Základy kombinatoriky
a
klasické pravděpodobnosti

Jiří Fišer (Eva Fišerová)

12. února 2024

Obsah

1. Základní informace o kurzu
2. Úvodní poznámky o pravděpodobnosti a statistice
3. Kombinatorické pravidlo součinu a součtu, princip inkluze a exkluze
4. Skupiny bez opakování
   - Variace
   - Permutace
   - Kombinace
5. Skupiny s opakováním
   - Variace
   - Permutace
   - Kombinace
6. Pravděpodobnost - jev a operace s jevy

Základní informace ke kurzu

- **Literatura**
  - Calda, E., Dupač, V. *Matematika pro gymnázia - Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika* (5. vydání). Prometheus, Praha, 2008.
  - Hindls, R., Hronová, S., Seger, J., Fischer, J. Statistika pro ekonomy. 8. vyd. Praha: Professional Publishing, 2007. 415 s. ISBN 978-80-869-4643-6
- **Online zdroje**
  - Otipka, P., Šmajstrla, V. *Pravděpodobnost a statistika*. VŠB TU Ostrava.
    `http://homel.vsb.cz/~oti73/cdpast1/`
  - a mnoho dalších, včetně video-prezentací na YT
- **Zápočet:** aktivní účast na cvičeních, průběžné domácí úkoly, test?, maximálně tři neomluvené absence.
- **Zkouška:**
  - písemný zkouškový test (praktické příklady a teoretické otázky), ústní dozkoušení,
  - prokázat znalosti základní pojmů, orientaci v problematice a demonstrovat znalosti na příkladech.

Náhoda a pravděpodobnost

Pokus = experiment, uskutečněný při přesném dodržení předepsaných podmínek

- nenáhodný: 1 výsledek
  např. zahříváme-li vodu na 100 ℃ při atmosférickém tlaku 1015 hPa, nastane var
- náhodný: 2 a více různých výsledků
  např. hod mincí; hod kostkou; volba otázky u maturity; střelba na terč; podání léku pacientovi

Co je to pravděpodobnost?

Náhoda a pravděpodobnost

Pravděpodobnost = naděje, s jakou nastanou jevy, které nás zajímají

- číslo mezi nulou a jedničkou
- čím je hodnota blíže jedničce, tím vyšší je naděje, že daný jev nastane
- popisuje náhodný pokus pomocí matematických (pravděpodobnostních) modelů

Zakladatelé moderní teorie pravděpodobnosti

- Úlohy o pravděpodobnosti výhry v hazardních hrách

(a) Blaise Pascal (1623-1662)

(b) Pierre de Fermat (1601-1665)

Hazardní hry v kostky

- **hod 1 kostkou:** padne alespoň 1 šestka ve 4 hodech $\to$ zisk
- **hod 2 kostkami:** padne alespoň 1 dvojice šestek ve 24 hodech $\to$ ztráta

Chevalier de Mére (1607-1684)
vl. jménem Antoine Gombaud

Klasická pravděpodobnost

- konečný počet výsledků pokusu
- výsledky pokusu jsou stejně pravděpodobné

Klasická pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu A}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Příklad: Hod pravidelnou šestistrannou kostkou

- počet možných výsledků pokusu: 6 (padne 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6)
  - padne číslo 6: 1 příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(A) = 1/6 = 0{,}17$
  - padne sudé číslo: 3 příznivé výsledky (2, 4, 6) $\Rightarrow$ $P(B) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$
  - padne číslo 10: žádný příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(D) = 0/6 = 0$

Klasická pravděpodobnost

- konečný počet výsledků pokusu
- výsledky pokusu jsou stejně pravděpodobné

Klasická pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu A}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Příklad: Hod pravidelnou šestistrannou kostkou

- počet možných výsledků pokusu: 6 (padne 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6)
  - padne číslo 6: 1 příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(A) = 1/6 = 0{,}17$
  - padne sudé číslo: 3 příznivé výsledky (2, 4, 6) $\Rightarrow$ $P(B) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$
  - padne číslo 10: žádný příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(D) = 0/6 = 0$

Klasická pravděpodobnost

- konečný počet výsledků pokusu
- výsledky pokusu jsou stejně pravděpodobné

Klasická pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu A}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Příklad: Hod pravidelnou šestistrannou kostkou

- počet možných výsledků pokusu: 6 (padne 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6)
  - padne číslo 6: 1 příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(A) = 1/6 = 0{,}17$
  - padne sudé číslo: 3 příznivé výsledky (2, 4, 6) $\Rightarrow$ $P(B) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$
  - padne číslo 10: žádný příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(D) = 0/6 = 0$

