

Pravděpodobnost jevů

XSZD-02-2025

Základní pojmy

Náhodný pokus

- Proces, jehož výsledek **není jistý** a může nabývat různých hodnot v závislosti na náhodě.
- Lze jej **opakovat za stejných podmínek**, ale výsledek se může pokaždé lišit.
- **Příklad:**
- **Hod kostkou** – nevíme, jaké číslo padne.
- **Losování míčku z osudí** – výsledek je náhodný.
-  **Souhrn:** Výsledky náhodného pokusu tvoří množinu *možných výsledků*, kterou nazýváme **prostor elementárních jevů**.

Základní pojmy

Náhodný jev

- Podmnožina prostoru elementárních jevů, která zahrnuje **jeden nebo více možných výsledků** náhodného pokusu.
- **Jev nastává**, pokud výsledek pokusu patří do této podmnožiny.
- **Příklad:**
- **Hod kostkou:** definujeme jev A jako „padne sudé číslo“.
- Možné výsledky tohoto jevu: $A = \{2, 4, 6\}$,
-  **Souhrn:** Náhodný jev je výběr výsledků, které odpovídají určité podmínce.

Druhy náhodných jevů

- **1 Jistý jev**
- Nastane vždy, obsahuje všechny možné výsledky náhodného pokusu.
- Pravděpodobnost: **1**
- **Příklad:** Při hodu kostkou je jistý jev, že padne číslo mezi 1 a 6.
- $P(J)=1$

Druhy náhodných jevů

- **2** Nemožný jev
- Nikdy nenastane, neobsahuje žádný výsledek pokusu.
- Pravděpodobnost: **0**
- **Příklad:** Při hodu kostkou je nemožný jev, že padne číslo 7.
- $P(\emptyset)=0$

Druhy náhodných jevů

- **3** Elementární jev

- Obsahuje **právě jeden** možný výsledek pokusu.

- **Příklad:** Při hodu kostkou je elementární jev A , že padne číslo 3.

- $A=\{3\}$

- **4** Složený jev

- Obsahuje **více než jeden** možný výsledek pokusu.

- **Příklad:** Při hodu kostkou může být složený jev B , že padne sudé číslo.

- $B=\{2,4,6\}$

Druhy náhodných jevů

- **5 Opačný jev (doplňek jevu)**
- Nastane tehdy, když nenastane zadaný jev.
- **Příklad:** Pokud jev A znamená, že padne číslo 3, pak opačný jev A^c znamená, že padne jakékoli jiné číslo.
- $A^c = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

Druhy náhodných jevů

- **6 Neslučitelné (disjunktní) jevy**

- Nemohou nastat současně (nemají žádný společný výsledek).
- **Příklad:** Při hodu kostkou jsou neslučitelné jevy A (padne sudé číslo) a B (padne liché číslo).

- $A \cap B = \emptyset$

- **7 Slučitelné jevy**

- Mohou nastat současně (mají alespoň jeden společný výsledek).
- **Příklad:** Při hodu kostkou jsou slučitelné jevy A (padne číslo menší než 4) a B (padne sudé číslo).

- $A \cap B = \{2\}$

Klasická pravděpodobnost

Definice 2.4. Při splnění níže uvedených předpokladů definujeme **klasickou pravděpodobnost** jako

$$P(A) = \frac{\text{Počet příznivých výsledků}}{\text{Celkový počet možných výsledků}}.$$

Klasická pravděpodobnost - předpoklady

1. **Konečný počet možných výsledků:** Předpokládá se, že jev má konečný počet možných výsledků (elementárních jevů), které jsou všechny jasně definovány a lze je spočítat.
2. **Stejná pravděpodobnost všech výsledků:** Každý z možných výsledků je stejně pravděpodobný. To znamená, že žádný výsledek není preferován nebo diskriminován, což je klíčový předpoklad této definice. Například při hodu férovou kostkou má každá strana stejnou šanci padnout.
3. **Určitelnost jevů:** Všechny možné výsledky (elementární jevy) jsou dopředu známy a lze je spočítat. V praxi to znamená, že prostor elementárních jevů je jasně definovaný a každý výsledek je předem určitelný.
4. **Nezávislost pokusů:** Pokud klasickou pravděpodobnost aplikujeme na opakované pokusy (např. hody kostkou), předpokládá se, že jednotlivé pokusy jsou na sobě nezávislé – výsledek jednoho pokusu neovlivňuje výsledky dalších pokusů.

