XSZD Přednáška č. 4

Náhodná veličina 1

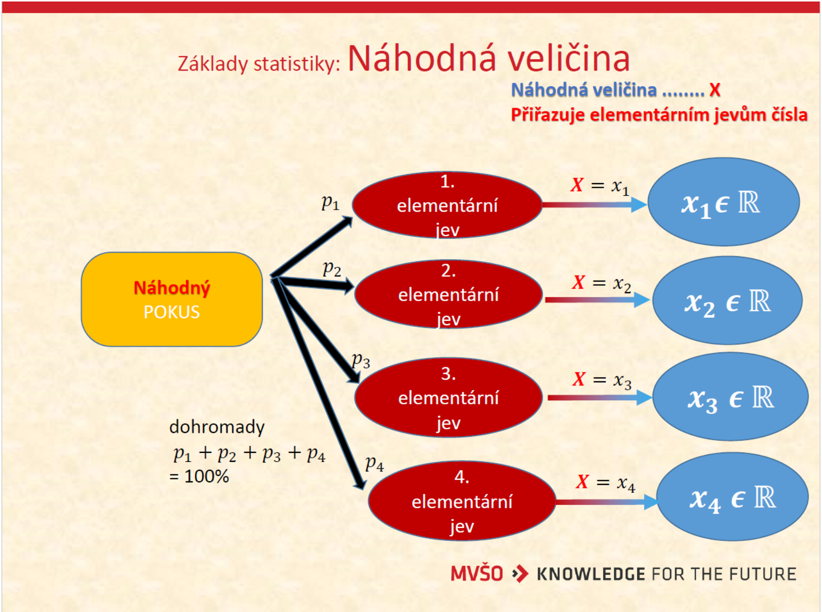
Jiří Fišer

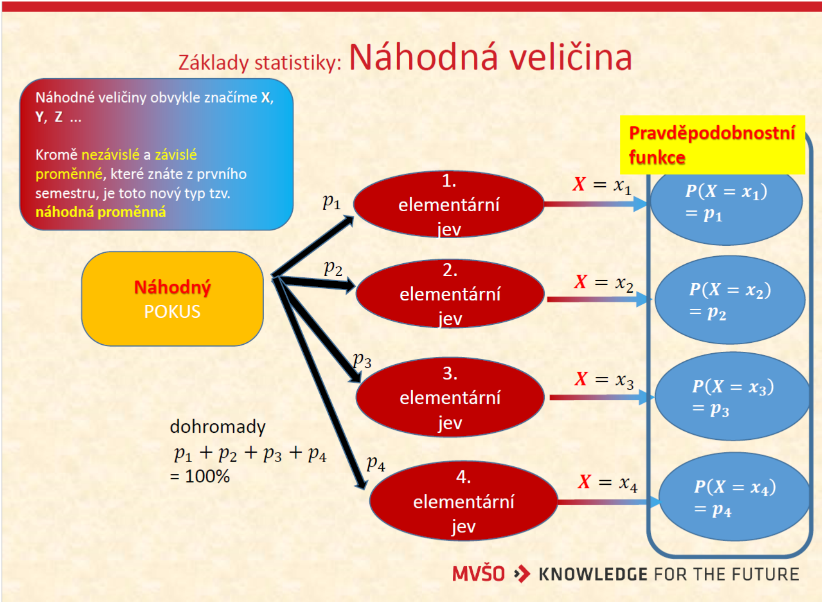
MVŠO

4. a 6. 3. 2024

Obsah

1. Náhodná veličina
   - Diskrétní náhodná veličina
   - Spojitá náhodná veličina
2. Číselné charakteristiky náhodné veličiny
   - polohy
   - variability
   - šikmosti
   - špičatosti


Základy statistiky: Náhodná veličina
Náhodná veličina X
Přiřazuje elementárním jevům čísla
Náhodný POKUS
p_1
p_2
p_3
p_4
1. elementární jev
2. elementární jev
3. elementární jev
4. elementární jev
$X = x_1$
$X = x_2$
$X = x_3$
$X = x_4$
$x_1 \in \mathbb{R}$
$x_2 \in \mathbb{R}$
$x_3 \in \mathbb{R}$
$x_4 \in \mathbb{R}$
dohromady
$p_1 + p_2 + p_3 + p_4$
= 100%
MVŠO KNOWLEDGE FOR THE FUTURE