Klasická pravděpodobnost

- konečný počet výsledků pokusu
- výsledky pokusu jsou stejně pravděpodobné

Klasická pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu A}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Příklad: Hod pravidelnou šestistrannou kostkou

- počet možných výsledků pokusu: 6 (padne 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6)
  - padne číslo 6: 1 příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(A) = 1/6 = 0{,}17$
  - padne sudé číslo: 3 příznivé výsledky (2, 4, 6) $\Rightarrow$ $P(B) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$
  - padne číslo 10: žádný příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(D) = 0/6 = 0$

Klasická pravděpodobnost

- konečný počet výsledků pokusu
- výsledky pokusu jsou stejně pravděpodobné

Klasická pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu A}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Příklad: Hod pravidelnou šestistrannou kostkou

- počet možných výsledků pokusu: 6 (padne 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6)
  - padne číslo 6: 1 příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(A) = 1/6 = 0{,}17$
  - padne sudé číslo: 3 příznivé výsledky (2, 4, 6) $\Rightarrow$ $P(B) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$
  - padne číslo 10: žádný příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(D) = 0/6 = 0$

Klasická pravděpodobnost

- konečný počet výsledků pokusu
- výsledky pokusu jsou stejně pravděpodobné

Klasická pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu A}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Příklad: Hod pravidelnou šestistrannou kostkou

- počet možných výsledků pokusu: 6 (padne 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6)
  - padne číslo 6: 1 příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(A) = 1/6 = 0{,}17$
  - padne sudé číslo: 3 příznivé výsledky (2, 4, 6) $\Rightarrow$ $P(B) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$
  - padne číslo 10: žádný příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(D) = 0/6 = 0$

Klasická pravděpodobnost

- konečný počet výsledků pokusu
- výsledky pokusu jsou stejně pravděpodobné

Klasická pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu A}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Příklad: Hod pravidelnou šestistrannou kostkou

- počet možných výsledků pokusu: 6 (padne 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6)
  - padne číslo 6: 1 příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(A) = 1/6 = 0{,}17$
  - padne sudé číslo: 3 příznivé výsledky (2, 4, 6) $\Rightarrow$ $P(B) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$
  - padne číslo 10: žádný příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(D) = 0/6 = 0$

Klasická pravděpodobnost

- konečný počet výsledků pokusu
- výsledky pokusu jsou stejně pravděpodobné

Klasická pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých výsledků jevu A}}{\text{počet všech možných výsledků}}$$

Příklad: Hod pravidelnou šestistrannou kostkou

- počet možných výsledků pokusu: 6 (padne 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6)
  - padne číslo 6: 1 příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(A) = 1/6 = 0{,}17$
  - padne sudé číslo: 3 příznivé výsledky (2, 4, 6) $\Rightarrow$ $P(B) = 3/6 = 1/2 = 0{,}5$
  - padne číslo 10: žádný příznivý výsledek $\Rightarrow$ $P(D) = 0/6 = 0$

Co to je statistika?

Statistika

- popisná statistika
  - názorně představuje data pomocí tabulek, grafů a jednoduchých číselných charakteristik
- matematická statistika
  - data tvoří výběr z nějaké větší populace
  - zobecňuje závěry platné pro naše data na celou populaci

pravděpodobnost + statistika = stochastika

1. Kombinatorika

- zabývá se vlastnostmi konečných množin
  - vytváření navzájem různých množin (skupin) z daných prvků
  - určení počtu takto vzniklých množin
  - podle toho, zda se prvky v jednotlivých skupinách mohou či nemohou opakovat, rozlišujeme
    - ★ skupiny s opakováním
    - ★ skupiny bez opakování

1.1 Základní kombinatorická pravidla

Příklad (Dvojciferná čísla)

Určete ***počet*** *všech přirozených* ***dvojciferných čísel****, v jejichž dekadickém zápisu se* ***každá číslice*** *vyskytuje* ***nejvýše jednou****.*

Nějaké nápady?

