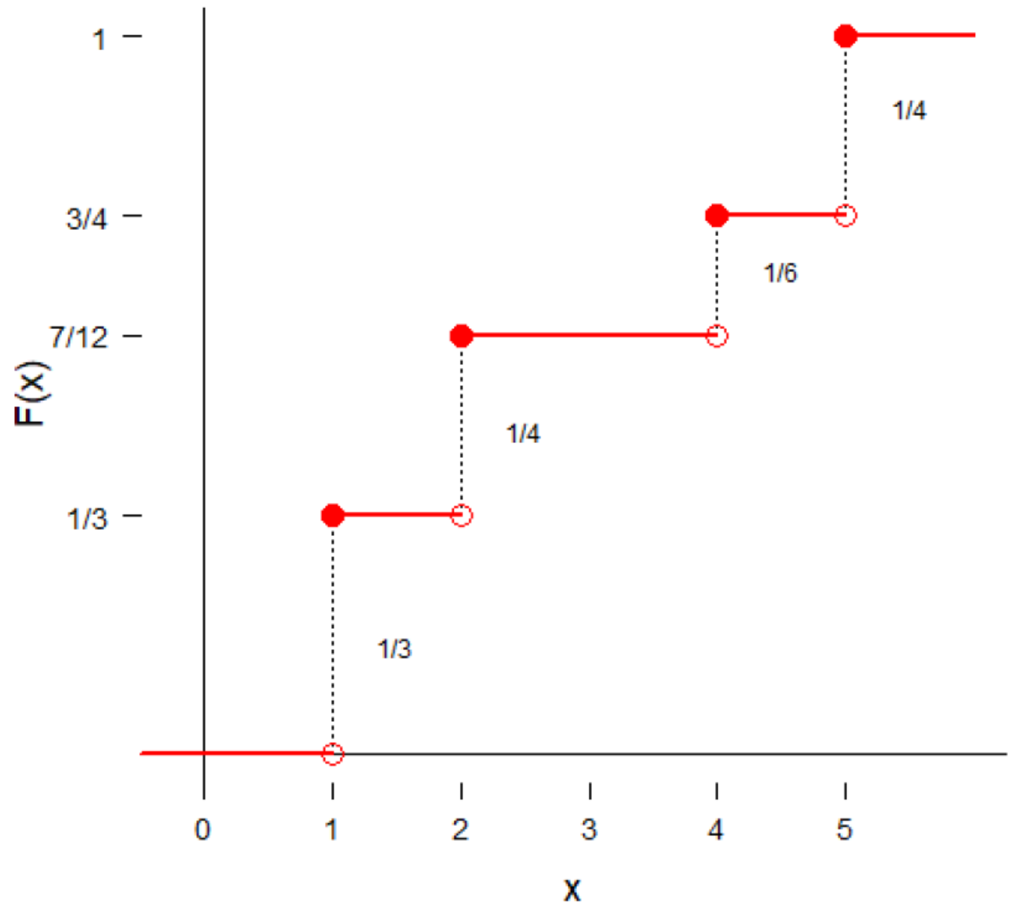
Definice (Distribuční funkce)

