XSZD Přednáška č. 5

Náhodná veličina 2

Jiří Fišer

MVŠO

11. a 13. 3. 2024

2.4 Základní diskrétní rozdělení pravděpodobností

- Alternativní rozdělení
- Binomické rozdělení
- Hypergeometrické rozdělení
- Diskrétní rovnoměrné rozdělení
- Poissonovo rozdělení

Alternativní rozdělení $X \sim \mathrm{Alt}(p)$

Model: **pokus**, ve kterém nastávají pouze **2 různé (dichotomické) výsledky** a sledujeme, co nastane

- indikátor náhodného jevu (jev nastal/nenastal)
- pravdivostní hodnota výroku (pravda/lež)
- úspěšnost pokusu (úspěch/neúspěch)
- kvalita výrobku (vadný/ bez chyby)
- ...

Parametr rozdělení

- p ... pravděpodobnost úspěchu

Alternativní rozdělení $X \sim \mathrm{Alt}(p)$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{úspěch} \\ 0 & \text{neúspěch} \end{cases}$$

Pravděpodobnostní funkce

$$\mathrm{P}(X = 1) = p, \quad \mathrm{P}(X = 0) = 1 - p, \quad p \in (0, 1)$$

Distribuční funkce

$$F(x; p) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = p, \quad D(X) = p(1 - p), \ \sigma_X = \sqrt{p(1 - p)}$$

Binomické rozdělení $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$

Model: **počet úspěchů**, které nastanou při provedení n **nezávislých dichotomických pokusů**

Příklady

- počet děvčat v rodině s n dětmi
- počet zmetků mezi n výrobky
- počet úspěšných zkoušek přístroje z celkem n zkoušek

Parametry rozdělení

- n ... počet nezávislých dichotomických pokusů
- p ... pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu

Binomické rozdělení $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$

Pravděpodobnostní funkce (Bernoulliho schéma)

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, \ldots, n, \quad n \geq 1,\ p \in (0, 1)$$

Distribuční funkce

$$F(x; p, n) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & 0 \leq x < n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

Excel: BINOM.DIST(k;n;p;logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $P(X = k)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(k)$

Binomické rozdělení $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p), \quad \sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$$

$p = 1/2$ symetrické rozdělení, jinak asymetrické

Příklad (Barva květů hrachu)

Je křížen bělokvětý hrách s fialovým, přičemž předpokládáme, že rostliny, na nichž je pokus prováděn, nebyly dosud kříženy. Podle pravidel dědičnosti lze očekávat, že $\frac{3}{4}$ nově vzniklých rostlin (potomků) pokvetou fialově a $\frac{1}{4}$ bíle. Zatím vzklíčilo 10 nových rostlin. ***Jaká je pravděpodobnost, že 9 pokvete fialově?***

Nějaký nápad?

Příklad (Barva květů hrachu)

Je křížen bělokvětý hrách s fialovým, přičemž předpokládáme, že rostliny, na nichž je pokus prováděn, nebyly dosud kříženy. Podle pravidel dědičnosti lze očekávat, že $\frac{3}{4}$ nově vzniklých rostlin (potomků) pokvetou fialově a $\frac{1}{4}$ bíle. Zatím vzklíčilo 10 nových rostlin. ***Jaká je pravděpodobnost, že 9 pokvete fialově?***

Řešení

$X \ldots$ počet fialově kvetoucích rostlin z 10 rostlin

$$X \sim \mathrm{Bi}(10; 0{,}75)$$

$$\mathrm{P}(X = 9) = \binom{10}{9} 0{,}75^9 0{,}25^1 = 0{,}188$$

Excel: BINOM.DIST(9;10;3/4;0)

Hypergeometrické rozdělení $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$

Model: počet úspěchů, které nastanou při provedení *n* **závislých dichotomických pokusů** (výběr bez vracení)

Příklady

- počet vybraných zmetků, vybíráme-li n výrobků z N výrobků, přičemž M z nich jsou zmetky
- počet vybraných nenaučených otázek, losujeme-li n otázek z N, přičemž na M z nich nejsme naučeni