Základní kombinatorická pravidla

Příklad (Dvojciferná čísla)

*Určete **počet** všech přirozených **dvojciferných čísel**, v jejichž dekadickém zápisu se **každá číslice** vyskytuje **nejvýše jednou**.*

Řešení A

- **desítky:** číslice $1, 2, \ldots, 9 \;\to\;$ 9 možností
- **jednotky:** číslice 0 a jakákoliv z 8 číslic různá od číslice na místě desítek $\;\to\;$ 9 možností

$$\Rightarrow\; 9 \cdot 9 = 81 \text{ různých dvojciferných čísel}$$

Kombinatorické pravidlo součinu

Kombinatorické pravidlo součinu

Kombinatorické pravidlo součinu

Nechť množina A_i má n_i prvků pro $i = 1, \dots, k$.
Pak počet všech uspořádaných k-tic $(a_1, \dots, a_k)$,
kde $a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k$, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý n_2 způsoby, ..., k-tý člen n_k způsoby,
je roven součinu

$$\prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Kombinatorické pravidlo součtu

Příklad (Dvojciferná čísla)

*Určete **počet** všech přirozených **dvojciferných čísel**, v jejichž dekadickém zápisu se **každá číslice** vyskytuje **nejvýše jednou**.*

Řešení B

- D ... množina všech přirozených dvojciferných čísel $\rightarrow$ |D|=90 možností
- S ... množina všech přirozených dvojciferných čísel se stejnými číslicemi $\rightarrow$ |S|=9 možností
- R ... množina všech přirozených dvojciferných čísel s různými číslicemi

$$R \cup S = D, \quad R \cap S = \emptyset, \quad |R| + |S| = |D|$$

$$\Rightarrow \ |R| = 90 - 9 = 81 \text{ různých dvojciferných čísel}$$

Kombinatorické pravidlo součtu

Kombinatorické pravidlo součtu

Nechť množina A_i má n_i prvků pro $i = 1, \dots, k$ a nechť jsou množiny A_i po dvou *disjunktní*.

Pak pro **počet prvků sjednocení** těchto množin platí

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{i=1}^{k} n_i .$$

- nejsou-li množiny disjunktní $\rightarrow$ **Princip inkluze a exkluze**

Princip inkluze a exkluze

Princip inkluze a exkluze

Nechť jsou dány množiny A_i pro $i = 1, \ldots, k$ a $|A_i|$ označuje počet prvků i-té množiny ($i = 1, \ldots, k$). Potom pro **počet prvků sjednocení** množin $A_1, \ldots, A_k$ platí

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum\sum_{1\leq i<j\leq k} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum\sum\sum_{1\leq i<j<s\leq k} |A_i \cap A_j \cap A_s| - \cdots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| .$$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3|$$
$$-|A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Princip inkluze a exkluze - příklad

Příklad (Sportovní kluby)

Ve městě fungují dva sportovní kluby. Fotbalový klub má dvanáct členů, tenisový klub devět. Přitom tři fotbalisté hrají i tenis. ***Kolik osob celkem je členem nějakého klubu?***

Nějaké nápady?

Princip inkluze a exkluze - příklad

Příklad (Sportovní kluby)

Ve městě fungují dva sportovní kluby. Fotbalový klub má dvanáct členů, tenisový klub devět. Přitom tři fotbalisté hrají i tenis. ***Kolik osob celkem je členem nějakého klubu?***

Řešení:

- počet členů fotbalového klubu: $|A| = 12$
- počet členů tenisového klubu: $|B| = 9$
- počet osob ve fotbalovém i tenisovém klubu: $|A \cap B| = 3$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 12 + 9 - 3 = 18 \text{ osob}$$

1.2 Skupiny bez opakování

Kolika způsoby lze z n prvkové množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vybrat $k \leq n$ různých prvků?

- uspořádaná k-tice: **variace**, **permutace**
- neuspořádaná k-tice: **kombinace**

I. Variace

Počet k-prvkových variací

Z množiny $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ vybíráme uspořádané k-tice

uspořádaná k-tice	1.člen	2.člen	$\cdots$	$(k-1)$.člen	k.člen
# možností	n	$n-1$	$\cdots$	$n-(k-2)$	$n-(k-1)$

kombinatorické pravidlo součinu

$$\Downarrow$$

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

I. Variace

Počet k-prvkových variací

Z množiny $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ vybíráme uspořádané k-tice

uspořádaná k-tice	1.člen	2.člen	$\cdots$	$(k-1)$.člen	k.člen
# možností	n	$n-1$	$\cdots$	$n-(k-2)$	$n-(k-1)$

kombinatorické pravidlo součinu

$$\Downarrow$$

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Variace

Variace

Variace je libovolná **uspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny o n prvcích tak, že každý se v ní vyskytuje **nejvýše jednou** (**záleží na pořadí** prvků v této k-tici a žádný z jejích prvků se **nesmí opakovat**).