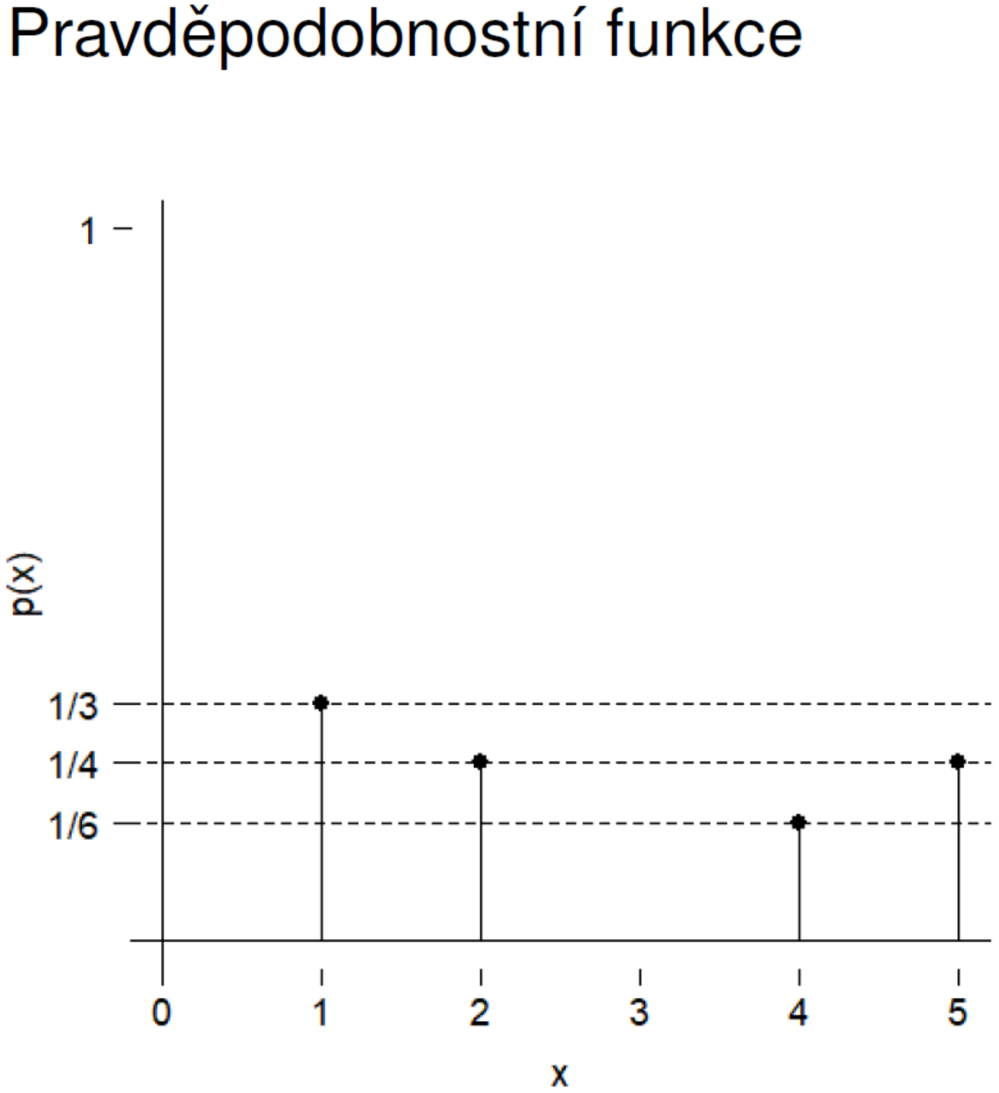
Distribuční funkce *náhodné veličiny* X *je reálná funkce* $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *definovaná vztahem*