Parametry rozdělení

- n ... počet vybraných jednotek (závislých dichotomických pokusů)
- N ... počet všech jednotek
- M ... počet jednotek, které mají sledovanou vlastnost

Hypergeometrické rozdělení $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$

Pravděpodobnostní funkce

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \; k = 0, \ldots, n, \quad N \geq n \geq 1, \; 0 \leq M \leq N$$

Distribuční funkce

$$F(x; N, M, n) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k \leq x} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & 0 \leq x < n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = \frac{n \cdot M}{N}, \quad D(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

Hypergeometrické rozdělení $X \sim \mathrm{Hg}(N, M, n)$

Excel: HYPGEOM.DIST(k;n;M;N;logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $\mathrm{P}(X = k)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(k)$

Příklad (Vadné výrobky)

Mezi 100 výrobky je 20 zmetků. Vybereme 10 výrobků a sledujeme počet zmetků mezi vybranými výrobky. ***Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali právě 3 zmetky?***

Nějaký nápad?

Příklad (Vadné výrobky)

Mezi 100 výrobky je 20 zmetků. Vybereme 10 výrobků a sledujeme počet zmetků mezi vybranými výrobky. ***Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali právě 3 zmetky?***

Řešení

X ... počet vybraných zmetků

$N = 100,\ M = 20,\ n = 10$

$$X \sim \mathrm{Hg}(100; 20; 10)$$

$$\mathrm{P}(X = 3) = \frac{\binom{20}{3}\binom{80}{7}}{\binom{100}{10}} = 0{,}209$$

Excel: HYPGEOM.DIST(3;10;20;100;0)

Diskrétní rovnoměrné rozdělení $X \sim \mathrm{Ro}(n)$

Model: **pokus**, který má *n* **různých výsledků**, které jsou **stejně pravděpodobné** a sledujeme, co nastane

Příklady

- hod pravidelnou kostkou $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p(i) = \frac{1}{6}$
- hod férovou mincí $M = \{0, 1\}$, $p(i) = \frac{1}{2}$
- padnutí čísla v ruletě v Monte Carlo $M = \{0, 1, 2, \dots, 36\}$, $p(i) = \frac{1}{37}$
- padnutí čísla v ruletě v Las Vegas $M = \{0, 00, 1, 2, \dots, 36\}$, $p(i) = \frac{1}{38}$

Pravděpodobnostní funkce

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{1}{n}, \; x = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Poissonovo rozdělení $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$

Model: **počet událostí**, které nastanou při provedení **velkého počtu nezávislých dichotomických pokusů**, přičemž **pravděpodobnost** vzniku události **je velmi malá**

- výskyt jevu v daném časovém/prostorovém intervalu nezávisí co se stalo jindy/jinde
- v daném okamžiku/bodě nemohou nastat 2 jevy současně
- pro každý časový okamžik/bod je pravděpodobnost výskytu jevu v malém časovém/prostorovém intervalu stejná
- λ ... intenzitu výskytu události za jednotku času/délky/objemu

Příklady

- # částic emit. za jedn. času radioaktivní látkou dané hmotnosti
- # signálů, které dojdou do telefonní ústředny za jednotku času
- # jednob. organizmů na ploše velikosti *t* v zorném poli mikroskopu
- # dopravních nehod za jednotku času
- # typografických chyb na stránce
- # volných dnů ve firmě během měsíce

Poissonovo rozdělení $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$

Pravděpodobnostní funkce

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0$$

Distribuční funkce

$$F(x; \lambda) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k \leq x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & x \geq 0 \end{cases}$$

Číselné charakteristiky

$$\mathrm{E}(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda, \quad \sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

Excel: POISSON.DIST(k;λ;logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $\mathrm{P}(X = k)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(k)$

Příklad (Poruchy obráběcího stroje)

Při práci obráběcího stroje dochází náhodně k výpadkům. Průměrně jsou 2 výpadky za 24 hodin.

a) *Jaká je pst, že za 24 hodin dojde alespoň k jednomu výpadku?*

b) *Jaká je pst, že za týden nebudou více než 3 výpadky?*

Nějaký nápad?

