I. Část

KOMBINATORIKA
A
PRAVDĚPODOBNOST

I.A. Kombinatorika

Zkoumá rozsah (počet prvků) různě definovaných podmnožin vybraných z daného celku.

Co lze najít na **Wikipedii**:

„

mezi základní úlohy klasické kombinatoriky patří určování počtu definovaných skupin prvků sestavených z dané množiny.

Při tom je vždy třeba uvážit:

- zda **záleží** nebo **nezáleží na pořadí** výběru prvků (zda se má nebo nemá dbát na jejich uspořádání) – podle toho se rozlišují **variace** a **kombinace**;
- zda se jednotlivé prvky ve skupině **mohou** nebo **nemohou** vícekrát **opakovat** (vznikají skupiny s opakováním nebo bez opakování prvků).

“

Kombinatorické pravidlo součinu

Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?

Kombinatorické pravidlo součinu

Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?

Jana

Hana

Dana

Petr

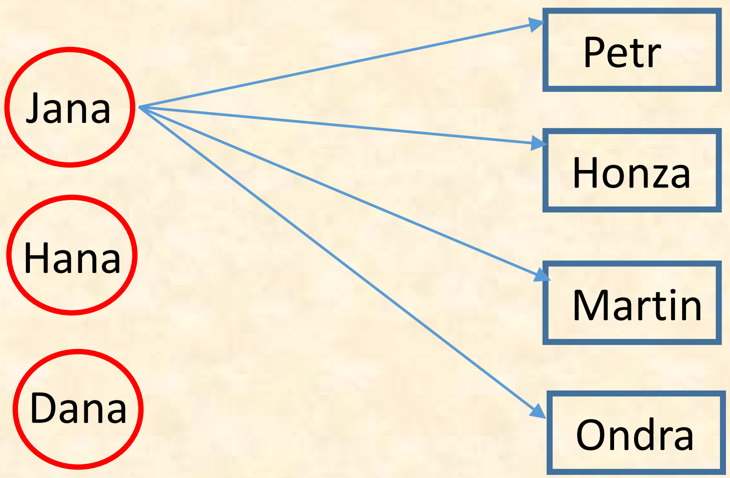
Honza

Martin

Ondra

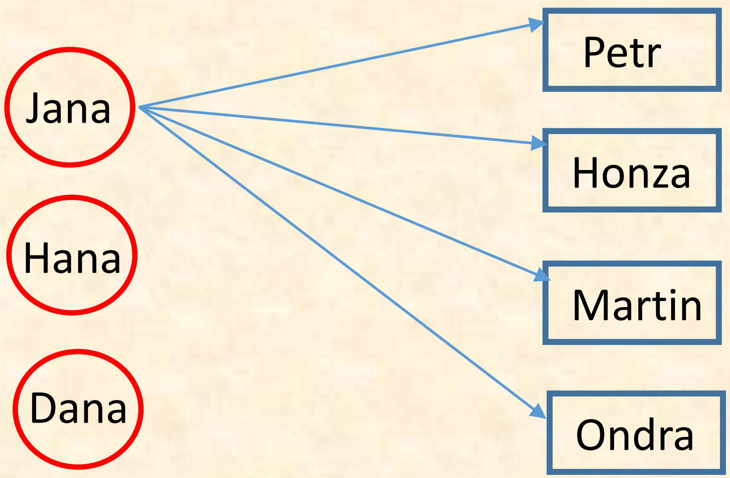
Kombinatorické pravidlo součinu

Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?



Kombinatorické pravidlo součinu

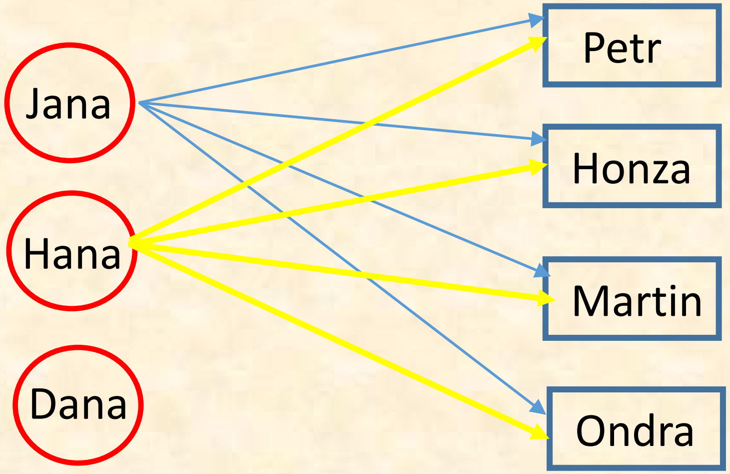
Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?



4

Kombinatorické pravidlo součinu

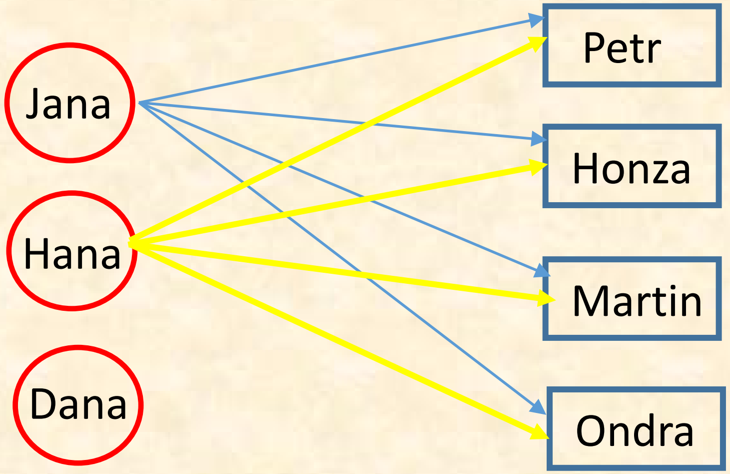
Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?



4

Kombinatorické pravidlo součinu

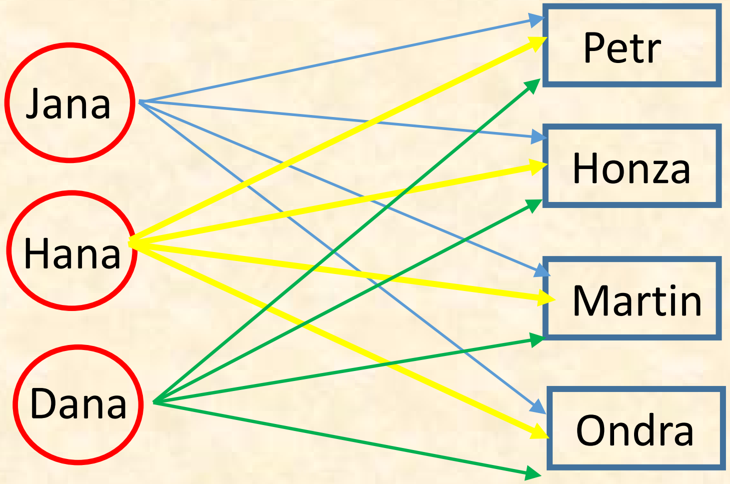
Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?



4 + 4

Kombinatorické pravidlo součinu

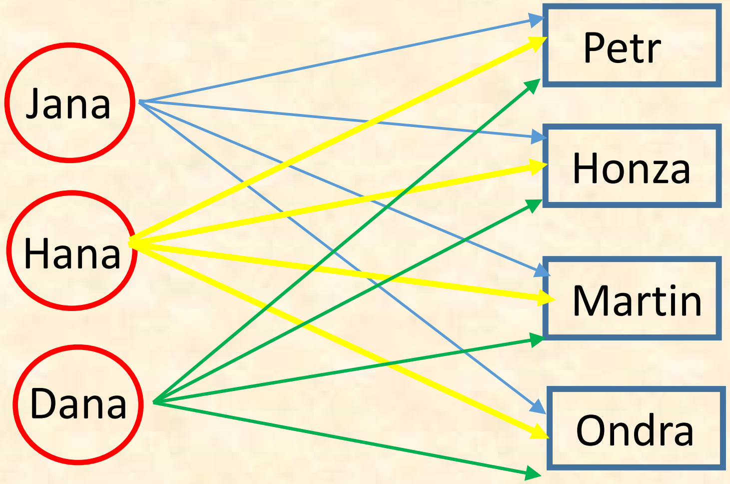
Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?



4 + 4

Kombinatorické pravidlo součinu

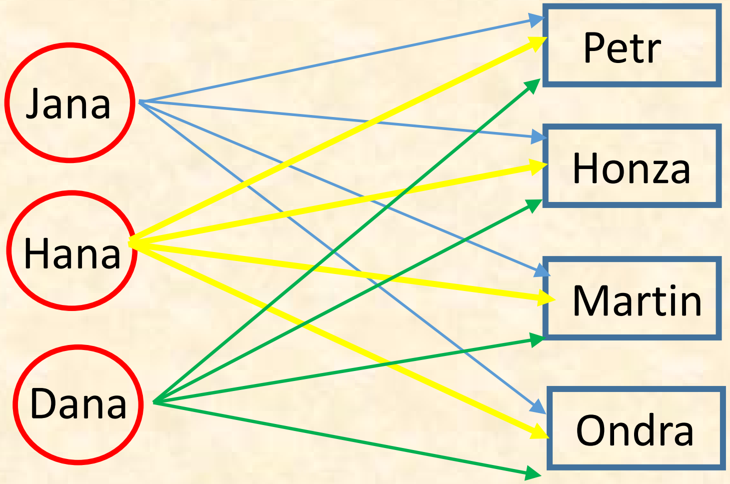
Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?