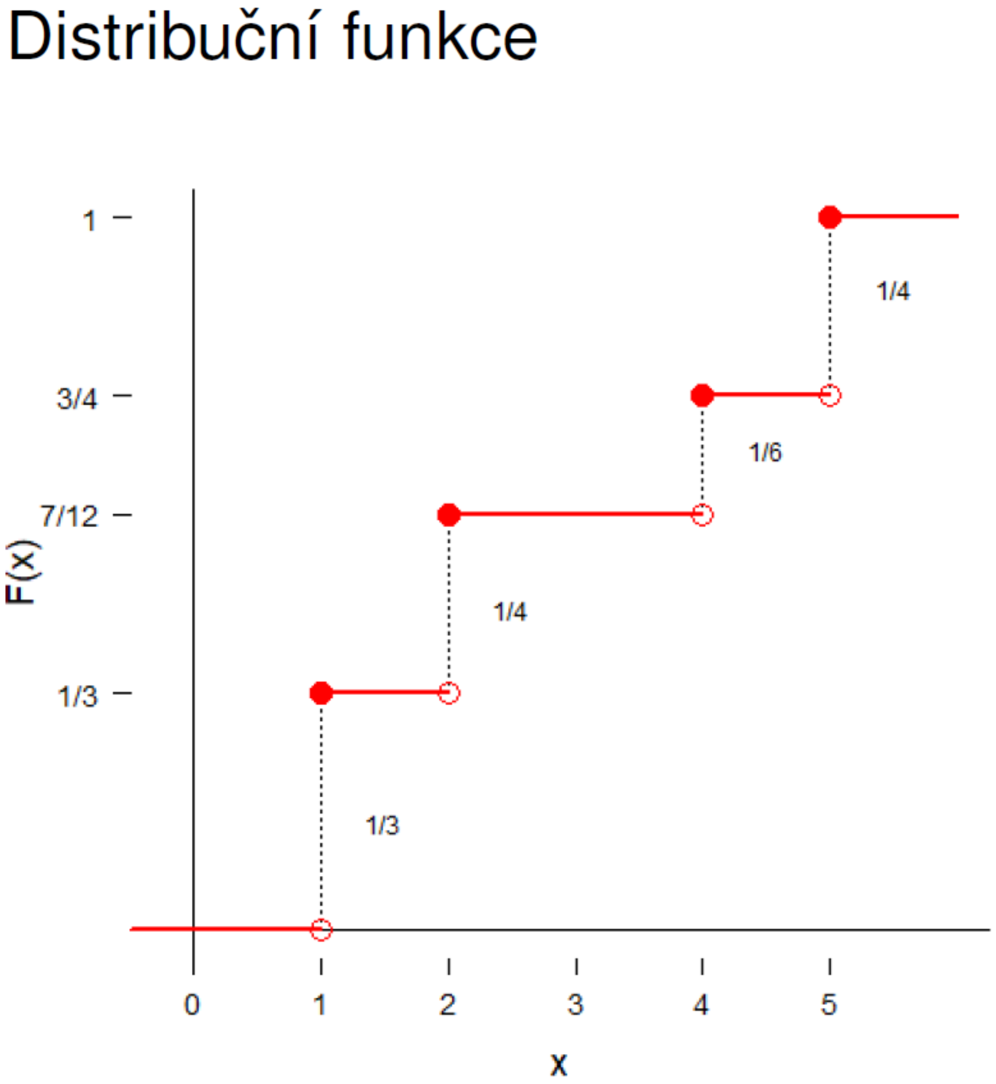
$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

Vlastnosti distribuční funkce

1. $F(x) \in \langle 0, 1 \rangle$
2. neklesající
3. zprava spojitá
4. definovaná na $\mathbb{R}^1$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$







Pravděpodobnost, že X nabývá hodnoty **alespoň 3**

$$P(X \geq 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Diskrétní náhodná veličina

- značí „počet“
- počet autohavárií v daném časovém intervalu (Poissonovo rozdělení)
- počet 6, které padly v 10 hodech pravidelnou kostkou (Binomické rozdělení)

$$P(X = x_0) = p(x_0) \in \langle 0, 1 \rangle \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^1$$

Spojitá náhodná veličina

- značí „měření“

$$P(X = x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^1$$

- jsme schopni najít pouze interval, kde se X realizuje

$$P(a \leq X \leq b) \in \langle 0, 1 \rangle \quad \forall a \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}^1$$

Spojitá náhodná veličina

Definice

Náhodná veličina *X se nazývá (absolutně)* ***spojitá****, jestliže existuje nezáporná funkce $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ taková, že*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

Funkce $f(x)$ se nazývá ***hustota*** *(rozdělení pravděpodobností) náhodné veličiny X.*