Příklad (Poruchy obráběcího stroje)

Při práci obráběcího stroje dochází náhodně k výpadkům. Průměrně jsou 2 výpadky za 24 hodin.

a) ***Jaká je pst, že za 24 hodin dojde alespoň k jednomu výpadku?***

b) *Jaká je pst, že za týden nebudou více než 3 výpadky?*

Řešení

$X \ldots$ počet výpadků za 1 den

$$\text{průměrně 2 výpadky za 24 hodin} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

$$X \sim \mathrm{Po}(2)$$

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathrm{P}(X \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(X < 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - e^{-2} = 0{,}865$$

Excel: 1-POISSON.DIST(0;2;0)

Příklad (Poruchy obráběcího stroje)

Při práci obráběcího stroje dochází náhodně k výpadkům. Průměrně jsou 2 výpadky za 24 hodin.

a) *Jaká je pst, že za 24 hodin dojde alespoň k jednomu výpadku?*

b) ***Jaká je pst, že za týden nebudou více než 3 výpadky?***

Řešení

Y ... počet výpadků za 1 týden

$$\begin{aligned} &\text{průměrně 2 výpadky/24 hodin} \\ \Leftrightarrow \quad &\text{průměrně } 2 \cdot 7 = 14 \text{ výpadků/týden} \end{aligned}$$

$$Y \sim \mathrm{Po}(14)$$

$$\mathrm{P}(Y \leq 3) = e^{-14}\left(1 + 14 + \frac{14^2}{2!} + \frac{14^3}{3!}\right) = 0{,}000474$$

Excel: POISSON.DIST(3;14;1)

2.5 Základní spojitá rozdělení pravděpodobností

- Rovnoměrné rozdělení
- Exponenciální rozdělení
- Normální rozdělení

Rovnoměrné rozdělení $X \sim \mathrm{R}(a, b)$

Model $X \sim \mathrm{R}(0, d)$

- modelování **doby čekání na událost, která nastává v pravidelných intervalech** délky d
- čekání na událost zahajujeme v okamžiku, který nikterak nesouvisí s minulým ani budoucím výskytem události

Příklady

- doba čekání na autobusové zastávce na autobus, který jezdí po d minutách $\mathrm{R}(0, d)$
- chyba při zaokrouhlení na 1 desetinné místo $\mathrm{R}(-0{,}05; 0{,}05)$
- chyba při stanovení času z digitálních hodin v minutách $\mathrm{R}(0; 60)$ sekund

Rovnoměrné rozdělení $X \sim \mathrm{R}(a, b)$

Hustota

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b),\ -\infty < a < b < \infty \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

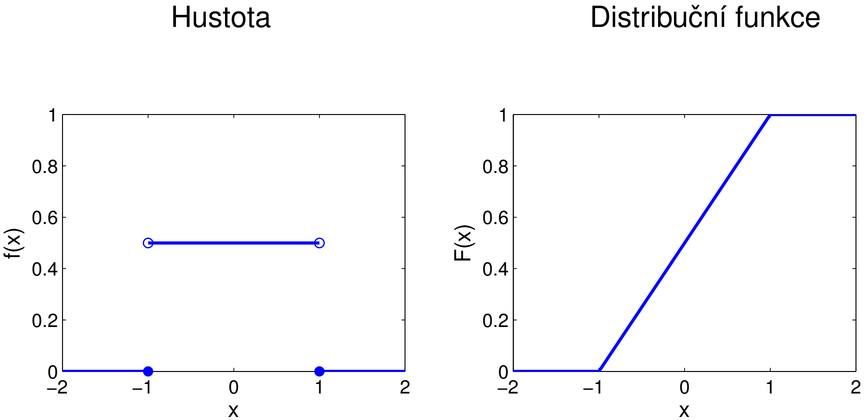
Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Číselné charakteristiky

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Rovnoměrné rozdělení $X \sim \mathrm{R}(-1, 1)$



Příklad (Dodávka zboží)

Prodejna očekává dodávku nového zboží určitý den v době od 8 do 10 hodin. Podle sdělení dodavatele je uskutečnění dodávky stejně možné kdykoliv během tohoto časového intervalu. ***Jaká je pravděpodobnost, že zboží bude dodáno v době od půl deváté do tři čtvrtě na devět?***

Nějaký nápad?