4 + 4 + 4

Kombinatorické pravidlo součinu

Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?

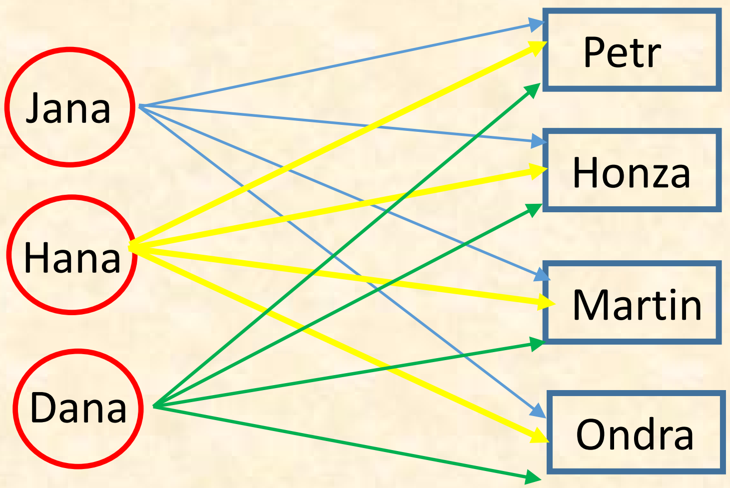


$$4 + 4 + 4$$

$$= \boxed{3 \cdot 4}$$

Kombinatorické pravidlo součinu

Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?



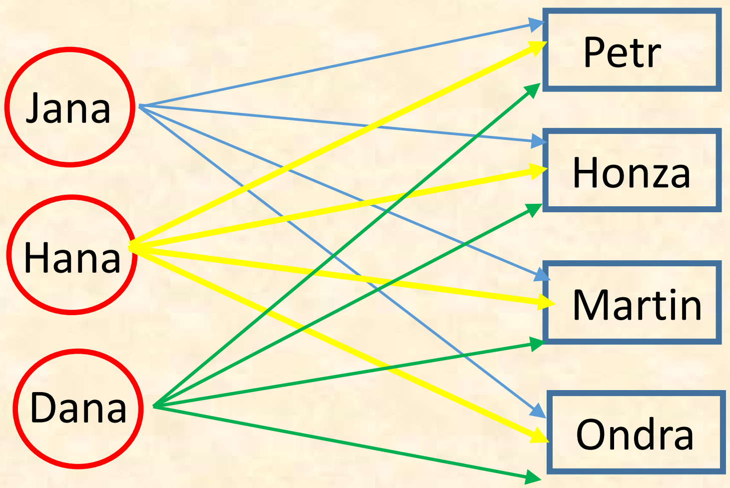
$$4 + 4 + 4 = \boxed{3 \cdot 4}$$

Počet všech uspořádaných **k**-tic, jejichž
- první člen lze vybrat n_1 způsoby,
- druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby
- atd. až
- **k**-tý člen po výběru všech předcházejících členu n_k způsoby,

je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Kombinatorické pravidlo součinu

Příklad 1: Máme dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých dvojic muž – žena můžeme vytvořit?



$$4 + 4 + 4 = \boxed{3 \cdot 4}$$

a zároveň

Počet všech uspořádaných **k**-tic, jejichž

- první člen lze vybrat n_1 způsoby,
- druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby
- atd. až
- **k**-tý člen po výběru všech předcházejících členu n_k způsoby,

je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Kombinatorické pravidlo součinu

Počet všech uspořádaných **k**-tic, jejichž

- první člen lze vybrat n_1 způsoby,
- druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby
- atd. až
- **k**-tý člen po výběru všech předcházejících členu n_k způsoby,

je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Kombinatorické pravidlo součinu

Příklad 2: Kolik různých uspořádaných **dvojic** čísel můžeme dostat, když hodíme dvakrát kostkou s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách?

Řešení

- V prvním hodu může padnout jedno ze šesti čísel, tj. $\boldsymbol{n_1=6}$,
- ke každému z nich může ve druhém hodu opět padnout jedno ze šesti čísel, tj. $\boldsymbol{n_2=6}$.

Počet různých dvojic ($k=2$) je tedy $6 \cdot 6 = \mathbf{36}$.

Počet všech uspořádaných **k**-tic, jejichž

- první člen lze vybrat $\mathbf{n_1}$ způsoby,
- druhý člen po výběru prvního členu $\mathbf{n_2}$ způsoby
- atd. až
- **k**-tý člen po výběru všech předcházejících členu $\mathbf{n_k}$ způsoby,

je roven $\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2} \cdot \ldots \cdot \mathbf{n_k}$.

Kombinatorické pravidlo součinu

Příklad 2: Kolik různých uspořádaných **dvojic** čísel můžeme dostat, když hodíme dvakrát kostkou s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách?

Řešení

- V prvním hodu může padnout jedno ze šesti čísel, tj. $\boldsymbol{n_1=6}$,
- ke každému z nich může ve druhém hodu opět padnout jedno ze šesti čísel, tj. $\boldsymbol{n_2=6}$.

Počet různých dvojic ($k=2$) je tedy $6 \cdot 6 = \mathbf{36}$.

a zároveň

Počet všech uspořádaných **k**-tic, jejichž

- první člen lze vybrat $\mathbf{n_1}$ způsoby,
- druhý člen po výběru prvního členu $\mathbf{n_2}$ způsoby
- atd. až
- **k**-tý člen po výběru všech předcházejících členu $\mathbf{n_k}$ způsoby,

je roven $\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2} \cdot \ldots \cdot \mathbf{n_k}$.

Kombinatorické pravidlo součtu

Příklad 3: Kolik mám možností si vybrat pastelku, jestliže mám k dispozici

tři žluté odstíny, dva modré a čtyři zelené?

Kombinatorické pravidlo součtu

Příklad 3: Kolik mám možností si vybrat pastelku, jestliže mám k dispozici

tři žluté odstíny, dva modré a čtyři zelené?

3

Kombinatorické pravidlo součtu

Příklad 3: Kolik mám možností si vybrat pastelku, jestliže mám k dispozici

tři žluté odstíny, dva modré a čtyři zelené?

3 + 2

Kombinatorické pravidlo součtu

Příklad 3: Kolik mám možností si vybrat pastelku, jestliže mám k dispozici

tři žluté odstíny, dva modré a čtyři zelené?

$$3 + 2 + 4$$

Kombinatorické pravidlo součtu

Příklad 3: Kolik mám možností si vybrat pastelku, jestliže mám k dispozici

tři žluté odstíny, dva modré a čtyři zelené?

3 + 2 + 4

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny

sjednocení = $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

je roven $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

Kombinatorické pravidlo součtu

Příklad 3: Kolik mám možností si vybrat pastelku, jestliže mám k dispozici

tři žluté odstíny, dva modré a čtyři zelené?

3 + 2 + 4

NEBO

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny

sjednocení = $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

je roven $p_1 + p_2 + \dots + p_n$.

Použití kombinatorických pravidel součtu a součinu

Příklad 4: Kolik existuje různých dvojciferných čísel?

Příklad 5: Kolik existuje různých trojciferných čísel, kde se žádná číslice nesmí vyskytnout dvakrát?

Příklad 6: Dvakrát za sebou hodíme klasickou hrací kostkou. Kolik různých výsledků můžeme získat, pokud nám v prvním hodu padlo sudé číslo?

Použití kombinatorických pravidel součtu a součinu

Příklad 4: Kolik existuje různých dvojciferných čísel?

0, 1, 2, 3, 4, 5,
6, 7, 8, 9

$\boxed{\_\_}$	$\boxed{\_\_}$	
první pozice	druhá pozice	
1 – 9	0 – 9	9 · 10 = **90 čísel**

Příklad 5: Kolik existuje různých trojciferných čísel, kde se žádná číslice nesmí vyskytnout dvakrát?

Příklad 6: Dvakrát za sebou hodíme klasickou hrací kostkou. Kolik různých výsledků můžeme získat, pokud nám v prvním hodu padlo sudé číslo?

Použití kombinatorických pravidel součtu a součinu

Příklad 4: Kolik existuje různých dvojciferných čísel?

první pozice 1 – 9 | a zároveň | druhá pozice 0 – 9

$9 \cdot 10 =$ **90 čísel**

Příklad 5: Kolik existuje různých trojciferných čísel, kde se žádná číslice nesmí vyskytnout dvakrát?