Vlastnosti hustoty

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \mathrm{d}t = 1$$

Vlastnosti hustoty a distribuční funkce spojité náhodné veličiny

$f(x) = F'(x)$ v každém bodě x, kde je F diferencovatelná

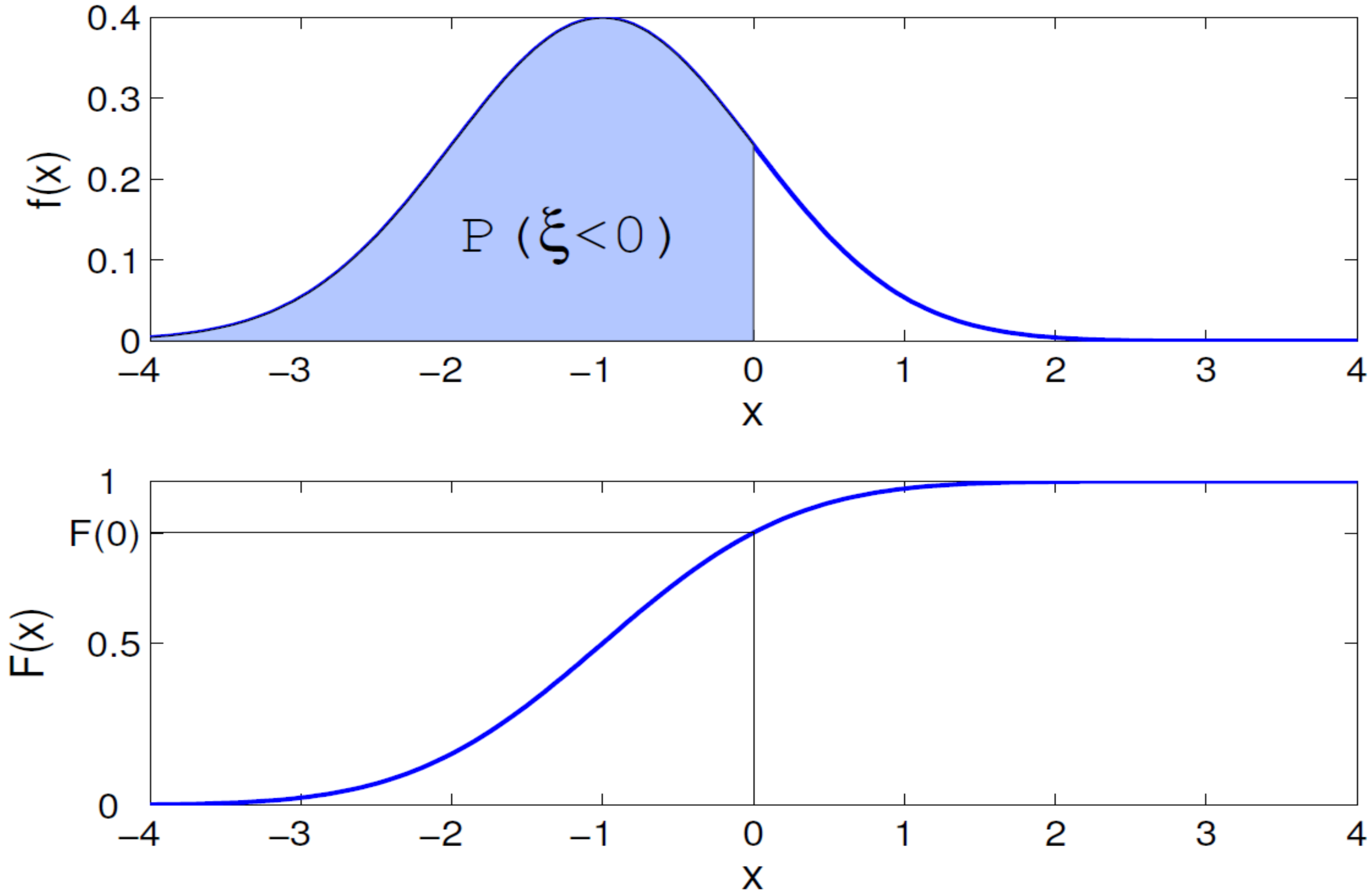
$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