Základy statistiky: Náhodná veličina
Náhodné veličiny obvykle značíme X, Y, Z ...
Kromě nezávislé a závislé proměnné, které znáte z prvního semestru, je toto nový typ tzv. náhodná proměnná
Pravděpodobnostní funkce
Náhodný POKUS
p_1
p_2
p_3
p_4
1. elementární jev
2. elementární jev
3. elementární jev
4. elementární jev
$X = x_1$
$X = x_2$
$X = x_3$
$X = x_4$
$P(X = x_1) = p_1$
$P(X = x_2) = p_2$
$P(X = x_3) = p_3$
$P(X = x_4) = p_4$
dohromady $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ = 100%
MVŠO KNOWLEDGE FOR THE FUTURE

2. Náhodná veličina

Definice (Náhodná veličina)

Náhodná veličina *X je reálná funkce* $X : \Omega \to \mathbb{R}$

- X, Y, Z ... náhodná veličina
- x, y, z ... hodnota náhodné veličiny = **realizace náhodné veličiny**

Dělení náhodných veličin podle oboru hodnot $M \subset \mathbb{R}$:

- **diskrétní:** M konečná nebo spočetná
- **spojitá:** M interval

2.1 Diskrétní náhodná veličina

- jednoznačně určena posloupností reálných čísel $\{x_n\}$ a posloupností pravděpodobností $\{p_n = \mathrm{P}(X = x_n)\}$

Příklad

Diskrétní náhodná veličina X

- *nabývá hodnot* $M = \{1, 2, 4, 5\}$
  s pravděpodobnostmi $p(k) = \mathrm{P}[X = k]$, *kde*
- $p(1) = \dfrac{1}{3}$, $p(2) = \dfrac{1}{4}$, $p(4) = \dfrac{1}{6}$, $p(5) = \dfrac{1}{4}$ *a* $p(x) = 0$ *jinak.*

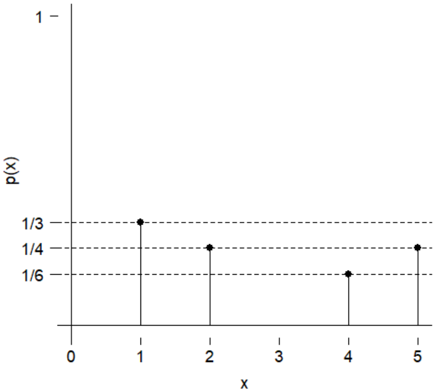
$$M = \{1, 2, 4, 5\}$$

k	1	2	4	5
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Pravděpodobnostní funkce

Definice (Pravděpodobnostní funkce)

Funkce $p(x) = \mathrm{P}(X = x)$ *se nazývá* ***pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny*** X.



Pravděpodobnostní funkce

Definice (Pravděpodobnostní funkce)

Funkce $p(x) = \mathrm{P}(X = x)$ se nazývá ***pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny*** X.

Vlastnosti

- $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sum\limits_{x \in M} p(x) = 1$
- Výpočet pravděpodobnosti (jevu B)

$$\mathrm{P}(X \in B) = \sum_{n: x_n \in B \cap M} \mathrm{P}(X = x_n) = \sum_{n: x_n \in B \cap M} p(x_n)$$

(Součet pravděpodobností všech čísel/výsledků, která patří do B. Jelikož nenulové pasti jsou jen v M, tak proto $B \cap M$.)

Distribuční funkce

Definice (Distribuční funkce)

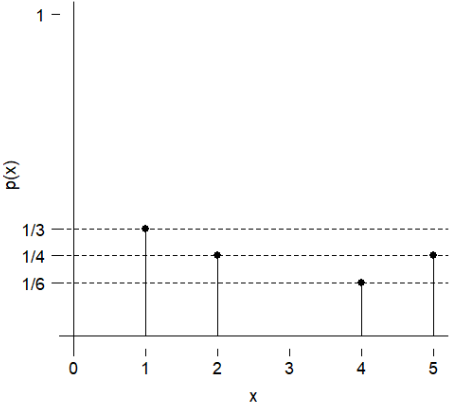
Distribuční funkce *náhodné veličiny X je reálná funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem*

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

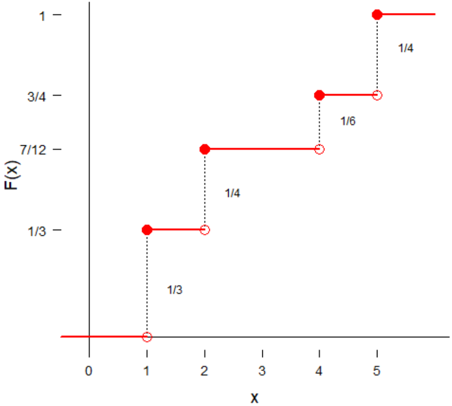
Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{x_i \in M \\ x_i \leq x}} \mathrm{P}(X = x_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pravděpodobnostní funkce