Klasická pravděpodobnost - příklady

Příklad 2.10. Při slosování sportky je z osudí postupně vylosováno 6 čísel ze 49. Po vylosování těchto čísel je ze zbývajících 43 čísel vylosováno dodatkové číslo. Při správném tipování:

- a) šesti čísel získává sázející výhru 1. pořadí,
- b) pěti čísel a dodatkového čísla ($5 + 1$) získává sázející výhru 2. pořadí,
- c) pěti čísel získává sázející výhru 3. pořadí,
- d) čtyř čísel získává sázející výhru 4. pořadí,
- e) tří čísel získává sázející výhru 5. pořadí.

Vypočítejte pravděpodobnost, se kterou při vsazeném jednom sloupci vyhražete v 1. tahu výhry a) až e).

Klasická pravděpodobnost - příklady

Řešení: ad a) Pravděpodobnost uhodnutí všech 6 čísel:

$$P(6 \text{ čísel}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816}.$$

ad b) Pravděpodobnost uhodnutí 5 čísel a dodatkového čísla:

$$P(5 + 1 \text{ číslo}) = \frac{\binom{6}{5} \times \binom{1}{1} \binom{42}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{13\,983\,816}.$$

ad c) Pravděpodobnost uhodnutí 5 čísel:

$$P(5 \text{ čísel}) = \frac{\binom{6}{5} \times \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13\,983\,816}.$$

Klasická pravděpodobnost - příklady

ad d) Pravděpodobnost uhodnutí 4 čísel:

$$P(4 \text{ čísel}) = \frac{\binom{6}{4} \times \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}.$$

ad e) Pravděpodobnost uhodnutí 3 čísel:

$$P(3 \text{ čísel}) = \frac{\binom{6}{3} \times \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}}.$$

Geometrická pravděpodobnost

1 Definice

- Pravděpodobnostní model, kde se pravděpodobnost určuje jako **poměr dvou délek, ploch nebo objemů**.
- Používá se v situacích, kde **náhodný pokus závisí na kontinuu** (čase, délce, ploše, objemu).

2 Matematický zápis

$$P(A) = \frac{\text{velikost příznivé oblasti}}{\text{velikost celkové oblasti}}$$

Geometrická pravděpodobnost

Příklad 2.12. Jak je pravděpodobné, že meteorit padne na pevninu, víme-li, že pevnina má rozlohu 149 milionů km^2 a moře 361 milionů km^2 ?

Řešení: Celková plocha povrchu Země je:

$$S = 149 + 361 = 510 \text{ milionů } \text{km}^2.$$

Pravděpodobnost, že meteorit padne na pevninu, je dána podílem rozlohy pevniny a celkové rozlohy povrchu Země:

$$P(\text{pevnina}) = \frac{149}{510} \approx 0.2922.$$

Statistická pravděpodobnost

Definice 2.15. Statistickou pravděpodobnost definujeme jako relativní četnost, s jakou určitý jev nastává v dlouhodobém opakování experimentu. Její výpočet se odvozuje z pozorovaných dat a lze ji vyjádřit vztahem

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Počet výskytů jevu } A}{\text{Celkový počet pokusů}}.$$

Statistická pravděpodobnost - předpoklady

1. **Opakovatelnost experimentu:** Pokus, při kterém je zkoumán jev, lze opakovat za stejných podmínek mnohokrát.
2. **Stabilní výsledky při velkém počtu pokusů:** S narůstajícím počtem pokusů se relativní četnost výskytu daného jevu stabilizuje a blíží se určité hodnotě. Tato hodnota je považována za pravděpodobnost jevu.
3. **Nezávislost pokusů:** Jednotlivé pokusy jsou na sobě nezávislé, což znamená, že výsledek jednoho pokusu nemá vliv na výsledky dalších pokusů.
4. **Dostatečně velký počet pokusů:** Statistická pravděpodobnost má smysl pouze v situacích, kdy je k dispozici velký počet pokusů nebo měření. Relativní četnost se totiž stabilizuje až po dostatečně velkém počtu opakování.

Statistická pravděpodobnost - aplikace

1 Diskrétní konečná situace

- Počet možných výsledků je **konečný** (např. hod kostkou).
- Pravděpodobnost lze odhadnout z relativních četností v řadě pokusů.
- **Příklad:** Při 100 hodech kostkou se počet šestek může stabilizovat kolem hodnoty $\frac{1}{6}$.