Příklad (Dodávka zboží)

Prodejna očekává dodávku nového zboží určitý den v době od 8 do 10 hodin. Podle sdělení dodavatele je uskutečnění dodávky stejně možné kdykoliv během tohoto časového intervalu. ***Jaká je pravděpodobnost, že zboží bude dodáno v době od půl deváté do tři čtvrtě na devět?***

Řešení

X ... čas příjezdu v hodinách

$$X \sim \mathrm{Ro}(8, 10)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a, b) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (8, 10) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pravděpodobnost, že zboží bude dodáno v době od půl deváté do tři čtvrtě na devět

$$P(8{,}5 \leq X \leq 8{,}75) = \int_{8{,}5}^{8{,}75} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}[8{,}75 - 8{,}5] = 0{,}125$$

Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

Model: modelování doby/vzdálenosti čekání na událost, která nemá paměť, tj. zbývající doba/vzdálenost čekání nezávisí na tom, jak dlouho už na událost čekáme

Příklady

- doba životnosti zařízení, u kterého dochází k poruše náhodně, nikoliv z důsledku opotřebení
- délka telefonního hovoru
- doba mezi 2 příchozími telefonáty

Parametr rozdělení

- $\lambda \ldots$ míra rizika výskytu sledované události za jednotku času/vzdálenosti
- $\frac{1}{\lambda} \ldots$ očekávaná doba/vzdálenost do výskytu sledované události

Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

Hustota

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0,\ \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Číselné charakteristiky

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

Pozor! Někdy se používá jiná parametrizace

$$X \sim \mathrm{Ex}(\theta), \quad \theta = 1/\lambda$$

Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

Hustota

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0,\ \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

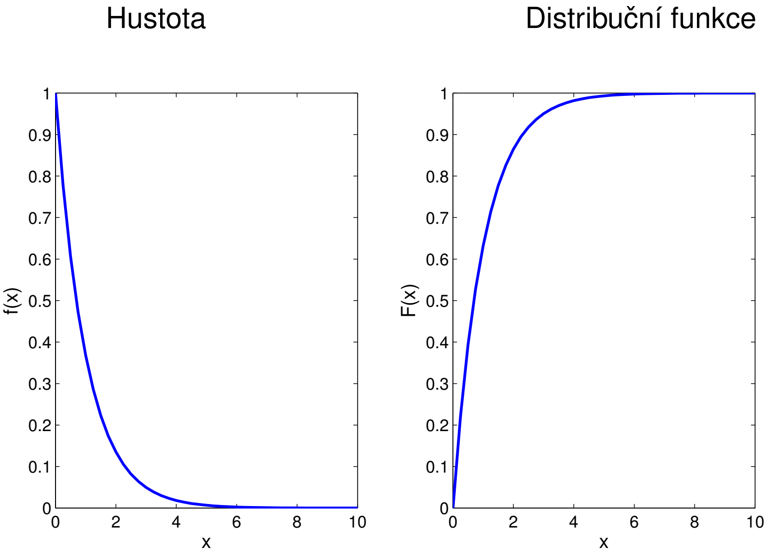
Číselné charakteristiky

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}$$

Pozor! Někdy se používá jiná parametrizace

$$X \sim \mathrm{Ex}(\theta), \quad \theta = 1/\lambda$$

Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(1)$



Exponenciální rozdělení $X \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

Excel: EXPON.DIST(x;λ;logická proměnná)

- logická proměnná = 0 pro výpočet $f(x)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(x)$

Příklad (Obsluha v restauraci)

Doba čekání hosta na pivo v restauraci U Lva je průměrně 5 minut. Určete

a) *pravděpodobnost, že host bude na pivo čekat déle než 12 minut*

b) *dobu čekání hosta na pivo, během níž bude obsloužen s pravděpodobností 0,9.*

Nějaký nápad?