Příklad 6: Dvakrát za sebou hodíme klasickou hrací kostkou. Kolik různých výsledků můžeme získat, pokud nám v prvním hodu padlo sudé číslo?

Použití kombinatorických pravidel součtu a součinu

Příklad 4: Kolik existuje různých dvojciferných čísel?

první pozice 1 – 9 | a zároveň | druhá pozice 0 – 9

9 · 10 = **90 čísel**

Příklad 5: Kolik existuje různých trojciferných čísel, kde se žádná číslice nesmí vyskytnout dvakrát?

první pozice 1 – 9

druhá pozice 0 – 9 bez čísla na prvním místě

třetí pozice 0 – 9 bez čísel na prvním a druhém místě

$9 \cdot 9 \cdot 8$

Příklad 6: Dvakrát za sebou hodíme klasickou hrací kostkou. Kolik různých výsledků můžeme získat, pokud nám v prvním hodu padlo sudé číslo?

Použití kombinatorických pravidel součtu a součinu

Příklad 4: Kolik existuje různých dvojciferných čísel?

první pozice 1 – 9 — a zároveň — druhá pozice 0 – 9

$9 \cdot 10 =$ **90 čísel**

Příklad 5: Kolik existuje různých trojciferných čísel, kde se žádná číslice nesmí vyskytnout dvakrát?

první pozice 1 – 9	druhá pozice 0 – 9 bez čísla na prvním místě	třetí pozice 0 – 9 bez čísel na prvním a druhém místě

Příklad 6: Dvakrát za sebou hodíme klasickou hrací kostkou. Kolik různých výsledků můžeme získat, pokud nám v prvním hodu padlo sudé číslo?

Použití kombinatorických pravidel součtu a součinu

Příklad 4: Kolik existuje různých dvojciferných čísel?

první pozice 1 – 9 | a zároveň | druhá pozice 0 – 9

$9 \cdot 10 =$ **90 čísel**

Příklad 5: Kolik existuje různých trojciferných čísel, kde se žádná číslice nesmí vyskytnout dvakrát?

první pozice 1 – 9 | a zároveň | druhá pozice 0 – 9 bez čísla na prvním místě | a zároveň | třetí pozice 0 – 9 bez čísel na prvním a druhém místě

$9 \cdot 9 \cdot 8 = 81 \cdot 8 =$

Příklad 6: Dvakrát za sebou hodíme klasickou hrací kostkou. Kolik různých výsledků můžeme získat, pokud by nám v prvním hodu padlo sudé číslo?

1, 2, 3, 4, 5, 6

$3 \cdot 6 = 18$

Kombinatorika

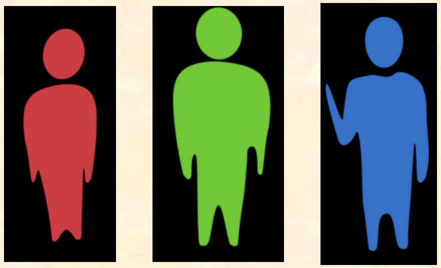
Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

Kombinatorika

$\boxed{\text{Permutace!}}$ = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

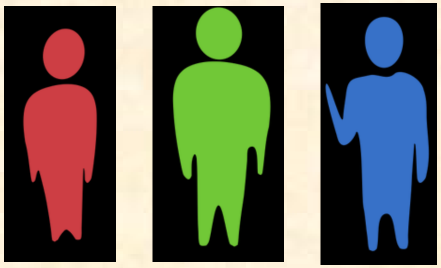
Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?



Kombinatorika

Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?



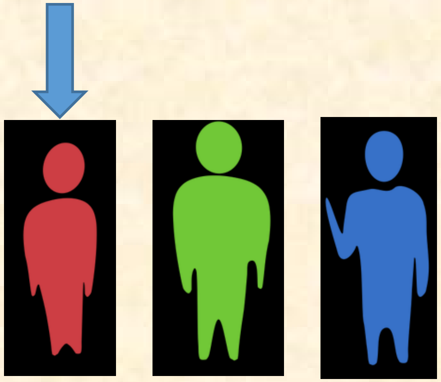
1

Kombinatorika

Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1

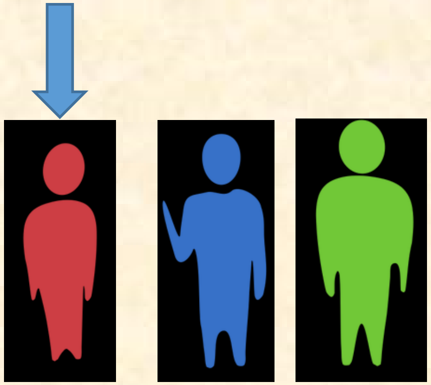


Kombinatorika

Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

2

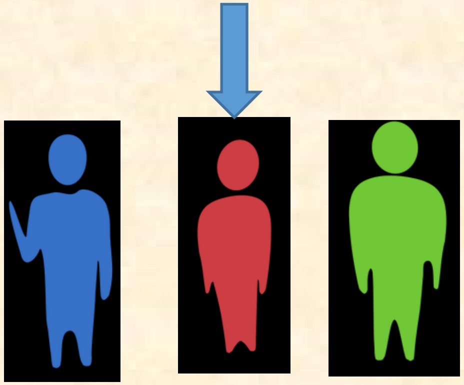


Kombinatorika

Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

3

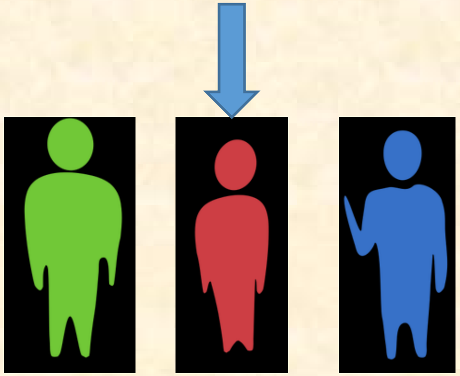


Kombinatorika

Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

4

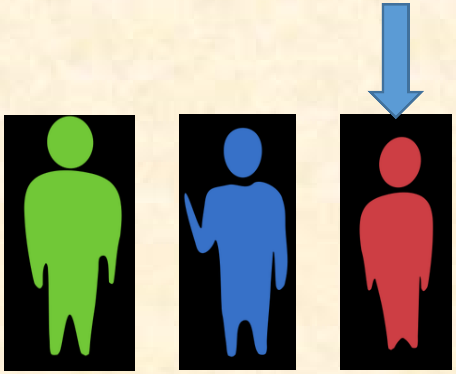


Kombinatorika

Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

5



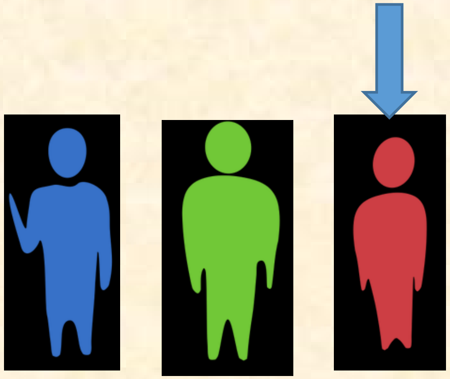
MVŠO KNOWLEDGE FOR THE FUTURE

Kombinatorika

Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

6



Kombinatorika

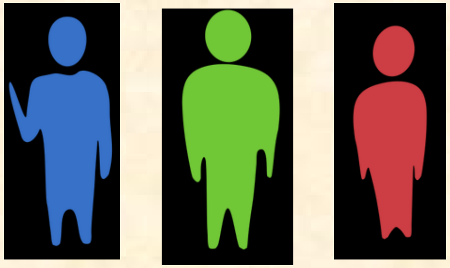
Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

1\. židle   3. židle

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

2\. židle



Kombinatorika

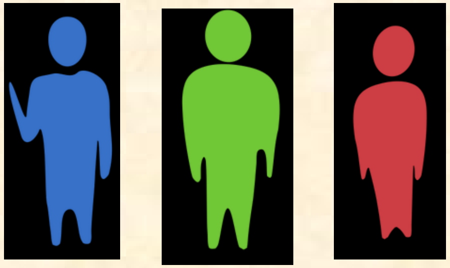
Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?

$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$$\mathbf{3 \cdot 2 \cdot 1 = 6}$$

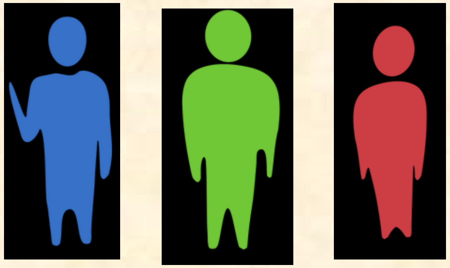
a zároveň



Kombinatorika

Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?