Počet všech k-prvkových variací sestavených z n-prvkové množiny je roven číslu

$$V(k,n) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, k \leq n.$$

Variace - příklad vlajka

Příklad (Vlajka)

Sestavujeme vlajku ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou bílý, červený, modrý, zelený a žlutý pruh látky.

a) *Kolik vlajek lze sestavit?*

b) *Kolik jich má modrý pruh?*

c) *Kolik jich má modrý pruh uprostřed?*

d) *Kolik jich nemá červený pruh uprostřed?*

Nějaký nápad?

Příklad (Vlajka)

Sestavujeme vlajku ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou bílý, červený, modrý, zelený a žlutý pruh látky.

a) *Kolik vlajek lze sestavit?*

b) *Kolik jich má modrý pruh?*

c) *Kolik jich má modrý pruh uprostřed?*

d) *Kolik jich nemá červený pruh uprostřed?*

Řešení a)

- vlajka - 3 různé pruhy z 5 různých barev
- záleží na pořadí pruhů

$\Rightarrow$ tříčlenné variace z 5 prvků

$$V(3,5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ možností}$$

Příklad (Vlajka)

Sestavujeme vlajku ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou bílý, červený, modrý, zelený a žlutý pruh látky.

b) *Kolik jich má modrý pruh?*

c) *Kolik jich má modrý pruh uprostřed?*

Řešení b) vlajka s modrým pruhem

- modrý pruh - 3 způsoby umístění (nahoru, doprostřed, dolů)
- zbývající 2 barevné pruhy - 2 různé pruhy ze 4 různých barev

$$V(2,4) = 4 \cdot 3 = 12 \text{ možností}$$

$\Rightarrow$ kombinatorické pravidlo součinu

$$3 \cdot V(2,4) = 3 \cdot 12 = 36 \text{ možností}$$

Příklad (Vlajka)

Sestavujeme vlajku ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou bílý, červený, modrý, zelený a žlutý pruh látky.

b) *Kolik jich má modrý pruh?*

c) *Kolik jich má modrý pruh uprostřed?*

d) *Kolik jich nemá červený pruh uprostřed?*

Řešení b) vlajka s modrým pruhem

- modrý pruh - 3 způsoby umístění (nahoru, doprostřed, dolů)
- zbývající 2 barevné pruhy - 2 různé pruhy ze 4 různých barev

$$V(2,4) = 4 \cdot 3 = 12 \ \text{možností}$$

$\Rightarrow$ kombinatorické pravidlo součinu

$$3 \cdot V(2,4) = 3 \cdot 12 = 36 \ \text{možností}$$

Řešení c) vlajka s modrým pruhem uprostřed

$$V(2,4) = 12 \ \text{možností}$$

Příklad (Vlajka)

Sestavujeme vlajku ze tří různobarevných vodorovných pruhů. K dispozici jsou bílý, červený, modrý, zelený a žlutý pruh látky.

d) *Kolik jich nemá červený pruh uprostřed?*

Řešení d) vlajka, která nemá červený pruh uprostřed

- červený pruh uprostřed - $V(2,4) = 12$ možností
- vlajka (3 různé pruhy) - $V(3,5) = 60$ možností

$$\Downarrow$$

$$60 - 12 = 48 \text{ možností}$$

II. Permutace

Permutace

Permutace je libovolné **uspořádaní** množiny M o n prvcích, kdy ve výsledném uspořádání (výsledné uspořádané n-tici) se prvky **nesmí opakovat**.

Počet všech různých permutací (počet všech různých uspořádaných n-tic) prvků množiny M je roven číslu

$$P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad n \geq 1.$$

- $0! = 1$
- Permutace je speciálním případem variace

$$P(n) = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

II. Permutace

Permutace

Permutace je libovolné **uspořádaní** množiny M o n prvcích, kdy ve výsledném uspořádání (výsledné uspořádané n-tici) se prvky **nesmí opakovat**.

Počet všech různých permutací (počet všech různých uspořádaných n-tic) prvků množiny M je roven číslu

$$P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1, \quad n \geq 1.$$

- $0! = 1$
- Permutace je speciálním případem variace

$$P(n) = V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Permutace - příklad parlament

Příklad (Parlament)

S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet

a) *všech možných pořadí jejich vystoupení,*
b) *všech pořadí, v nichž vystupuje A po E,*
c) *všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E.*

Nějaký nápad?