Distribuční funkce



Příklad distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny

Příklad

Diskrétní náhodná veličina X

- *nabývá hodnot* $M = \{1, 2, 4, 5\}$
  s pravděpodobnostmi $p(k) = \mathrm{P}[X = k]$, *kde*
- $p(1) = \frac{1}{3}$, $p(2) = \frac{1}{4}$, $p(4) = \frac{1}{6}$, $p(5) = \frac{1}{4}$ *a* $p(x) = 0$ *jinak.*

Určete příslušnou distribuční funkci.

$$M = \{1, 2, 4, 5\}$$

k	1	2	4	5
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
$F(k) = \sum_{k_i \leq k} \mathrm{P}(X = k_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	1

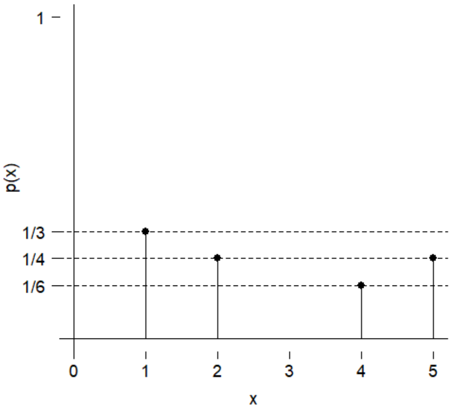
k	1	2	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
$F(k) = \sum_{k_i \leq k} P(X = k_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	1

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x) = \sum_{\substack{k_i \in M \\ k_i \leq x}} \mathrm{P}(X = k_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

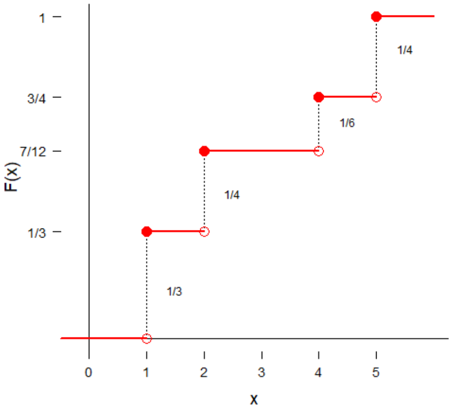
x	$(-\infty, 1)$	$\langle 1, 2)$	$\langle 2, 4)$	$\langle 4, 5)$	$\langle 5, \infty)$
$F(x)$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{12} & 2 \leq x < 4 \\ \frac{3}{4} & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

Pravděpodobnostní funkce



Distribuční funkce



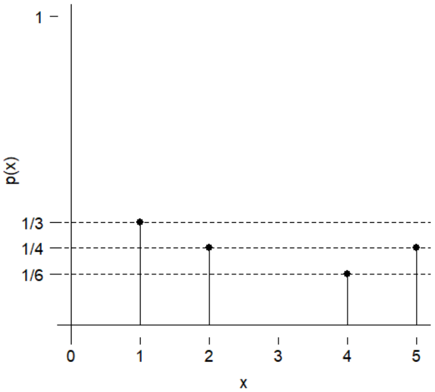
Vlastnosti distribuční funkce

1. $F(x) \in \langle 0, 1 \rangle$
2. neklesající
3. zprava spojitá
4. definovaná na $\mathbb{R}$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
6. $\mathrm{P}(X = x_0) = F(x_0) - \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x)$ (výška skoku v bodě x_0)

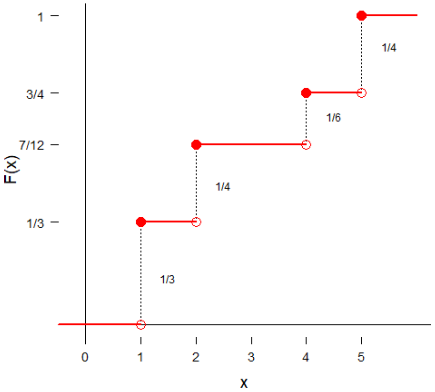
Pozor:
Někdy, např. ve skriptech Otipka, Šmajstrla, je distribuční funkce definovaná s **ostrou nerovností**

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x) \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{spojitá zleva}$$