$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Kombinatorika

Permutace! = uspořádaná **n-tice** vybraná z **n prvků**

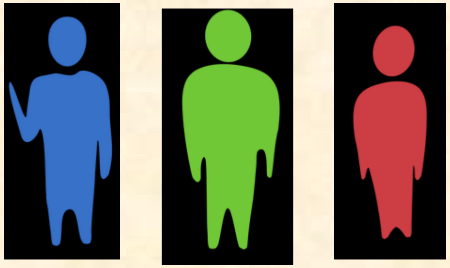
$\boxed{0! = 1}$

$1! = 1$

$$P(n) = n!$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

Příklad: Kolika způsoby lze obsadit 3 křesla třemi osobami?



$$\mathbf{3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6}$$

Kombinatorika

Permutace!

Příklad 1: Kolik pěticiferných čísel dokážeme sestavit z cifer {1, 2, 3, 4, 5}?

Příklad 2: Kolika způsoby lze na poličce seřadit 6 knih?

Příklad 3: K našim 6ti knihám psaných českým jazykem přidejme další 4 knihy psané francouzsky. Kolik existuje různých způsobů uložení těchto 10 knih na poličku, pokud chceme mít všechny české a všechny francouzské pohromadě?

Kombinatorika

Permutace!

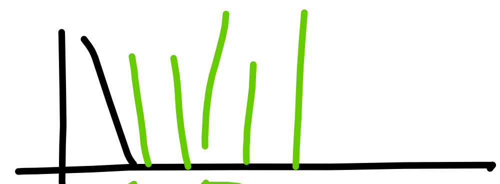
1 2 3 4 5

Příklad 1: Kolik pěticiferných čísel dokážeme sestavit z cifer {1, 2, 3, 4, 5}?

$$5! = \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$ **čísel**

EXCEL: $\boxed{\text{= Faktoriál(5)}}$

Příklad 2: Kolika způsoby lze na poličce seřadit 6 knih?



6 · 5 · 1

Příklad 3: K našim 6ti knihám psaných českým jazykem přidejme další 4 knihy psané francouzsky. Kolik existuje různých způsobů uložení těchto 10 knih na poličku, pokud chceme mít všechny české a všechny francouzské pohromadě?

Kombinatorika

Permutace!

Příklad 1: Kolik pěticiferných čísel dokážeme sestavit z cifer {1, 2, 3, 4, 5}?

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **120 čísel**

EXCEL: = Faktoriál(5)

Příklad 2: Kolika způsoby lze na poličce seřadit 6 knih?

$P(6) = 6! =$ **720 způsobů seřazení**

EXCEL: = Faktoriál(6)

Příklad 3: K našim 6ti knihám psaných českým jazykem přidejme další 4 knihy psané francouzsky. Kolik existuje různých způsobů uložení těchto 10 knih na poličku, pokud chceme mít všechny české a všechny francouzské pohromadě?

$6! \cdot 4! + 4! \cdot 6!$

Kombinatorika

Permutace!

Příklad 1: Kolik pěticiferných čísel dokážeme sestavit z cifer {1, 2, 3, 4, 5}?

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **120 čísel**

EXCEL: = Faktoriál(5)

Příklad 2: Kolika způsoby lze na poličce seřadit 6 knih?

$P(6) = 6! =$ **720 způsobů seřazení**

EXCEL: = Faktoriál(6)

Příklad 3: K našim 6ti knihám psaných českým jazykem přidejme další 4 knihy psané francouzsky. Kolik existuje různých způsobů uložení těchto 10 knih na poličku, pokud chceme mít všechny české a všechny francouzské pohromadě?

$P(6) \cdot P(4) + P(4) \cdot P(6) = 6! \cdot 4! + 4! \cdot 6! = 17\,280 + 17\,280 =$ **34 560 různých způsobů**

Kombinatorika

Permutace!

Příklad 1: Kolik pěticiferných čísel dokážeme sestavit z cifer {1, 2, 3, 4, 5}?

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ **120 čísel**

EXCEL: = Faktoriál(5)

Příklad 2: Kolika způsoby lze na poličce seřadit 6 knih?

$P(6) = 6! =$ **720 způsobů seřazení**

EXCEL: = Faktoriál(6)

Příklad 3: K našim 6ti knihám psaných českým jazykem přidejme další 4 knihy psané francouzsky. Kolik existuje různých způsobů uložení těchto 10 knih na poličku, pokud chceme mít všechny české a všechny francouzské pohromadě?

$P(6) \cdot P(4) + P(4) \cdot P(6) = 6! \cdot 4! + 4! \cdot 6! = 17\,280 + 17\,280 =$ **34 560 různých způsobů**

EXCEL: = Faktoriál(6)* Faktoriál(4)*2

Kombinatorika

Variace = uspořádaná **k-tice** vybraná z **n prvků**, $k < n$

Příklad: Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?`

Kombinatorika

Variace = uspořádaná **k-tice** vybraná z **n prvků,** k < n

Příklad: Na startu běžeckého závodu je 8 atletů. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?`

1. 2. 3.

Kombinatorika

Variace = uspořádaná **k-tice** vybraná z **n prvků**, $k < n$

Příklad: Na startu běžeckého závodu je **8 atletů**. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?`

1. 2. 3.

$$8 \cdot 7 \cdot 6$$

Kombinatorika

Variace = uspořádaná **k-tice** vybraná z **n prvků**, $k < n$

Příklad: Na startu běžeckého závodu je **8 atletů**. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?`

1. 2. 3.

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ možností}$$

Kombinatorika

Variace = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků, k < n

Variace k-té třídy z n prvků

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)$$

$V_3(8) = 8 \cdot 7 \cdot$ $(8-3+1)$

6

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad: Na startu běžeckého závodu je **8 atletů**. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?`

1. 2. 3.

$V_3(8) =$ $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ možností

Kombinatorika

Variace = uspořádaná k-tice vybraná z **n prvků**, $k < n$

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)$$

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5}\cdot}{\cancel{5}\cdot \cancel{4}}$$

$$V_3(8)$$

Příklad: Na startu běžeckého závodu je **8 atletů**. Kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů?`

1. 2. 3.

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ možností

Kombinatorika

Variace

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} = \text{Permutace}(n;\, k)$$

Příklad 1: Do finále soutěže v pojídání knedlíků postoupilo 7 účastníků. Kolik existuje možností, jak by mohlo těchto sedm účastníků obsadit první tři místa?

Příklad 2: . Jak se změní počet možných medailových umístění, jestliže na závod přijel favorit, který vždy zvítězí?

Příklad 3: Jak se počet možností změní, jestliže pouze víme, že zmíněný favorit vždy obsadí některé z medailových umístění?

Kombinatorika

Variace $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ = Permutace$(n; k)$

Příklad 1: Do finále soutěže v pojídání knedlíků postoupilo 7 účastníků. Kolik existuje možností, jak by mohlo těchto sedm účastníků obsadit první tři místa?

$$V_3(7) = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \textbf{210 možností}$$

Příklad 2: . Jak se změní počet možných medailových umístění, jestliže na závod přijel favorit, který vždy zvítězí?

Příklad 3: Jak se počet možností změní, jestliže pouze víme, že zmíněný favorit vždy obsadí některé z medailových umístění?

Kombinatorika

Variace $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ = Permutace$(n; k)$

Příklad 1: Do finále soutěže v pojídání knedlíků postoupilo 7 účastníků. Kolik existuje možností, jak by mohlo těchto sedm účastníků obsadit první tři místa?

$$V_3(7) = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \textbf{210 možností}$$

Příklad 2: . Jak se změní počet možných medailových umístění, jestliže na závod přijel favorit, který vždy zvítězí?

$$V_2(6) = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = \textbf{30 možností}$$

Příklad 3: Jak se počet možností změní, jestliže pouze víme, že zmíněný favorit vždy obsadí některé z medailových umístění?

Kombinatorika

Variace $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ = Permutace$(n; k)$

Příklad 1: Do finále soutěže v pojídání knedlíků postoupilo 7 účastníků. Kolik existuje možností, jak by mohlo těchto sedm účastníků obsadit první tři místa?

$$V_3(7) = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \mathbf{210\ možností}$$

Příklad 2: . Jak se změní počet možných medailových umístění, jestliže na závod přijel favorit, který vždy zvítězí?

$$V_2(6) = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = \mathbf{30\ možností}$$

Příklad 3: Jak se počet možností změní, jestliže pouze víme, že zmíněný favorit vždy obsadí některé z medailových umístění?

$$\mathbf{3} \cdot V_2(6) = \mathbf{3} \cdot \frac{6!}{4!} = \mathbf{3} \cdot 6 \cdot 5 = \mathbf{3} \cdot 30 = \mathbf{90\ možností}$$

$$V_2(6) + V_2(6) + V_2(6)$$

Kombinatorika

Variace $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ = Permutace$(n; k)$

Příklad 1: Do finále soutěže v pojídání knedlíků postoupilo 7 účastníků. Kolik existuje možností, jak by mohlo těchto sedm účastníků obsadit první tři místa?

$$V_3(7) = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \mathbf{210\ možností}$$

EXCEL: = Permutace$(7; 3)$

Příklad 2: . Jak se změní počet možných medailových umístění, jestliže na závod přijel favorit, který vždy zvítězí?