Permutace - příklad parlament

Příklad (Parlament)

S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet

a) *všech možných pořadí jejich vystoupení,*

b) *všech pořadí, v nichž vystupuje A po E,*

c) *všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E.*

Řešení a)

- počet všech uspořádání 6 různých prvků

$$\Rightarrow \quad P(6) = 6! = 720 \text{ možností}$$

Permutace - příklad parlament

Příklad (Parlament)

S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet

a) *všech možných pořadí jejich vystoupení* [$6!$]

b) *všech pořadí, v nichž vystupuje A po E,*

c) *všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E.*

Řešení b)

- každému pořadí E po A odpovídá právě 1 pořadí A po E

$$(A, B, C, D, E, F) \leftrightarrow (E, B, C, D, A, F)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot P(6) = \frac{1}{2} \cdot 6! = \text{360 možností}$$

Permutace - příklad parlament

Příklad (Parlament)

S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet

a) *všech možných pořadí jejich vystoupení [$6!$]*
b) *všech pořadí, v nichž vystupuje A po E [$\frac{1}{2} \cdot 6!$]*
c) *všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E.*

Řešení c)

- A ihned po E spojíme v jednoho hypotetického poslance EA
- počet všech uspořádání 5 různých prvků B, C, D, F, EA

$$\Rightarrow \; P(5) = 5! = 120 \text{ možností}$$

III. Kombinace

Kombinace

Kombinace je libovolná **neuspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny M o n prvcích tak, že každý se v ní vyskytuje **nejvýše jednou** (prvky se **nesmí opakovat** a **nezáleží na jejich pořadí**).

Počet k-prvkových kombinací sestavených z n-prvkové množiny je roven kombinačnímu číslu (čteme „en nad ká“)

$$K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k \leq n.$$

III. Kombinace

Kombinace

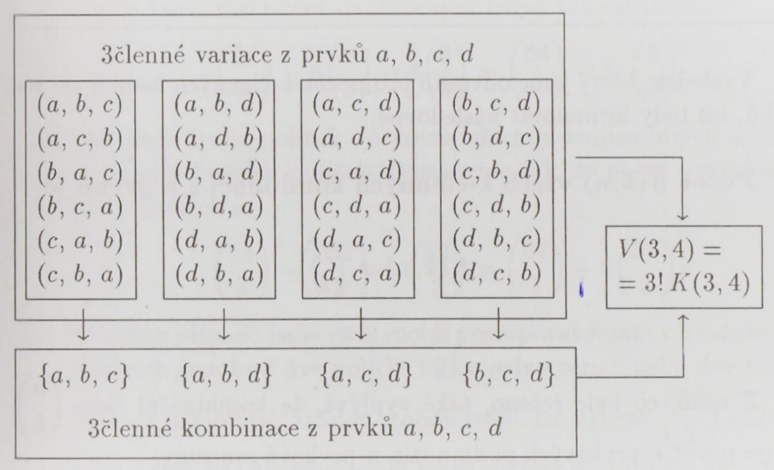
Kombinace je libovolná **neuspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny M o n prvcích tak, že každý se v ní vyskytuje **nejvýše jednou** (prvky se **nesmí opakovat** a **nezáleží na jejich pořadí**).

Počet k-prvkových kombinací sestavených z n-prvkové množiny je roven kombinačnímu číslu (čteme „en nad ká“)

$$K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k \leq n.$$

Počet *k*-prvkových kombinací z *n* prvků

- např. $M = \{a, b, c, d\}$, $n = 4$, $k = 3$



$$K(k, n) = \frac{1}{k!} \cdot V(k, n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Základní vlastnosti kombinačních čísel

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}, \quad k \leq n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!k!}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad k \leq n$$

$$\binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{0}{0} = 1, \qquad \binom{n}{1} = n$$

Pascalův trojúhelník

1. řádek	1	$\binom{0}{0}$
2. řádek	1 1	$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$
3. řádek	1 + 2 1	$\binom{2}{0} + \binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$
4. řádek	1 3 3 1	$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \Rightarrow$ symetrie

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad k < n$$

Binomická věta

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1

Důkaz matematickou indukcí

Kombinace - příklad šachovnice

Příklad (Šachovnice)

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 *vybrat*

a) *trojici políček,*
b) *trojici políček neležících ve stejném sloupci,*
c) *trojici políček neležících ve stejném sloupci ani stejné řadě,*
d) *trojici políček, která nejsou všechna stejné barvy.*

Nějaký nápad?