Statistická pravděpodobnost - aplikace

2 Diskrétní nekonečná situace

- Počet možných hodnot je **nekonečný**, ale hodnoty jsou **diskrétní** (např. počet zákazníků denně).
- Model se zaměřuje na **odhady pravděpodobností jednotlivých hodnot nebo intervalů**.
- **Příklad:** Pravděpodobnost, že do obchodu přijde přesně 10 zákazníků nebo více než 50.

Statistická pravděpodobnost - aplikace

3 Spojitá situace

- Náhodná veličina nabývá **spojitých hodnot** (např. výška člověka).
- Pravděpodobnost, že veličina nabude přesné hodnoty, je **prakticky nulová**.
- Pracuje se s pravděpodobností **spadnutí do určitého intervalu**.
- **Příklad:** Pravděpodobnost, že výška člověka bude mezi **170 a 175 cm**.

Statistická pravděpodobnost - příklady

Příklad 2.16 (spojitý případ). Sledujme dobu, po kterou se zákazníci zdržují v obchodě. Čas pobytu byl zaznamenán a rozdělen do intervalů o délce 5 minut. Data o četnostech pro jednotlivé intervaly jsou shrnuta v následující tabulce:

Tab. 1: Četnosti zdržení se zákazníků v obchodě (intervaly 5 minut)

Interval (min)	Četnost
0-5	77
5-10	83
10-15	25
15-20	15
Celkem	200

Určete jednotlivé statistické pravděpodobnosti.

Statistická pravděpodobnost - příklady

Řešení: Z tabulky je zřejmé, že celkem bylo sledováno 200 zákazníků. Nyní spočítáme statistické pravděpodobnosti pro jednotlivé intervaly na základě relativních četností.

- $P(0-5 \text{ minut}) = \frac{77}{200} = 0,385,$
- $P(5-10 \text{ minut}) = \frac{83}{200} = 0,415,$
- $P(10-15 \text{ minut}) = \frac{25}{200} = 0,125,$
- $P(15-20 \text{ minut}) = \frac{15}{200} = 0,075.$

Opakované pokusy

Definice 2.28. Opakované pokusy představují situace, kdy se experiment, při kterém sledujeme určitý jev, opakuje vícekrát za stejných podmínek. Při takových pokusech nás zajímá, jak se chovají pravděpodobnosti jednotlivých jevů v závislosti na počtu pokusů.

Definice 2.29. Nezávislé opakované pokusy jsou takové, kde výsledek jednoho pokusu nemá žádný vliv na výsledky dalších pokusů. To znamená, že pravděpodobnost daného jevu zůstává ve všech pokusech stejná.

Opakované pokusy – Bernoulliho schéma

1 Definice

- Máme n **nezávislých pokusů**, kde každý pokus může skončit:
 - **Úspěchem** s pravděpodobností p
 - **Neúspěchem** s pravděpodobností $q = 1 - p$
- Pravděpodobnost, že v n **pokusech** nastane právě k **úspěchů**, je dána vztahem:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Opakované pokusy – Bernoulliho schéma

2 Nejpravděpodobnější počet úspěchů

- Nejpravděpodobnější počet úspěchů k splňuje nerovnici:

$$p \cdot (n + 1) - 1 \leq k \leq p \cdot (n + 1)$$

📌 Tento model se využívá např. při analýze pravděpodobnosti výher v opakovaných pokusech (hry, testování výrobků, genetika atd.).

Bernoulliho schéma - příklady

Příklad 2.33. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný student bude znát učivo, je 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že mezi dvaceti vybranými studenty bude:

- a) právě 5 znalých studentů,
- b) nejvýše 2 znalí studenti,
- c) alespoň jeden znalý student?

Řešení:

- $p = 0,05$: pravděpodobnost, že náhodně vybraný student zná učivo,
- $n = 20$: počet pokusů (studentů).

Bernoulliho schéma - příklady

a) Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty bude právě 5 znalých:

$$P(5) = \binom{20}{5} \cdot (0,05)^5 \cdot (0,95)^{15},$$

$$P(5) = \frac{20!}{5!(20-5)!} \cdot (0,05)^5 \cdot (0,95)^{15},$$

$$P(5) = 15504 \cdot 0,0000003125 \cdot 0,46329 = 0,00225.$$

Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty bude právě 5 znalých, je 0,00225.