Pravděpodobnostní funkce



Distribuční funkce

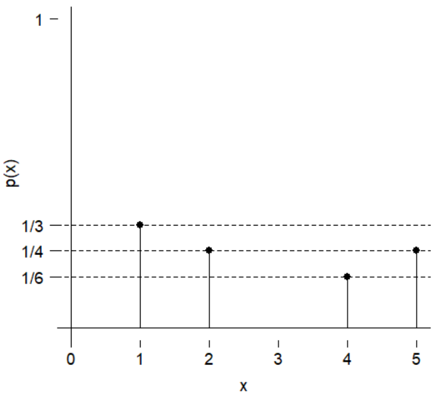


Pravděpodobnost, že X nabývá hodnoty **alespoň 3**

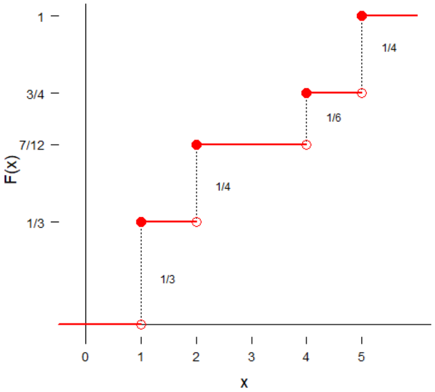
$$\mathrm{P}(X \geq 3) = \mathrm{P}(X = 4) + \mathrm{P}(X = 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$\mathrm{P}(X \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(X < 3) = 1 - \mathrm{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

Pravděpodobnostní funkce



Distribuční funkce



Pravděpodobnost, že X nabývá hodnoty **nejvýše 4**

$$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

$$P(X \leq 4) = F(4) = \frac{3}{4}$$

2.2 Spojitá náhodná veličina

Diskrétní náhodná veličina

- značí „počet“
- počet autohavárií v daném časovém intervalu (Poissonovo rozdělení)
- počet 6, které padly v 10 hodech pravidelnou kostkou (Binomické rozdělení)

$$\mathrm{P}(X = x_0) = p(x_0) \in \langle 0, 1\rangle \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Spojitá náhodná veličina

- značí „měření“

$$\mathrm{P}(X = x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

- jsme schopni najít pouze interval, kde se X realizuje

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) \in \langle 0, 1\rangle \quad \forall a \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}$$

Spojitá náhodná veličina

Definice

Náhodná veličina *X se nazývá (absolutně)* ***spojitá****, jestliže existuje nezáporná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkce $f(x)$ se nazývá ***hustota*** *(rozdělení pravděpodobností) náhodné veličiny X.*

Vlastnosti hustoty

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Vlastnosti hustoty a distribuční funkce spojité náhodné veličiny

$f(x) = F'(x)$ v každém bodě x, kde je F diferencovatelná

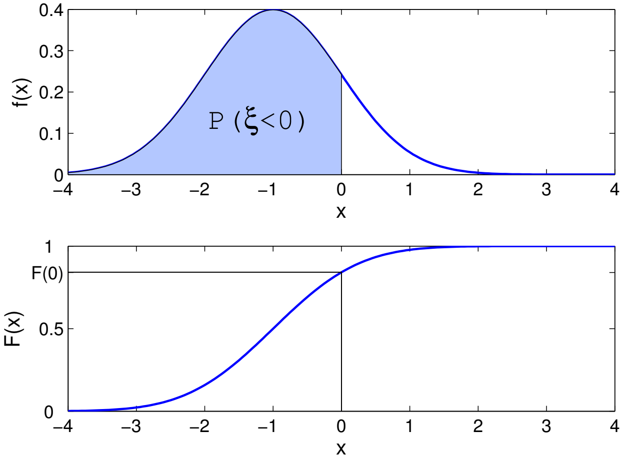
$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \mathrm{P}(a < X \leq b) = \mathrm{P}(a \leq X < b) = \mathrm{P}(a < X < b)$$

$$\mathrm{P}(X \in B) = \int_B f(t)\,\mathrm{d}t$$

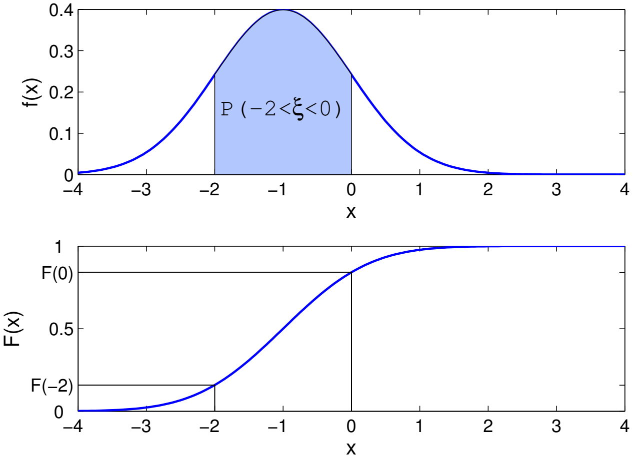
Výpočet pravděpodobností pomocí $F(x)$ a $f(x)$

$$\mathrm{P}(\xi < 0) = F(0) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$$