EXCEL: = Permutace$(6; 2)$

$$V_2(6) = \frac{6!}{4!} = 6 \cdot 5 = \mathbf{30\ možností}$$

Příklad 3: Jak se počet možností změní, jestliže pouze víme, že zmíněný favorit vždy obsadí některé z medailových umístění?

$$\mathbf{3} \cdot V_2(6) = \mathbf{3} \cdot \frac{6!}{4!} = \mathbf{3} \cdot 6 \cdot 5 = \mathbf{3} \cdot 30 = \mathbf{90\ možností}$$

EXCEL: = 3* Permutace$(6; 2)$

Kombinatorika

Kombinace = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru *k* prvků z *n*-členné množiny, považujeme všechny *k*-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné. Takových *k*-tic je pro každý výběr prvků *k*!. Proto je počet kombinací bez opakování *k*! krát menší než počet variací bez opakování:

Příklad: Sportka je numerická hra, v níž se losuje 6 čísel ze 49. Hráč na svém tiketu zaškrtne 6 čísel. Kolik tiketů by hráč musel vyplnit (po každé s jinou kombinací čísel), chtěl-li by mít jistotu, že „uhádne“ všechna čísla?

Kombinatorika

Kombinace = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n-členné množiny, považujeme všechny k-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné. Takových k-tic je pro každý výběr prvků $k!$. Proto je počet kombinací bez opakování $k!$ krát menší než počet variací bez opakování:

$$C_k(n) = \frac{1}{k!} V_k(n) = \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad: Sportka je numerická hra, v níž se losuje 6 čísel ze 49. Hráč na svém tiketu zaškrtne 6 čísel. Kolik tiketů by hráč musel vyplnit (po každé s jinou kombinací čísel), chtěl-li by mít jistotu, že „uhádne“ všechna čísla?

Kombinatorika

Kombinace = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru *k* prvků z ***n***-členné množiny, považujeme všechny *k*-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné. Takových *k*-tic je pro každý výběr prvků *k*!. Proto je počet kombinací bez opakování *k*! krát menší než počet variací bez opakování:

$$C_k(n) = \frac{1}{k!} V_k(n) = \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!}$$

tzv. kombinační číslo $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Příklad: Sportka je numerická hra, v níž se losuje 6 čísel ze 49. Hráč na svém tiketu zaškrtne 6 čísel. Kolik tiketů by hráč musel vyplnit (po každé s jinou kombinací čísel), chtěl-li by mít jistotu, že „uhádne“ všechna čísla?

Kombinatorika

Kombinace = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n-členné množiny, považujeme všechny k-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné. Takových k-tic je pro každý výběr prvků $k!$. Proto je počet kombinací bez opakování $k!$ krát menší než počet variací bez opakování:

$$C_k(n) = \frac{1}{k!} V_k(n) = \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!}$$

tzv. kombinační číslo $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Příklad: Sportka je numerická hra, v níž se losuje **6** čísel ze **49**. Hráč na svém tiketu zaškrtne **6** čísel. Kolik tiketů by hráč musel vyplnit (po každé s jinou kombinací čísel), chtěl-li by mít jistotu, že „uhádne" všechna čísla?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 816\ 983\ 13 \text{ tiketů}$$

Kombinatorika

Kombinace = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n-členné množiny, považujeme všechny k-tice se stejnými prvky v různém pořadí za rovnocenné. Takových k-tic je pro každý výběr prvků $k!$. Proto je počet kombinací bez opakování $k!$ krát menší než počet variací bez opakování:

$$C_k(n) = \frac{1}{k!} V_k(n) = \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!}$$

tzv. kombinační číslo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Příklad: Sportka je numerická hra, v níž se losuje **6** čísel ze **49**. Hráč na svém tiketu zaškrtne **6** čísel. Kolik tiketů by hráč musel vyplnit (po každé s jinou kombinací čísel), chtěl-li by mít jistotu, že „uhádne" všechna čísla?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816 \text{tiketů}$$

Kombinatorika

Kombinace Nezáleží nám na pořadí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ = Kombinace$(n; k)$

- **Příklad 1:** V osudí je 50 míčků a losujeme z něj 5 míčků. Kolik různých možností můžeme vylosovat?

Příklad 2: . Na „tour de pub“ máme na výběr z 8mi hospůdek. Stihnout ale můžeme pouze 4. Kolik různých čtveřic hospůdek můžeme navštívit?

Příklad 3: Ze skupiny 25ti mužů a 15ti žen volíme trojici tak, aby nebyla jen čistě ženská nebo mužská. Kolik takových smíšených trojic existuje?

Kombinatorika

Kombinace Nezáleží nám na pořadí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ = Kombinace$(n; k)$

- **Příklad 1:** V osudí je 50 míčků a losujeme z něj 5 míčků. Kolik různých možností můžeme vylosovat?

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \cdot (50-5)!}$$ = 2 118 760 možností

Příklad 2: . Na „tour de pub“ máme na výběr z 8mi hospůdek. Stihnout ale můžeme pouze 4. Kolik různých čtveřic hospůdek můžeme navštívit?

Příklad 3: Ze skupiny 25ti mužů a 15ti žen volíme trojici tak, aby nebyla jen čistě ženská nebo mužská. Kolik takových smíšených trojic existuje?

Kombinatorika

Kombinace

Nezáleží nám na pořadí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ = Kombinace$(n; k)$

- **Příklad 1:** V osudí je 50 míčků a losujeme z něj 5 míčků. Kolik různých možností můžeme vylosovat?

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \cdot (50-5)!} = 2\ 118\ 760 \text{ možností}$$

Příklad 2: . Na „tour de pub“ máme na výběr z 8mi hospůdek. Stihnout ale můžeme pouze 4. Kolik různých čtveřic hospůdek můžeme navštívit?

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = 40 \text{ možností}$$

Příklad 3: Ze skupiny 25ti mužů a 15ti žen volíme trojici tak, aby nebyla jen čistě ženská nebo mužská. Kolik takových smíšených trojic existuje?

Kombinatorika

Kombinace Nezáleží nám na pořadí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ = Kombinace$(n; k)$

- **Příklad 1:** V osudí je 50 míčků a losujeme z něj 5 míčků. Kolik různých možností můžeme vylosovat?

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \cdot (50-5)!} = 2\,118\,760 \text{ možností}$$

Příklad 2: . Na „tour de pub“ máme na výběr z 8mi hospůdek. Stihnout ale můžeme pouze 4. Kolik různých čtveřic hospůdek můžeme navštívit?

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = 70 \text{ možností}$$

Příklad 3: Ze skupiny 25ti mužů a 15ti žen volíme trojici tak, aby nebyla jen čistě ženská nebo mužská. Kolik takových smíšených trojic existuje?

$$\binom{25}{2} \cdot \binom{15}{1} + \binom{25}{1} \cdot \binom{15}{2} = 7\,125 \text{ možností}$$

Kombinatorika

Kombinace Nezáleží nám na pořadí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ = Kombinace(n; k)

- **Příklad 1:** V osudí je 50 míčků a losujeme z něj 5 míčků. Kolik různých možností můžeme vylosovat?

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \cdot (50-5)!} = 2\,118\,760 \text{ možností}$$

EXCEL: =Kombinace(50; 5)

Příklad 2: . Na „tour de pub“ máme na výběr z 8mi hospůdek. Stihnout ale můžeme pouze 4. Kolik různých čtveřic hospůdek můžeme navštívit?

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = 40 \text{ možností}$$

EXCEL: =Kombinace(8; 4)

Příklad 3: Ze skupiny 25ti mužů a 15ti žen volíme trojici tak, aby nebyla jen čistě ženská nebo mužská. Kolik takových smíšených trojic existuje?

$$\binom{25}{2} \cdot \binom{15}{1} + \binom{25}{1} \cdot \binom{15}{2} = 7\,125 \text{ možností}$$

EXCEL: =Kombinace(25; 2)* Kombinace(15; 1) + Kombinace(25; 1)* Kombinace(15; 2)

Pravidlo součinu

$\cdot$

a zároveň

Kombinatorika

Shrnutí č.1

Pravidlo součtu

$+$

NEBO

Permutace! záleží na pořadí, vybíráme n prvků z n prvků

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$ =Faktoriál(n)

Variace záleží na pořadí, vybíráme k prvků z n prvků, $k \leq n$

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$ =Permutace(n; k)

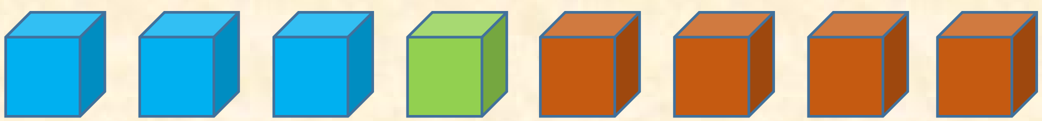
Kombinace nezáleži na pořadí, vybíráme k prvků z n prvků,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$ =Kombinace(n; k)

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

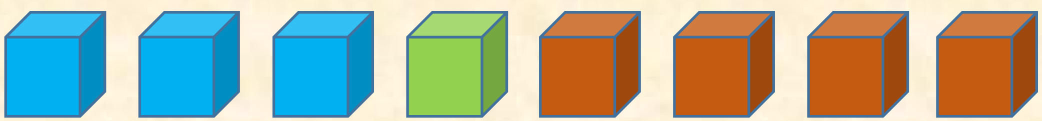
Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?