$$P(X \in B) = \int_B f(t)\,\mathrm{d}t$$

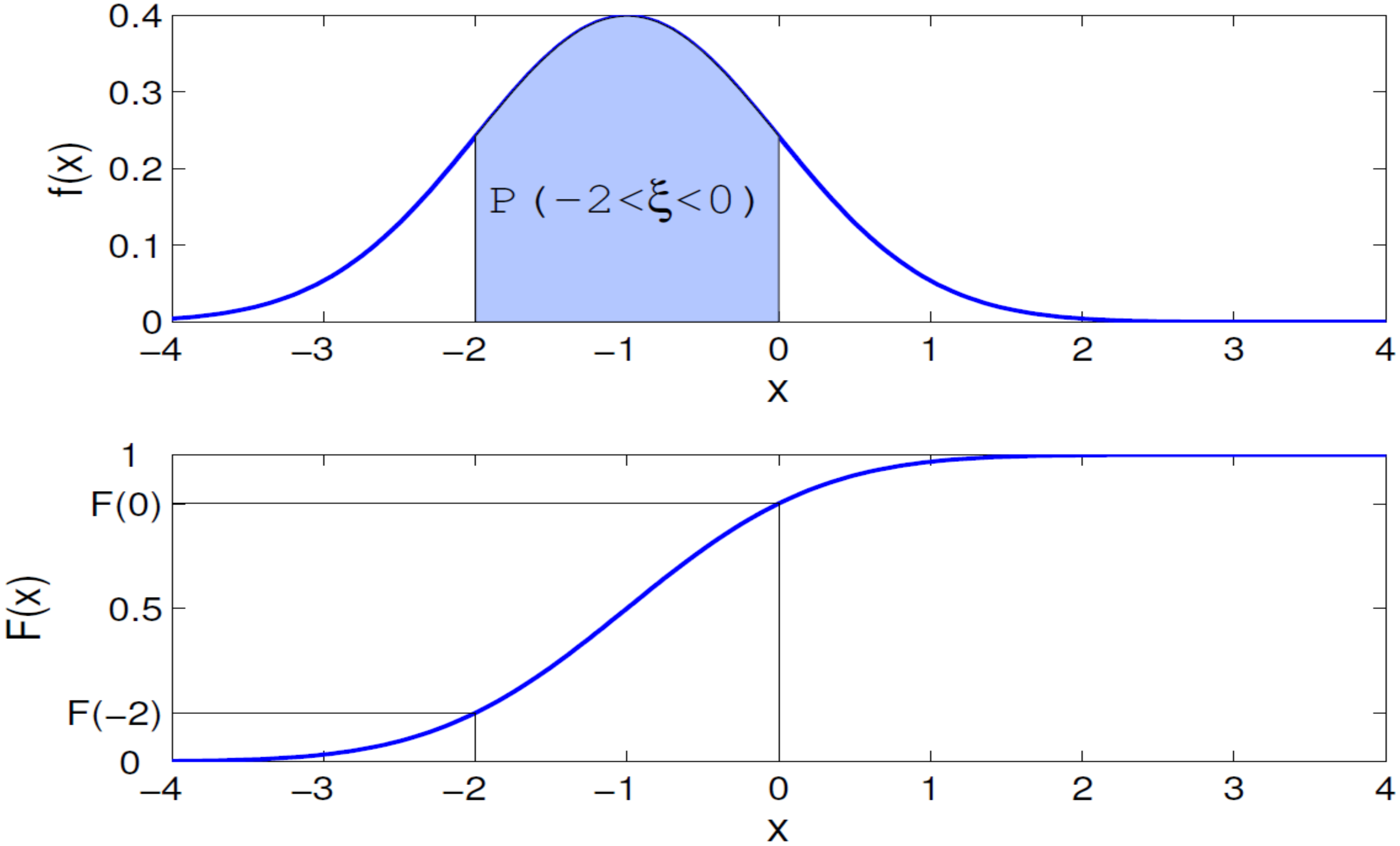
Výpočet pravděpodobností pomocí $F(x)$ a $f(x)$

$$P(\xi < 0) = F(0) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$$



Výpočet pravděpodobností pomocí $F(x)$ a $f(x)$

$$P(-2 < \xi < 0) = F(0) - F(-2) = \int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$$