Příklad (Šachovnice)

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat

a) *trojici políček,*
b) *trojici políček neležících ve stejném sloupci,*
c) *trojici políček neležících ve stejném sloupci ani stejné řadě,*
d) *trojici políček, která nejsou všechna stejné barvy.*

Řešení a)

- šachovnice . . . 64 políček
- vybíráme 3 políčka
- nezáleží na pořadí

$$\Rightarrow \; K(3, 64) = \binom{64}{3} = \frac{64 \cdot 63 \cdot 62}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \text{41664 možností}$$

Příklad (Šachovnice)

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat

a) *trojici políček (41664 možností)*

b) *trojici políček neležících ve stejném sloupci,*

c) *trojici políček neležících ve stejném sloupci ani stejné řadě,*

d) *trojici políček, která nejsou všechna stejné barvy.*

Řešení b)

- trojice políček na šachovnici ... $\binom{64}{3}$ možností
- vybíráme 3 políčka ležící v 1 zvoleném sloupci, nezáleží na pořadí

$$K(3,8) = \binom{8}{3} = 56 \text{ možností}$$

- 8 různých sloupců

$$\Rightarrow \binom{64}{3} - 8\binom{8}{3} = 41216 \text{ možností}$$

Příklad (Šachovnice)

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat

a) *trojici políček (41664 možností),*

b) *trojici políček neležících ve stejném sloupci (41216 možností),*

c) *trojici políček neležících ve stejném sloupci ani stejné řadě,*

d) *trojici políček, která nejsou všechna stejné barvy.*

Řešení c)

- trojice políček na šachovnici ... $\binom{64}{3}$ možností
- trojice políček ležící ve stejném sloupci ... $8\binom{8}{3}$ možností
- trojice políček ležící ve stejném řádku ... $8\binom{8}{3}$ možností

$$\Rightarrow \binom{64}{3} - 8\binom{8}{3} - 8\binom{8}{3} = 40768 \text{ možností}$$

Příklad (Šachovnice)

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat

d) *trojici políček, která nejsou všechna stejné barvy.*

Řešení d)

- trojice políček na šachovnici . . . $\binom{64}{3}$ možností
- trojice bílých políček . . . $\binom{32}{3}$ možností
- trojice černých políček . . . $\binom{32}{3}$ možností

$$\Rightarrow \binom{64}{3} - \binom{32}{3} - \binom{32}{3} = 31744 \text{ možností}$$

Příklad (Šachovnice)

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat

d) *trojici políček, která nejsou všechna stejné barvy.*

Řešení d) alternativní postup

- 2 volby: 2 políčka bílá a 1 černé nebo 2 políčka černá a 1 bílé
- výběr 2 políčka bílá a 1 černé ... $\binom{32}{2} \cdot 32$ možností

$$\Rightarrow\ 2 \cdot \binom{32}{2} \cdot 32 = 31744 \text{ možností}$$

1.3 Skupiny s opakováním

Kolika způsoby lze z n prvkové množiny $\{a_1, \ldots, a_n\}$ vybrat k prvků (prvky se mohou opakovat)?

- uspořádaná k-tice: **variace s opakováním**, **permutace s opakováním**
- neuspořádaná k-tice: **kombinace s opakováním**

I. Variace s opakováním

Počet k-prvkových variací s opakováním

Z množiny $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ vybíráme uspořádané k-tice

uspořádaná k-tice	1. člen	2. člen	$\cdots$	$(k-1)$. člen	k. člen
# možností	n	n	$\cdots$	n	n

kombinatorické pravidlo součinu

$$\Downarrow$$

$$V^*(k,n) = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k\times} = n^k$$

I. Variace s opakováním

Počet k-prvkových variací s opakováním

Z množiny $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ vybíráme uspořádané k-tice

uspořádaná k-tice	1. člen	2. člen	$\cdots$	$(k-1)$. člen	k. člen
# možností	n	n	$\cdots$	n	n

kombinatorické pravidlo součinu

$$\Downarrow$$

$$V^*(k,n) = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{k\times} = n^k$$

Variace s opakováním

Variace s opakováním

Variace s opakováním je libovolná **uspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny o n prvcích (prvky se **mohou opakovat** a **záleží na jejich pořadí**).

Počet všech k-prvkových variací s opakováním sestavených z n-prvkové množiny je roven číslu

$$V^*(k, n) = n^k.$$

Variace s opakováním - příklad SPZ

Příklad (SPZ)

V jisté zemi je SPZ aut tvořena uspořádanou sedmicí tak, že první 3 členy jsou písmena, další 4 jsou číslice. Určete počet různých SPZ, můžeme-li pro první část značky použít každé z 28 písmen a pro druhou část každou z deseti číslic $0, 1, \dots, 9$.

Nějaký nápad?