Příklad (Obsluha v restauraci)

Doba čekání hosta na pivo v restauraci U Lva je průměrně 5 minut. Určete

a) *pravděpodobnost, že host bude na pivo čekat déle než 12 minut*

b) *dobu čekání hosta na pivo, během níž bude obsloužen s pravděpodobností 0,9.*

Řešení X ... doba čekání na pivo (v minutách)

průměrná doba čekání na pivo ... 5 minut

$$X \sim \mathrm{Ex}(\lambda),\ \lambda = \frac{1}{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0 \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{5}x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Pravděpodobnost, že host bude na pivo čekat déle než 12 minut

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12) = 1 - F(12) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{5}\cdot 12}\right)$$
$$= e^{-\frac{12}{5}} = 0{,}09$$

Excel: 1-EXPON.DIST(12;1/5;1)

Doba čekání hosta na pivo, během níž bude obsloužen s pravděpodobností 0,9

$$P(0 \leq X \leq t) = 0{,}9$$

$$F(t) - F(0) = 0{,}9$$

$$1 - e^{-t/5} - 0 = 0{,}9$$

$$e^{-t/5} = 0{,}1$$

$$t = -5 \ln(0{,}1) \doteq 11{,}51 \text{ min} \doteq 11 \text{ min } 30 \text{ s}$$

Normální rozdělení $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Hustota

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ \mu \in \mathbb{R}^1,\ \sigma > 0.$$

Vlastnosti

- X může nabývat jakýchkoli reálných hodnot
- hustota je symetrická kolem μ
- hustota nabývá maxima v bodě $x = \mu$, ($f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$)
- normální rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ nazýváme normované (standardizované) normální rozdělení.

- μ parametr polohy (střední hodnota)
- σ parametr měřítka (směrodatná odchylka)

Normální rozdělení $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Číselné charakteristiky

$$E(X) = \mu, \quad x_{0.5} = \mu, \quad \hat{x} = \mu, \quad D(X) = \sigma^2$$

$$\gamma_1(X) = 0 \text{ (šikmost)}, \quad \gamma_2(X) = 0 \text{ (špičatost)}$$

Excel: NORM.DIST(x;μ;σ;logická proměnná)

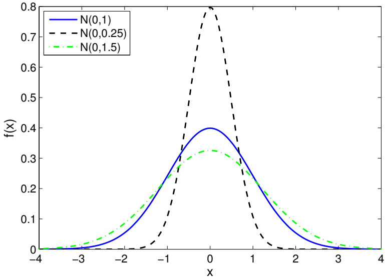
- logická proměnná = 0 pro výpočet $f(x)$
- logická proměnná = 1 pro výpočet $F(x)$

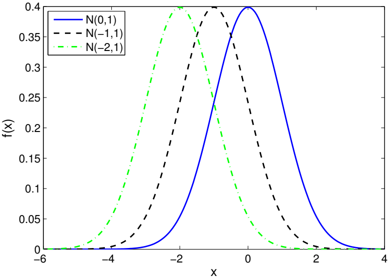
NORM.S.DIST(x;logická proměnná) pro práci s $\mathrm{N}(0, 1)$

NORM.INV(α;μ;σ) výpočet α kvantilu

NORM.S.INV(α) výpočet α kvantilu pro $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$

Hustota normálního rozdělení

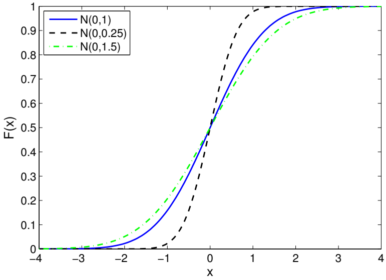


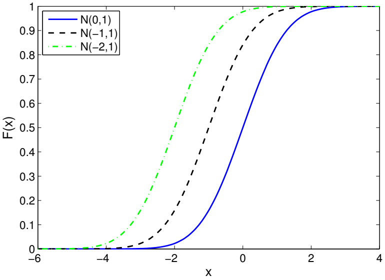


$$X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2): \; f(-x) = f(x), \quad u_{1-\alpha} = -u_\alpha$$