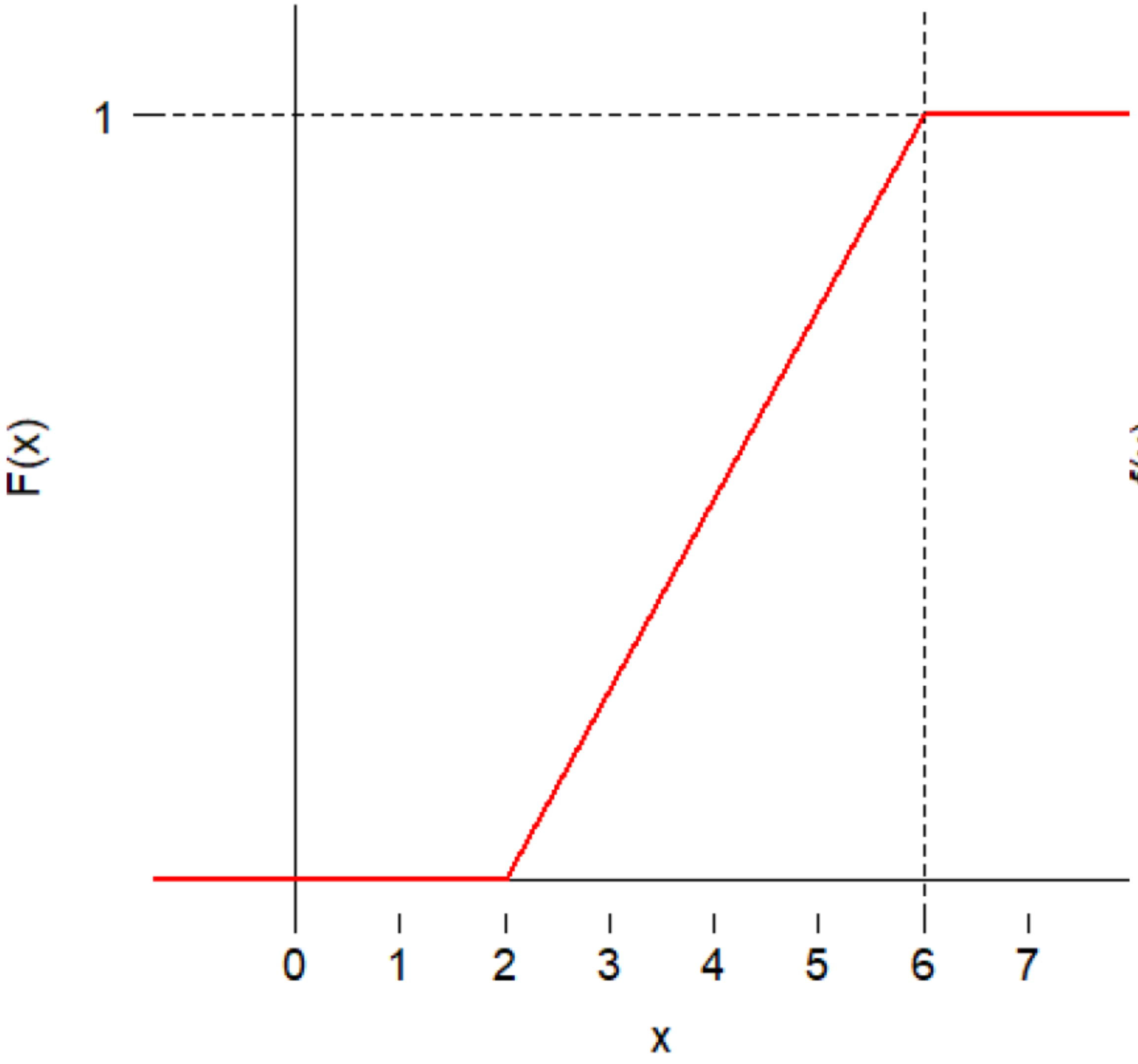


Příklad (Rovnoměrné rozdělení na intervalu $(2,6)$)