Příklad (SPZ)

V jisté zemi je SPZ aut tvořena uspořádanou sedmicí tak, že první 3 členy jsou písmena, další 4 jsou číslice. Určete počet různých SPZ, můžeme-li pro první část značky použít každé z 28 písmen a pro druhou část každou z deseti číslic $0, 1, \ldots, 9$.

Řešení

- 1. část: vybíráme 3 písmena z 28 různých písmen, záleží na pořadí, mohou se opakovat

$$V^*(3, 28) = 28^3$$

- 2. část: vybíráme 4 číslice z 10 různých číslic, záleží na pořadí, mohou se opakovat

$$V^*(4, 10) = 10^4$$

kombinatorické pravidlo součinu $\Rightarrow$

$$V^*(3, 28) \cdot V^*(4, 10) = 28^3 \cdot 10^4 = 219\,520\,000 \text{ možností}$$

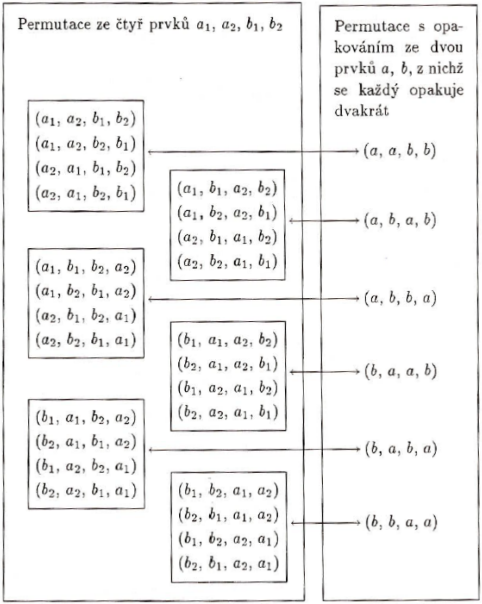
II. Permutace s opakováním

Počet všech permutací s opakováním

- $M = \{a, b\}$, $k_1 = 2$, $k_2 = 2$
- # umístění a_1, a_2: $2!$
- # umístění b_1, b_2: $2!$

$$P^*(2,2) = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

$$P^*(k_1, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!}$$



Permutace s opakováním

Permutace s opakováním

Permutace je libovolná **uspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny o n prvcích tak, že každý se v ní vyskytuje **alespoň jednou** (ve výsledné k-tici se prvky **mohou opakovat**).

Počet všech různých k-členných permutací s opakováním sestavených z n-prvkové množiny tak, že prvek a_1 se v nich vyskytuje k_1-krát, prvek a_2 se opakuje k_2-krát, atd. až prvek a_n se opakuje k_n-krát, přičemž $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$, je roven

$$P^*(k_1, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

- $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$ ... permutace bez opakování

Permutace s opakováním - příklad slova

Příklad (Slova)

Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ***ABRAKADABRA****. Určete, v kolika z nich*

a) *žádná dvojice sousedních písmen není tvořena 2 písmeny A,*

b) *žádná pětice sousedních písmen není tvořena 5 písmeny A.*

Nějaký nápad?

Příklad (Slova)

Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ***ABRAKADABRA****. Určete, v kolika z nich*

a) *žádná dvojice sousedních písmen není tvořena 2 písmeny A,*

b) *žádná pětice sousedních písmen není tvořena 5 písmeny A.*

Řešení

- počet všech slov = permutace vytvořená z písmen

písmeno	A	B	D	K	R
# výskytů	5	2	1	1	2

$$P^*(5,2,1,1,2) = \frac{(5+2+1+1+2)!}{5!2!1!1!2!} = \frac{11!}{480} = 83160 \text{ slov}$$

Příklad (Slova)

Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ***ABRAKADABRA****. Určete, v kolika z nich*

a) *žádná dvojice sousedních písmen není tvořena 2 písmeny A,*

b) *žádná pětice sousedních písmen není tvořena 5 písmeny A.*

Řešení a)

- $5\times$ A, 6 jiných písmen
- umístění A: * B * R * K * D * B * R *

$$\binom{7}{5} \text{ možností}$$

- umístění B,D,K,R:

$$P^*(2,1,1,2) = \frac{(2+1+1+2)!}{2!1!1!2!} = \frac{6!}{2!2!} \text{ možností}$$

kombinatorický zákon součinu $\Rightarrow$ $\binom{7}{5}\frac{6!}{2!2!} = 3780$ možností

Příklad (Slova)

*Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova **ABRAKADABRA**. Určete, v kolika z nich*

a) *žádná dvojice sousedních písmen není tvořena 2 písmeny A,*

b) *žádná pětice sousedních písmen není tvořena 5 písmeny A.*

Řešení b)