Bernoulliho schéma - příklady

b) Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty budou nejvýše 2 znalí:

$$P(\text{nejvýše } 2) = P(0) + P(1) + P(2),$$

$$P(0) = \binom{20}{0} \cdot (0,05)^0 \cdot (0,95)^{20} = 1 \cdot 1 \cdot (0,95)^{20} = 0,35849,$$

$$P(1) = \binom{20}{1} \cdot (0,05)^1 \cdot (0,95)^{19} = 20 \cdot 0,05 \cdot 0,37735 = 0,37735,$$

$$P(2) = \binom{20}{2} \cdot (0,05)^2 \cdot (0,95)^{18} = \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 0,0025 \cdot 0,39759 = 0,18846,$$

$$P(\text{nejvýše } 2) = 0,35849 + 0,37735 + 0,18846 = 0,9243.$$

Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty budou nejvýše 2 znalí, je 0,9243.

Bernoulliho schéma - příklady

c) Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty bude alespoň jeden znalý:

$$P(\text{alespoň } 1) = 1 - P(0),$$

$$P(\text{alespoň } 1) = 1 - 0,35849 = 0,64151.$$

Pravděpodobnost, že mezi 20 studenty bude alespoň jeden znalý, je 0,64151.



Závislé opakované pokusy

1 Definice

- Výsledek jednoho pokusu **ovlivňuje pravděpodobnost** výsledků dalších pokusů.
- Pravděpodobnosti se **mohou měnit** v závislosti na předchozích výsledcích.

2 Příklad

- **Výběr kuliček z urny bez vracení** – po každém výběru se **mění počet kuliček**, což ovlivňuje pravděpodobnosti.

Závislé opakované pokusy

3 Použití v praxi

- **Losování cen** – každý výběr mění množinu možných výsledků.
- **Kontrola kvality** – testování výrobků, kde se vzorky nevracejí zpět.
- **Simulace procesů** – kde výsledky závisí na předchozích výběrech.
-  **Důležité:** U těchto situací je nutné brát v úvahu **změny v prostoru možných výsledků** při každém dalším pokusu.

Závislé opakované pokusy – výběr bez vracení

1 Definice

- Máme soubor **N prvků**, z nichž **M** má sledovanou vlastnost.
- Postupně vybereme **n prvků** bez vracení.
- Hledáme pravděpodobnost, že mezi vybranými prvky bude přesně **k** prvků se sledovanou vlastností.

2 Pravděpodobnostní vzorec

$$P(A_k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- $\binom{M}{k}$ – způsoby výběru **k** prvků s požadovanou vlastností.
- $\binom{N-M}{n-k}$ – způsoby výběru **zbývajících prvků** bez této vlastnosti.
- $\binom{N}{n}$ – celkový počet možných výběrů **n prvků** ze všech **N**.

Závislé opakované pokusy – výběr bez vracení

3 Příklad použití

- **Kontrola kvality:** Z 100 výrobků je 20 vadných. Vybereme **10 výrobků**. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou **přesně 3 vadné**?
- **Losování:** V urně je 50 lístků, z nichž 10 je výherních. Náhodně vytáhneme 5 lístků. Jaká je pravděpodobnost, že budou **2 výherní**?

Výběr bez vracení - příklady

Máme 50 výrobků, mezi nimiž je 8 nekvalitních. Náhodně vybereme 10 výrobků, přičemž vybrané výrobky nevracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vybranými bude přesně 6 dobrých výrobků?

Řešení

Použijeme hypergeometrické rozdělení, kde:

- Celkový počet výrobků: $N = 50$
- Počet kvalitních výrobků: $K = 50 - 8 = 42$
- Počet vybraných výrobků: $n = 10$
- Počet dobrých výrobků ve výběru: $k = 6$

Pravděpodobnostní vzorec pro hypergeometrické rozdělení je:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Výběr bez vracení - příklady

Dosadíme hodnoty:

$$P(X = 6) = \frac{\binom{42}{6} \binom{8}{4}}{\binom{50}{10}}$$

Nyní spočítáme pravděpodobnost.

Výsledek

Pravděpodobnost, že mezi 10 vybranými výrobky bude **přesně 6 dobrých**, je přibližně **0,0357** (tedy **3,57 %**).