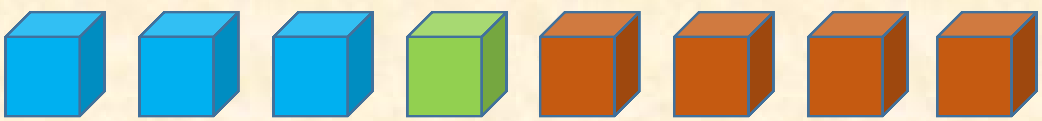


Kdyby byly kostky od sebe odlišitelné, pak by počet možností byl

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n -tice vybraná z n prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



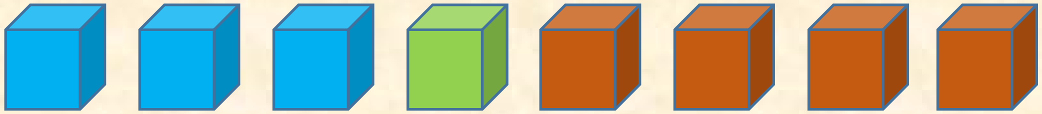
Kdyby byly kostky od sebe odlišitelné, pak by počet možností byl

$$(3+1+4)! = 8! = 40\,320$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n -tice vybraná z n prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?

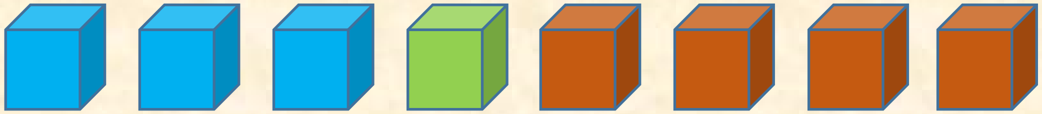


Ale

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?

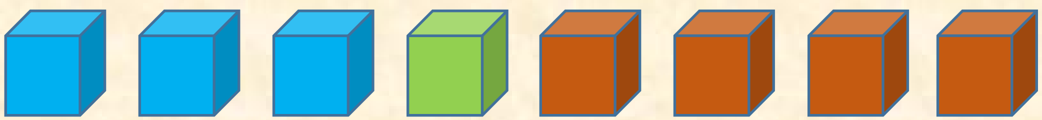


Ale například ty **tři modré** jsou úplně stejné!

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



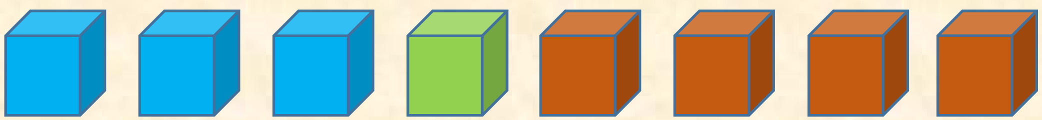
Ale například ty **tři modré** jsou úplně stejné! Je tedy zapotřebí celkový počet možností podělit počtem případů, kdy dochází pouze ke změnám mezi modrými

$$\frac{(3+1+4)!}{3!} = \frac{8!}{3!} = \frac{40\,320}{6}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?

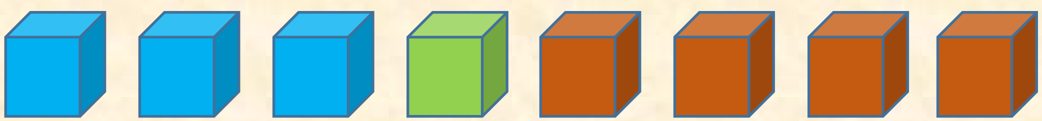


Ale navíc i ty **čtyři hnědé** jsou také úplně stejné!

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



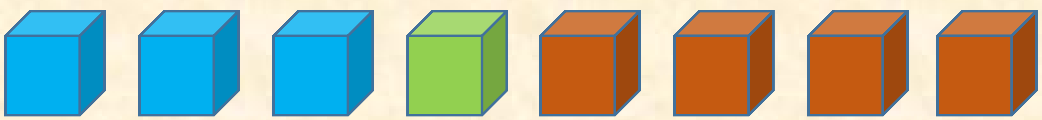
Ale navíc i ty **čtyři hnědé** jsou také úplně stejné! Je tedy zapotřebí ještě podělit počtem případů, kdy dochází pouze ke změnám mezi hnědými

$$\frac{(3+1+4)!}{3!} = \frac{8!}{3!} = \frac{40\,320}{6}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



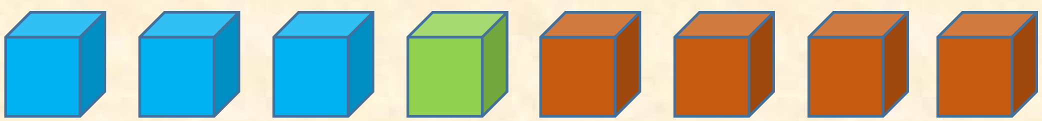
Ale navíc i ty **čtyři hnědé** jsou také úplně stejné! Je tedy zapotřebí ještě podělit počtem případů, kdy dochází pouze ke změnám mezi hnědými

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n -tice vybraná z n prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



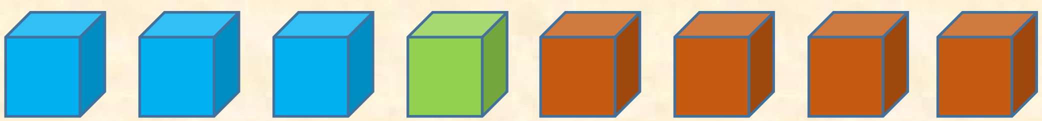
A co ta **jedna zelená**?

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n -tice vybraná z n prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



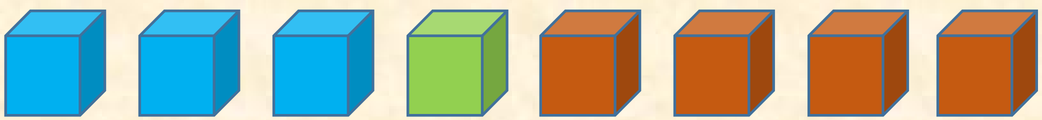
A co ta **jedna zelená**? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení?

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n-tice vybraná z n prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



A co ta **jedna zelená**? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení? Ale ano ☺

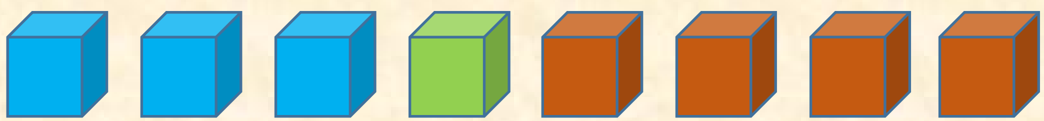
$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 1\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

$$P^*_{n_1 n_2 n_3}(n_1 + n_2 + n_3) = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}$$

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



A co ta **jedna zelená**? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení? Ale ano ☺

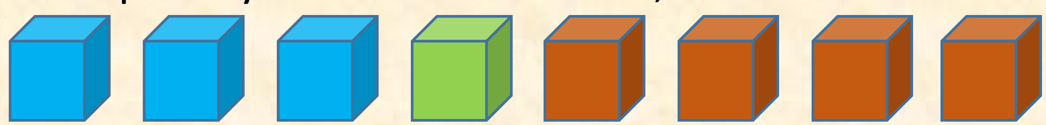
$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 1\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n-tice vybraná z n prvků

$$P^*_{n_1 n_2 n_3}(\overbrace{n_1+n_2+n_3}^{\text{součet} = n}) = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}$$

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



A co ta **jedna zelená**? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení? Ale ano ☺

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 1\cdot 24}$$

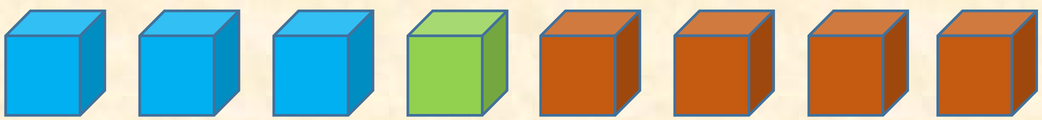
Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n-tice vybraná z n prvků

kde n_1 prvků se opakuje,
n_2 prvků se opakuje,
n_3 prvků se opakuje, ... atd.

$$P^*_{n_1 n_2 n_3}\underbrace{(n_1+n_2+n_3)}_{\text{součet } = n} = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}$$

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



A co ta **jedna zelená**? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení? Ale ano ☺

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 1\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* Záleží nám na pořadí $P^{*}_{n_1 n_2 n_3}(n_1 + n_2 + n_3) = \dfrac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}$

=Faktoriál($n_1 + n_2 + n_3$)/ Faktoriál(n_1) / Faktoriál(n_2) / Faktoriál(n_3)

Příklad 1: Kolika způsoby lze 14ti dětem stojícím v řadě vedle sebe rozdělit 4 žluté, 3 zelené a 7 oranžových kuliček tak, aby každé dostalo po jedné?