- $5\times$ A **je vedle sebe** $\Rightarrow$ spojíme do jednoho písmena A_5

písmeno	A_5	B	D	K	R
# výskytů	1	2	1	1	2

$$P^*(1,2,1,1,2) = \frac{(1+2+1+1+2)!}{1!2!1!1!2!} = \frac{7!}{2!2!} \text{ slov}$$

- $5\times$ A **není vedle sebe**

kombinatorický zákon součtu $\Rightarrow$

$$P^*(5,2,1,1,2) - P^*(1,2,1,1,2) = \frac{11!}{5!2!2!} - \frac{7!}{2!2!} = 81900 \text{ slov}$$

III. Kombinace s opakováním

Příklad mince

Příklad (Mince)

Kolik různých částek lze zaplatit 3 mincemi, máme-li v peněžence korunové, dvoukorunové a pětikorunové mince, každý druh alespoň pětkrát?

Nějaký nápad?

Počet kombinací s opakováním - odvození

Idea: každou kombinaci s opakováním nahradíme pomocí uspořádané skupiny vytvořené ze dvou prvků

- platba 3 mincemi: 3 druhy mincí - 1 Kč, 2 Kč, 5 Kč - každá alespoň 5x - 10 možností

$1,1,1 \rightarrow [\cdot\ \cdot\ \cdot\ \vert\ \vert]$	$1,5,5 \rightarrow [\cdot\ \vert\ \vert\ \cdot\ \cdot]$
$1,1,2 \rightarrow [\cdot\ \cdot\ \vert\ \cdot\ \vert]$	$2,2,2 \rightarrow [\vert\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \vert]$
$1,1,5 \rightarrow [\cdot\ \cdot\ \vert\ \vert\ \cdot]$	$2,2,5 \rightarrow [\vert\ \cdot\ \cdot\ \vert\ \cdot]$
$1,2,2 \rightarrow [\cdot\ \vert\ \cdot\ \cdot\ \vert]$	$2,5,5 \rightarrow [\vert\ \cdot\ \vert\ \cdot\ \cdot]$
$1,2,5 \rightarrow [\cdot\ \vert\ \cdot\ \vert\ \cdot]$	$5,5,5 \rightarrow [\vert\ \vert\ \cdot\ \cdot\ \cdot]$

$$K^*(3,3) = P^*(3,2) = \frac{(3+2)!}{3!2!} = \frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ možností}$$

Počet kombinací s opakováním - odvození

- k-prvková kombinace s opakováním vytvořená z n prvků = uspořádaná skupina s k tečkami a $n-1$ čárkami (n různých přihrádek, v každé jiný druh prvku)

$$K^*(k,n) = P^*(k,n-1) = \frac{[k+(n-1)]!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad (Mince)

Kolik různých částek lze zaplatit 3 mincemi, máme-li v peněžence korunové, dvoukorunové a pětikorunové mince, každý druh alespoň pětkrát?

Řešení

- tři různé druhy mincí (1 Kč, 2 Kč, 5 Kč), každá alespoň 5×: $n = 3$
- platba 3 mincemi: $k = 3$
- počet různých částek: 3-prvková kombinace s opakováním

$$K^*(k,n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$K^*(3,3) = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10 \text{ možností}$$

Kombinace s opakováním

Kombinace s opakováním

Kombinace s opakováním je libovolná **neuspořádaná** k-tice sestavená z prvků množiny M o n prvcích (prvky se **mohou opakovat** a **nezáleží na jejich pořadí**).

Počet k-prvkových kombinací s opakováním sestavených z n-prvkové množiny je roven kombinačnímu číslu

$$K^*(k,n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Shrnutí

Základní kombinatorická pravidla

- součtu
- součinu

Skupiny bez opakování

- **Variace:** uspořádaná k-tice

$$V(k,n) = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad k \leq n$$

- **Permutace:** uspořádaná n-tice

$$P(n) = n!$$

- **Kombinace:** neuspořádaná k-tice

$$K(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k \leq n$$

Shrnutí

Skupiny s opakováním

- ***k*-prvková variace s opakováním z *n* prvků:** uspořádaná *k*-tice

$$V^*(k, n) = n^k$$

- ***k*-prvková permutace s opakováním z *n* prvků:** uspořádaná *k*-tice

$$P^*(k_1, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \cdots k_n!}, \quad k = k_1 + \cdots + k_n$$

- ***k*-prvková kombinace s opakováním z *n* prvků:** neuspořádaná *k*-tice

$$K^*(k, n) = \binom{n+k-1}{k} = P^*(k, n-1)$$