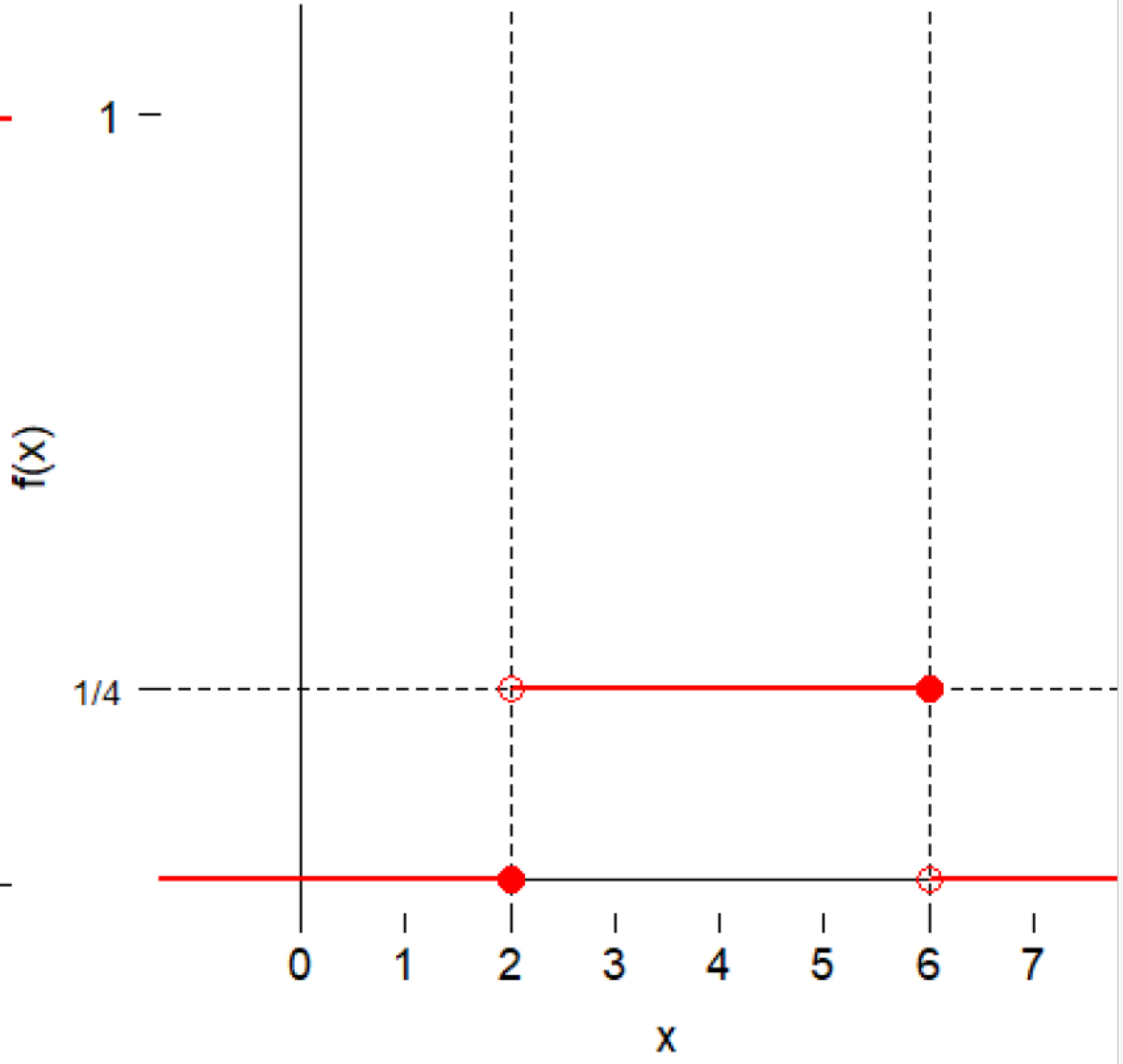
Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{4}(x-2) & 2 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X a vypočítejte pravděpodobnost, že X nabývá hodnoty a) alespoň 4, b) v intervalu $(3,5)$.



Obrázek: Distribuční funkce X



Obrázek: Hustota pravděpodobnosti X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{4}(x-2) & 2 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Řešení.

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\left[\frac{1}{4}(x-2)\right]' = \frac{1}{4} \quad \text{pro } x \in (2, 6\rangle$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 2 < x \leq 6 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