Příklad 2: . Kolik možností sestavit čtyřmístný kód ze dvou různých znaků?

Kombinatorika

Permutace! s opakováním*

Záleží nám na pořadí $P^{*}_{n_1 n_2 n_3}(n_1+n_2+n_3)=\frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}$

=Faktoriál($n_1+n_2+n_3$)/ Faktoriál(n_1) / Faktoriál(n_2) / Faktoriál(n_3)

Příklad 1: Kolika způsoby lze 14ti dětem stojícím v řadě vedle sebe rozdělit 4 žluté, 3 zelené a 7 oranžových kuliček tak, aby každé dostalo po jedné?

$$P^{*}_{4,3,7}=\frac{(4+3+7)!}{4!\cdot 3!\cdot 7!}$$ = 120 120 možností

Příklad 2: . Kolik možností sestavit čtyřmístný kód ze dvou různých znaků?

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* Záleží nám na pořadí $P^*_{n_1 n_2 n_3}(n_1+n_2+n_3) = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}$

=Faktoriál($n_1+n_2+n_3$)/ Faktoriál(n_1) / Faktoriál(n_2) / Faktoriál(n_3)

Příklad 1: Kolika způsoby lze 14ti dětem stojícím v řadě vedle sebe rozdělit 4 žluté, 3 zelené a 7 oranžových kuliček tak, aby každé dostalo po jedné?

$$P^*_{4,3,7} = \frac{(4+3+7)!}{4!\cdot 3!\cdot 7!}$$ = **120 120 možností**

Příklad 2: . Kolik možností sestavit čtyřmístný kód ze dvou různých znaků?

$$P^*_{2,2} = \frac{(2+2)!}{2!\cdot 2!}$$ = 6 možností

nebo

$$P^*_{1,3} = \frac{(1+3)!}{1!\cdot 3!}$$ = 4 možnosti nebo $$P^*_{3,1} = \frac{(3+1)!}{3!\cdot 1!}$$ = 4 možností

nebo

$$P^*_{0,4} = \frac{(0+4)!}{0!\cdot 4!}$$ = 1 možnost nebo $$P^*_{4,0} = \frac{(4+0)!}{4!\cdot 0!}$$ = 1 možnost

Celkem 16 možností

Kombinatorika

Permutace! s opakováním*

Záleží nám na pořadí $P^*_{n_1 n_2 n_3}(n_1+n_2+n_3) = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}$

=Faktoriál($n_1+n_2+n_3$)/ Faktoriál(n_1) / Faktoriál(n_2) / Faktoriál(n_3)

Příklad 1: Kolika způsoby lze 14ti dětem stojícím v řadě vedle sebe rozdělit 4 žluté, 3 zelené a 7 oranžových kuliček tak, aby každé dostalo po jedné?

$$P^*_{4,3,7} = \frac{(4+3+7)!}{4! \cdot 3! \cdot 7!}$$ = 120 120 možností

Příklad 2: . Kolik možností sestavit čtyřmístný kód ze dvou různých znaků?

$$P^*_{2,2} = \frac{(2+2)!}{2! \cdot 2!}$$ = 6 možností

nebo

$$P^*_{1,3} = \frac{(1+3)!}{1! \cdot 3!}$$ = 4 možnosti

nebo

$$P^*_{3,1} = \frac{(3+1)!}{3! \cdot 1!}$$ = 4 možností

nebo

$$P^*_{0,4} = \frac{(0+4)!}{0! \cdot 4!}$$ = 1 možnost

nebo

$$P^*_{4,0} = \frac{(4+0)!}{4! \cdot 0!}$$ = 1 možnost

Celkem 16 možností

Kombinatorika

Variace s opakováním* = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může libovolně-krát opakovat.

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

-----	-----	-----	-----
10 možností	10 možností	10 možností	10 možností

Kombinatorika

Variace s opakováním* = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může libovolně-krát opakovat.

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

----- a zároveň ----- a zároveň ----- a zároveň -----

10 možností a zároveň 10 možností a zároveň 10 možností a zároveň 10 možností

Kombinatorika

Variace s opakováním* = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může libovolně-krát opakovat.

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

10 a zároveň 10 a zároveň 10 a zároveň 10

Kombinatorika

$\boxed{\text{Variace s opakováním*}}$ = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může libovolně-krát opakovat.

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

Kombinatorika

Variace s opakováním* = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může libovolně-krát opakovat.

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

kódů

Kombinatorika

$\boxed{\text{Variace s opakováním*}}$ = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může libovolně-krát opakovat.

$$V_k^*(n) = n^k \quad = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k \text{ krát}}$$

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

$$10 \quad \cdot \quad 10 \quad \cdot \quad 10 \quad \cdot \quad 10 = 10^4$$

kódů

Kombinatorika

Variace s opakováním*

Záleží nám na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

$V_k^*(n) = n^k$ $= n$^k

Příklad 1: Kolik je všech pěticiferných čísel?

Příklad 2: . Kolik teoreticky můžeme sestavit různých značek v Morseově abecedě, jestliže budeme sestavovat tečky a čárky do sestav o jednom až pěti znacích?

Kombinatorika

Variace s opakováním*

Záleží nám na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

$V_k^*(n) = n^k$ $= n$^k

Příklad 1: Kolik je všech pěticiferných čísel?

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

$V_5^*(10) = 10^5$ možností

bez čísel začínajících nulou, tj. $V_4^*(10) = 10^4$ možností

Celkem $10^5 - 10^4$ = 90 000 možností.

Příklad 2: . Kolik teoreticky můžeme sestavit různých značek v Morseově abecedě, jestliže budeme sestavovat tečky a čárky do sestav o jednom až pěti znacích?

Kombinatorika

Variace s opakováním*

Záleží nám na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

$$V_k^*(n) = n^k \qquad = n\hat{\ }k$$

Příklad 1: Kolik je všech pěticiferných čísel?

$V_5^*(10) = 10^5$ možností

bez čísel začínajících nulou, tj. $V_4^*(10) = 10^4$ možností

Celkem $10^5 - 10^4$ = 90 000 možností.

Příklad 2: . Kolik teoreticky můžeme sestavit různých značek v Morseově abecedě, jestliže budeme sestavovat tečky a čárky do sestav o jednom až pěti znacích?

$V_5^*(2) = 2^5$= 32 možností

nebo

$V_4^*(2) = 2^4$= 16 možností nebo $V_3^*(2) = 2^3$= 8 možností

nebo

$V_2^*(2) = 2^2$= 4 možnosti nebo $V_1^*(2) = 2^1$= 2 možnosti

Celkem 62 možností

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru $\boldsymbol{k}$ prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_{\boldsymbol{k}}^{*}(n) = \binom{n + \boldsymbol{k} - 1}{\boldsymbol{k}}$$

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		

Kombinatorika

$\boxed{\text{Kombinace s opakováním*}}$ = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
X X			{1,1}	1

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
x x			{1,1}	1
	x x		{2,2}	2

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n + k - 1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
x x			{1,1}	1
	x x		{2,2}	2
		x x	{3,3}	3

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
X X			{1,1}	1
	X X		{2,2}	2
		X X	{3,3}	3
X	X		{1,2}	4

Kombinatorika

$\boxed{\text{Kombinace s opakováním*}}$ = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
x x			{1,1}	1
	x x		{2,2}	2
		x x	{3,3}	3
x	x		{1,2}	4
x		x	{1,3}	5

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
X X			{1,1}	1
	X X		{2,2}	2
		X X	{3,3}	3
X	X		{1,2}	4
X		X	{1,3}	5
	X	X	{2,3}	6

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru $\boldsymbol{k}$ prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_{k}^{*}(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
x x			{1,1}	1
	x x		{2,2}	2
		x x	{3,3}	3
x	x		{1,2}	4
x		x	{1,3}	5
	x	x	{2,3}	6

Řešení: Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy $C_{2}^{*}(3)$,
tj. počet neuspořádaných dvojic (k =2)
ze **3** prvků (***n*=3**),
přičemž prvky se mohou opakovat.
(Vybíráme čísla přihrádek pro dva dopisy.)

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
x x			{1,1}	1
	x x		{2,2}	2
		x x	{3,3}	3
x	x		{1,2}	4
x		x	{1,3}	5
	x	x	{2,3}	6

Řešení: Každému dopisu přiřazujeme číslo přihrádky, hledáme tedy $C_2^*(3)$,
tj. počet neuspořádaných dvojic (k =2)
ze **3** prvků (n=**3**),
přičemž prvky se mohou opakovat.
(Vybíráme čísla přihrádek pro dva dopisy.)

$$C_2^*(3) = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = 6$$

Kombinatorika

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

=Kombinace(n+ k -1; k)

Kombinace s opakováním* = Záleží nám na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

Příklad 1: V obchodě mají 3 druhy bonbónů v sáččích po 100g? Kolika způsoby může zákazník koupit 1kg bonbónů?