Výpočet pravděpodobností pomocí $F(x)$ a $f(x)$

$$P(-2 < \xi < 0) = F(0) - F(-2) = \int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$$



Příklad (Rovnoměrné rozdělení na intervalu $(2,6)$)

Spojitá náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{4}(x-2) & 2 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X a vypočítejte pravděpodobnost, že X nabývá hodnoty a) alespoň 4, b) v intervalu $(3,5)$.

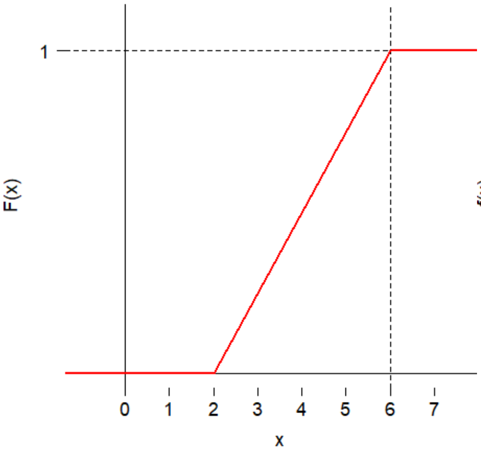
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ \frac{1}{4}(x-2) & 2 < x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Řešení.

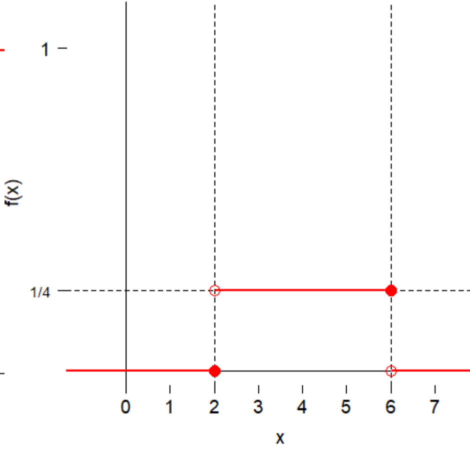
$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\left[\frac{1}{4}(x-2)\right]' = \frac{1}{4} \quad \text{pro } x \in (2, 6\rangle$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 2 < x \leq 6 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



Obrázek: Distribuční funkce X



Obrázek: Hustota pravděpodobnosti X

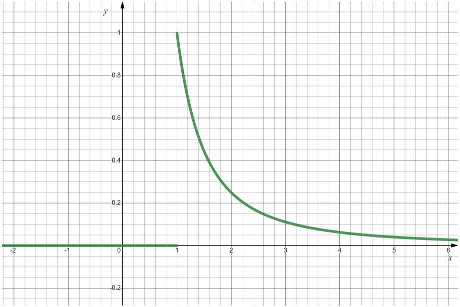
- $P(X \geq 4) = \int_4^\infty f(x)dx = \int_4^6 \frac{1}{4}dx = \left[\frac{x}{4}\right]_4^6 = \frac{1}{4}(6-4) = \frac{1}{2}$
- $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - F(4) = 1 - \frac{1}{4}(4-2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $P(3 < X < 5) = \int_3^5 \frac{1}{4}dx = \left[\frac{x}{4}\right]_3^5 = \frac{1}{4}(5-3) = \frac{1}{2}$
- $P(3 < X < 5) = F(5) - F(3) = \frac{1}{4}(5-2) - \frac{1}{4}(3-2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Příklad

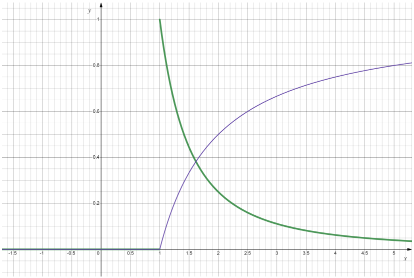
Spojitá náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x > 1 \end{cases}$$

1. *Určete její distribuční funkci.*
2. *Spočítejte pravděpodobnost $P(1 \leq X \leq 5)$.*



$$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ \frac{1}{x^2} & x>1\end{cases}\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\qquad F(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ 1-\frac{1}{x} & x>1\end{cases}$$