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2): \; f(-x+\mu) = f(x+\mu)$$

Distribuční funkce normálního rozdělení





$$X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) : \; F(-x) = 1 - F(x)$$

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) : \; F(-x + \mu) = 1 - F(x + \mu)$$

Vztah mezi $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ a $\mathrm{N}(0, 1)$

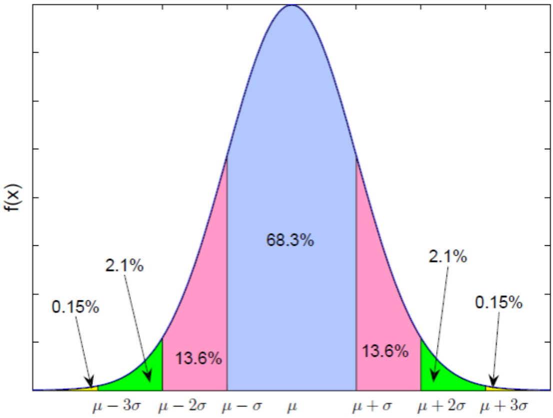
$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

$$X \sim \mathrm{N}(0, 1),\ \mu \in \mathbb{R}^1,\ \sigma^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma X + \mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

Pravidlo 3 sigma

Pro $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ platí

$$\mathrm{P}[\mu - \sigma < X < \mu + \sigma] \approx 68{,}3\%$$
$$\mathrm{P}[\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma] \approx 95{,}5\%$$
$$\mathrm{P}[\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma] \approx 99{,}7\%$$



Příklad (IQ testy)

Hodnota IQ se řídí normálním rozdělením $\mathrm{N}(100, 15^2)$. *Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba bude mít*

a) *IQ více než 130 bodů,*
b) *IQ méně než 90 bodů,*
c) *IQ v intervalu od 100 do 130 bodů?*

Nějaký nápad?

Příklad (IQ testy)

Hodnota IQ se řídí normálním rozdělením $\mathrm{N}(100, 15^2)$. *Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba bude mít*

a) *IQ více než 130 bodů,*

b) *IQ méně než 90 bodů,*

c) *IQ v intervalu od 100 do 130 bodů?*

Řešení. X ... hodnota IQ (v bodech)

$$X \sim \mathrm{N}(100, 15^2) \quad \Leftrightarrow \quad U = \frac{X - 100}{15} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

$$\mathrm{P}(X > 130) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 130) = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{X - 100}{15} \leq \frac{130 - 100}{15}\right)$$

$$= 1 - \mathrm{P}(U \leq 2) = 1 - F_{N(0;1)}(2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Excel: 1-NORM.DIST(130;100;15;1)

1-NORM.S.DIST(2;1)

$$P(X < 90) = P\left(\frac{X - 100}{15} < \frac{90 - 100}{15}\right)$$

$$= P\left(U < -\frac{2}{3}\right) = F_{N(0;1)}\left(-\frac{2}{3}\right) = 1 - F_{N(0;1)}\left(\frac{2}{3}\right) = 0{,}2525$$

$$P(100 < X < 130) = P\left(\frac{100 - 100}{15} < \frac{X - 100}{15} < \frac{130 - 100}{15}\right)$$

$$= P(0 < U < 2) = F_{N(0;1)}(2) - F_{N(0;1)}(0) = 0{,}9772 - \frac{1}{2} = 0{,}4772$$

Alternativně přímý výpočet s využitím softwaru

$$\mathrm{P}(100 < X < 130) = F(130) - F(100) = 0{,}9772 - \frac{1}{2} = 0{,}4772,$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce $N(100, 15^2)$