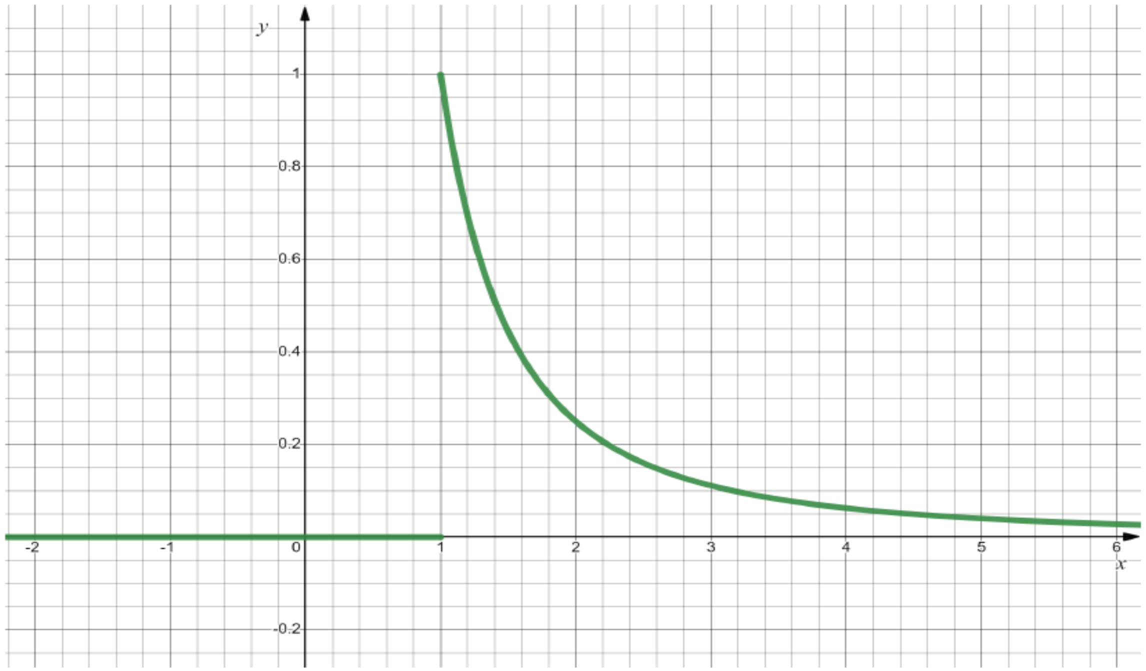
- $P(X \geq 4) = \int_4^\infty f(x)dx = \int_4^6 \frac{1}{4}dx = \left[\frac{x}{4}\right]_4^6 = \frac{1}{4}(6-4) = \frac{1}{2}$
- $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - F(4) = 1 - \frac{1}{4}(4-2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $P(3 < X < 5) = \int_3^5 \frac{1}{4}dx = \left[\frac{x}{4}\right]_3^5 = \frac{1}{4}(5-3) = \frac{1}{2}$
- $P(3 < X < 5) = F(5) - F(3) = \frac{1}{4}(5-2) - \frac{1}{4}(3-2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Příklad

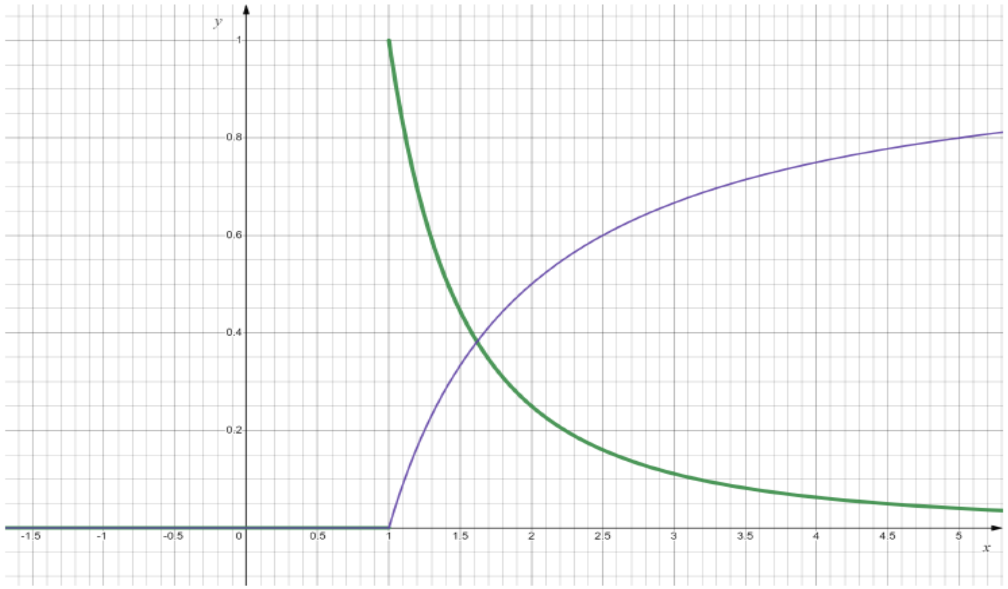
Spojitá náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

1. *Určete její distribuční funkci.*
2. *Spočítejte pravděpodobnost $P(1 \leq X \leq 5)$.*



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases} \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \quad \text{pro } x \leq 1$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} 0dt + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1 \quad \text{pro } x > 1$$

$$P(1 \leq X \leq 5) = \int_1^5 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^5 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$

$$P(1 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = \left(1 - \frac{1}{5} \right) - 0 = \frac{4}{5}$$