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \quad \text{pro } x\le 1$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1} 0dt+\int_{1}^{x}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x=-\frac{1}{x}+1 \quad \text{pro } x>1$$

$$P(1 \leq X \leq 5) = \int_1^5 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^5 = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$

$$P(1 \leq X \leq 5) = F(5) - F(1) = \left(1 - \frac{1}{5} \right) - 0 = \frac{4}{5}$$

2.3 Číselné charakteristiky

Náhodnou veličinu X jednoznačně určují a plně popisují

- X diskrétní
  - pravděpodobnostní funkce
  - distribuční funkce
- X spojitá
  - hustota
  - distribuční funkce

číselné charakteristiky = shrnutí informací o X do několika čísel, které ji dostatečně charakterizují

Typy číselných charakteristik

Členění dle popisované vlastnosti

- **polohy:** „střed“, kolem kterého jsou koncentrovány hodnoty X
  - střední hodnota
  - modus
  - kvantily
- **variability:** rozptýlenost hodnot X kolem charakteristiky polohy
  - rozptyl
  - směrodatná odchylka
- **šikmost:** tvar rozdělení pravděpodobností (symetrické nebo asymetrické)
- **špičatost:** tvar rozdělení pravděpodobností (špičaté nebo zploštělé)

Charakteristiky polohy

- „střed“ skupiny údajů, kolem kterého všechny hodnoty kolísají

- chceme-li charakterizovat sledovanou veličinu jediným číslem, pak to bude nějaká charakteristika polohy
  - dospělá liška obecná je obvykle velká přibližně 70 cm
  - studenti prvního ročníku VŠ mají kolem 20 let věku

- jaké by měly mít **vlastnosti**
  - př. mzda ve firmě
    - všichni zaměstnanci dostanou přidáno 1000 Kč $\Rightarrow$ „střed“ se zvětší o 1000 Kč

$$f(x_1+c, x_2+c, \ldots, x_n+c) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+c$$

    - přepočteme-li jejich mzdu na euro $\Rightarrow$ „střed“ v eurech bude „střed“ v Kč krát 0,042

$$f(x_1 \cdot b, x_2 \cdot b, \ldots, x_n \cdot b) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot b$$

Střední hodnota $\mathrm{E}(X)$

- základní charakteristika polohy
- „střed" (těžiště), kolem kterého jsou koncentrovány hodnoty X

X diskrétní s oborem hodnot M

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x_i \in M} x_i \mathrm{P}(X = x_i)$$

X spojitá s hustotou $f(x)$

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, \mathrm{d}x$$

Jestliže řada nebo integrál absolutně nekonverguje, střední hodnota neexistuje.

Vlastnosti střední hodnoty

- $\mathrm{E}(c) = c$ pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$
- zvětšíme-li všechny hodnoty o konstantu c, zvětší se střední hodnota též o c

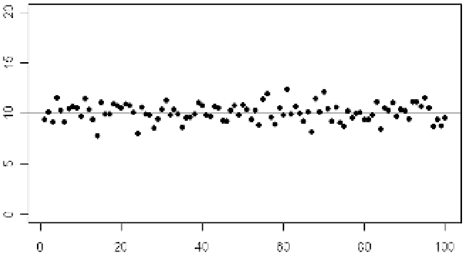
$$\mathrm{E}(c + X) = c + \mathrm{E}(X)$$

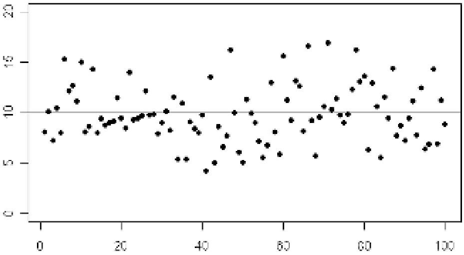
- násobíme-li všechny hodnoty nějakou konstantou b, pak nová střední hodnota bude rovna původní střední hodnotě krát konstanta b

$$\mathrm{E}(bX) = b\mathrm{E}(X)$$

Charakteristiky variability

- číslo udávající **koncentraci (rozptýlení)** hodnot okolo středu

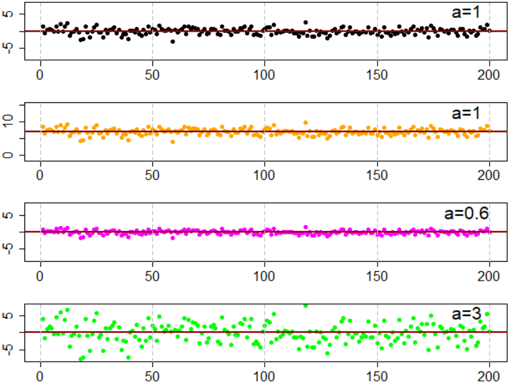




Charakteristiky variability

Vlastnosti:

- po **přičtení konstanty** ke každé hodnotě se variabilita **nezmění**
- při **násobení číslem** (v absolutní hodnotě) **mezi 0 a 1** se variabilita **zmenší**
- při **násobení číslem** (v absolutní hodnotě) **větším než 1** se variabilita **zvětší**



Rozptyl $D(X)$

- základní charakteristika variability
- charakterizuje měřítko (šířku) rozdělení
- popisuje rozptýlenost hodnot kolem střední hodnoty

Rozptyl

$$D(X) = \mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}(X)\right]^2, \text{ existuje-li } \mathrm{E}(X)$$

Směrodatná odchylka

$$\sqrt{D(X)}$$

Vlastnosti rozptylu

1. $D(X) \geq 0$
2. $D(X) = \mathrm{E}(X^2) - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2$

$$D(X) = \begin{cases} \sum\limits_{x_i \in M} x_i^2 \mathrm{P}(X = x_i) - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2 & X \text{ diskrétní} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2 & X \text{ spojitá} \end{cases}$$

3. $D(a + cX) = c^2 D(X)$ pro libovolné konstanty $a, c \in \mathbb{R}$
4. $D(X) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{P}(X = c) = 1$

Normovaná náhodná veličina

- veličina s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem

$$Y = \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{D(X)}}, \text{ existuje-li } \mathrm{E}(X)$$

Modus $\hat{x}$

- charakteristika polohy
- X diskrétní: nejpravděpodobnější hodnota
- X spojitá: bod x, ve kterém hustota pravděpodobností $f(x)$ nabývá lokálního maxima

Příklad: diskrétní náhodná veličina

Příklad

Diskrétní náhodná veličina X

- *nabývá hodnot* $M = \{1, 2, 4, 5\}$ *s pravděpodobnostmi* $p(k) = \mathrm{P}[X = k]$, *kde*
- $p(1) = \frac{1}{3}$, $p(2) = \frac{1}{4}$, $p(4) = \frac{1}{6}$, $p(5) = \frac{1}{4}$ *a* $p(x) = 0$ *jinak.*

Spočtěte střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku a modus náhodné veličiny X.

Nějaký nápad?

Rozdělení pravděpodobností náhodné veličiny X

k	1	2	4	5
$\mathrm{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

Střední hodnota $\mathrm{E}(X) = \sum_n x_n p(x_n)$

- $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{4} = 2{,}75$

Rozptyl a směrodatná odchylka

$D(X) = \mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}(X)\right]^2 = \mathrm{E}(X^2) - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2$

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_n x_n^2 p(x_n) = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{41}{4} = 10{,}25$$

- $D(X) = \mathrm{E}(X^2) - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2 = \frac{41}{4} - \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{43}{16} \doteq 2{,}69$
- $\sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{43}{16}} \doteq 1{,}64$

Modus: nejpravděpodobnější hodnota: $\hat{x} = 1$

Příklad: spojitá náhodná veličina

Příklad

Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

Určete střední hodnotu, rozptyl a modus náhodné veličiny X.

Nějaký nápad?

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Střední hodnota:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)dx = \\ &= \int_0^1 (6x^2 - 6x^3)dx = \left[\frac{6x^3}{3} - \frac{6x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{6}{3} - \frac{6}{4} = \frac{24-18}{12} \\ &= \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad \mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}$$

Rozptyl:

$$D(X) = \mathrm{E}\left[X - \mathrm{E}(X)\right]^2 = \mathrm{E}(X^2) - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)dx = \\ &= \int_0^1 6x^3 - 6x^4 dx = \left[\frac{6x^4}{4} - \frac{6x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{6}{4} - \frac{6}{5} = \frac{30-24}{20} = \frac{6}{20} \end{aligned}$$

$$D(X) = \frac{6}{20} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{20} - \frac{1}{4} = \frac{6-5}{20} = \frac{1}{20}$$

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Modus: bod, v němž je lokální maximum hustoty

$$f'(x) = 6 - 12x$$

$$6 - 12x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0{,}5$$

$$f''(x) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{maximum} \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = 0{,}5$$

Kvantily spojité náhodné veličiny

Definice

Nechť $\alpha \in (0, 1)$. *α-kvantilem spojité náhodné veličiny X rozumíme kterékoli reálné číslo x_α, které splňuje*

$$\mathrm{P}(X \leq x_\alpha) = \alpha.$$

- X spojitá: α-kvantil určen jednoznačně vztahem

$$F(x_\alpha) = \alpha$$

- X diskrétní: kvantily nejsou určeny jednoznačně, nebudeme uvažovat

Speciální názvy kvantilů

- $x_{0,5}$ – medián
- $x_{0,25}$ – dolní kvartil
- $x_{0,75}$ – horní kvartil
- $x_{k/10}$, $k = 1, \ldots, 9$ – k-tý decil
- $x_{k/100}$, $k = 1, \ldots, 99$ – k-tý percentil

Příklad výpočtu kvantilů

Příklad

Vypočtěte první decil a horní kvartil náhodné veličiny X určené hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \textit{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

- $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{pro } x \in (0; 2) \\ 1 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases}$
- $F(x) = 0{,}1, \quad \dfrac{1}{2}x = 0{,}1, \quad x = 0{,}2, \quad \text{tedy } x_{0{,}1} = 0{,}2$
- $F(x) = 0{,}75, \quad \dfrac{1}{2}x = 0{,}75, \quad x = 1{,}5, \quad \text{tedy } x_{0{,}75} = 1{,}5$

Příklad výpočtu kvantilů

Příklad

Vypočtěte první decil a horní kvartil náhodné veličiny X určené hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{pro } x \in (0; 2) \\ 1 & \text{pro } x \geq 2 \end{cases}$
- $F(x) = 0{,}1, \quad \dfrac{1}{2}x = 0{,}1, \quad x = 0{,}2, \quad \text{tedy } x_{0,1} = 0{,}2$
- $F(x) = 0{,}75, \quad \dfrac{1}{2}x = 0{,}75, \quad x = 1{,}5, \quad \text{tedy } x_{0,75} = 1{,}5$

Koeficient šikmosti a špičatosti

Definice (Koeficient šikmosti náhodné veličiny X)

$$\gamma_1 = \frac{E\left[(X - E(X))^3\right]}{(\sqrt{D(X)})^3}.$$

Definice (Koeficient špičatosti náhodné veličiny X)

$$\gamma_2 = \frac{E\left[(X - E(X))^4\right]}{(\sqrt{D(X)})^4} - 3.$$

Koeficienty šikmosti a špičatosti popisují tvar křivky hustoty nebo pravděpodobnostní funkce.

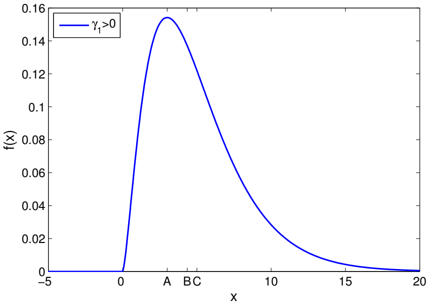
Koeficient šikmosti

- $\gamma_1 = 0$: rozdělení je symetrické
- $\gamma_1 > 0$: rozdělení je protáhlé napravo (např. mzdy)
- $\gamma_1 < 0$: rozdělení je protáhlé nalevo

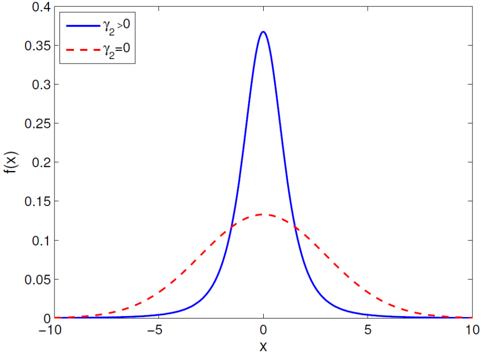
Vztah mezi koeficientem šikmosti, střední hodnotou (C), mediánem (B) a modem (A)

$$\gamma_1 = 0: \quad E(X) = x_{0.5} = Mo(X)$$
$$\gamma_1 < 0: \quad E(X) \leq x_{0.5} \leq Mo(X)$$
$$\gamma_1 > 0: \quad Mo(X) \leq x_{0.5} \leq E(X)$$

Obrázek: Koeficient šikmosti



Koeficient špičatosti



- „měří“ stupeň koncentrace hodnot okolo středu ve srovnání s ostatními hodnotami
- veličina s nízkým koeficientem špičatosti ($\gamma_2 < 0$) obsahuje hodnoty velmi vzdálené od středu
- čím špičatější rozdělení ($\gamma_2 > 0$), tím více jsou hodnoty soustředěné okolo středu