Příklad 2: V knihkupectví mají 10 titulů knižních novinek. Kolika způsoby lze koupit

a) 4 knižní novinky?

b) 5 různých knižních novinek?

Kombinatorika

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

=Kombinace(n+ k -1; k)

Kombinace s opakováním* = Záleží nám na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

Příklad 1: V obchodě mají 3 druhy bonbónů v sáčcích po 100g? Kolika způsoby může zákazník koupit 1kg bonbónů?

$$C_{10}^*(3) = \binom{3+10-1}{10} = \text{ 66 možností}$$

Příklad 2: V knihkupectví mají 10 titulů knižních novinek. Kolika způsoby lze koupit

a) 4 knižní novinky?

$$C_4^*(10) = \binom{10+4-1}{4} = \text{ 715 možností}$$

b) 5 různých knižních novinek?

$$C_5(10) = \binom{10}{5} = \text{ 252 možností}$$

Pravidlo součinu

$\cdot$

a zároveň

Kombinatorika

shrnutí č.2

Pravidlo součtu

$+$

NEBO

Permutace! záleží na pořadí, vybíráme n prvků z n prvků

bez opakování $P(n) = n!$

včetně opakování $P^*_{n_1 n_2 \dots}(n) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots}$

Variace záleží na pořadí, vybíráme k prvků z n prvků, $k \leq n$

bez opakování $V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

včetně opakování $V^*_k(n) = n^k$

Kombinace nezáleží na pořadí, vybíráme k prvků z n prvků,

bez opakování $C_k(n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

včetně opakování $C^*_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$

I.B. Pravděpodobnost

Popis zákonitostí týkajících se náhodných jevů resp. pokusů.

Pravděpodobnost se používá při **modelování náhodnosti a neurčitosti**.
(Náhodnost je spojena s nedostatečnou znalostí počátečních podmínek.)

I.B. Pravděpodobnost

Popis zákonitostí týkajících se náhodných jevů resp. pokusů.

Pokus
děj, který probíhá, resp. nastává opakovaně za určitých, stejně nastavených, počátečních podmínek.

Pravděpodobnost se používá při **modelování náhodnosti a neurčitosti**.
(Náhodnost je spojena s nedostatečnou znalostí počátečních podmínek.)

I.B. Pravděpodobnost

Popis zákonitostí týkajících se náhodných jevů resp. pokusů.

Pokus
děj, který probíhá, resp. nastává opakovaně za určitých, stejně nastavených, počátečních podmínek.

Deterministický pokus
za určitých počátečních podmínek se dostaví vždy stejný výsledek.

Náhodný pokus
za stejných výchozích podmínek má různé výsledky,
např. vrh kostkou,
počet pozorovaných dopravních nehod,
zmetkovitost výrobků,
atp.

Pravděpodobnost se používá při **modelování náhodnosti a neurčitosti**.
(Náhodnost je spojena s nedostatečnou znalostí počátečních podmínek.)

I.B. Pravděpodobnost

Popis zákonitostí týkajících se náhodných jevů resp. pokusů.

Pokus
děj, který probíhá, resp. nastává opakovaně za určitých, stejně nastavených, počátečních podmínek.

Deterministický pokus
za určitých počátečních podmínek se dostaví vždy stejný výsledek.

Náhodný pokus
za stejných výchozích podmínek má různé výsledky,
např. vrh kostkou,
počet pozorovaných dopravních nehod,
zmetkovitost výrobků,
atp.

Pravděpodobnost se používá při **modelování náhodnosti a neurčitosti**.
(Náhodnost je spojena s nedostatečnou znalostí počátečních podmínek.)

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu . Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Hod kostkou

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu .

Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.
Hod kostkou

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu . Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

jev A... padne 6 ok

jev B... padnou 3 oka

jev S ... padne sudý počet ok

jev T ... padne počet ok ≤ 5

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Hod kostkou

Náhodný jev = tvrzení o výsle

jev A... padne 6 ok

jev B... padnou 3 oka

U jednotlivých náhodných jevů určujeme **pravděpodobnost** jejich **nastoupení**

Používá se označení

P(A).... čti pravděpodobnost jevu A, tj. pravděpodobnost, že padne 6 ok

P(B).... čti pravděpodobnost jevu B, tj. pravděpodobnost, že padnou 3 oka

.... atp.

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Měření krevního tlaku

systolický/diastolický

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu .

Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Měření krevního tlaku

systolický/diastolický

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu .

Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

jev A... systolický tlak je > 120 mmHg

jev S ... systolický tlak je v normě

jev B... diastolický tlak je ≤ 100 mmHg

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Měření krevního tlaku

systolický/diastolický

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu .

Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

jev A... systolický tlak je > 120 mmHg

jev B... diastolický tlak je ≤ 100 mmHg

jev S ... systolický tlak je v normě

je zapotřebí vědět, co je to „být v normě“

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Měření krevního tlaku

systolický/diastolický

pravděpodobnost jeho **nastoupení**

Používá se označení

P(A).... čti pravděpodobnost jevu A, tj.

p_st, že systol. tlak je > 120 mmHg

P(B).... čti pravděpodobnost jevu B, tj.

p_st, že diastol. tlak je ≤ 100 mmHg

.... atp.

Náhodný jev = tvrzení o výsle

jev A... systolický tlak je > 120 m

jev B... diastolický tlak je ≤ 100 m

Pravděpodobnost

označení jevů

např. u pokusu  hod kostkou

Pravděpodobnost

označení jevů

např. u pokusu  hod kostkou

Jev nemožný
A .... padne číslo 7

P(A) = 0
tj. 0%

Jev náhodný
B ... padne sudé číslo

0 < P(A) < 1
tj. mezi 0% a 100%

Jev jistý
C ... číslo menší než 8

P(A) = 1
tj. 100%

Pravděpodobnost

označení jevů

např. u pokusu  hod kostkou

Jev nemožný
A .... padne číslo 7

P(A) = 0
tj. 0%

Jev náhodný
B ... padne sudé číslo

0 < P(A) < 1
tj. mezi 0% a 100%

Jev jistý
C ... číslo menší než 8

P(A) = 1
tj. 100%

E ...**jev prakticky nemožný**
P(E) < 0.05
tj. méně než 5%

F ...**jev prakticky jistý**
P(F) > 0.95
tj. více než 95%

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Mějme náhodný pokus.

Nechť

Ω je množina všech jeho výsledků a

jev A je nějaké tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, pak

$$P(A) = \frac{\text{počet všech výsledků příznivých jevu } A}{\text{počet všech možných výsledků pokusu}}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

(Pierre Simon de Laplace, 1812) pokus.

Nechť

Ω je množina všech jeho výsledků a

jev A je nějaké tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, pak

$$P(A) = \frac{počet\ všech\ výsledků\ příznivých\ jevu\ A}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost
Klasická pravděpodobnost

Mějme náhodný pokus.

Nechť

Ω je množina všech jeho výsledků a

jev A je nějaké tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, pak

$$P(A) = \frac{\text{počet všech výsledků příznivých jevu } A}{\text{počet všech možných výsledků pokusu}}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

padne 1, 2, 3, 4, 5, 6 ok

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

padne 1, 2, 3, 4, 5, 6 ok

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

padnou více jak 4 oka

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou, která je vyvážená

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

padne 1, 2, 3, 4, 5, 6 ok

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

padnou více jak 4 oka

Mají-li všechny výsledky **stejnou šanci, že nastanou**, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou, která je vyvážená

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

padne 1, 2, 3, 4, 5, 6 ok

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

padnou více jak 4 oka

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

P(A) = P(padnou více jak 4 oka) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.\overline{33} \doteq 33{,}3\%$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

volba sprchového gelu
z regálu v obchodě

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné)
pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

volba sprchového gelu
z regálu v obchodě

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

nabízí se Radox, Dove,
Fa, Nivea, Palmolive

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

volba sprchového gelu z regálu v obchodě

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

nabízí se Radox, Dove, Fa, Nivea, Palmolive

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

bude zvolen ten od značek Radox nebo Nivea

Mají-li všechny výsledky **stejnou šanci, že nastanou**, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

volba sprchového gelu
z regálu v obchodě
se zavřenýma očima

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

nabízí se Radox, Dove,
Fa, Nivea, Palmolive

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

bude zvolen ten od značek Radox nebo Nivea

Mají-li všechny výsledky **stejnou šanci, že nastanou**, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost
Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

volba sprchového gelu
z regálu v obchodě
se zavřenýma očima

Nechť
Ω je **množina všech jeho výsledků** a

nabízí se Radox, Dove,
Fa, Nivea, Palmolive

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

bude zvolen ten od značek Radox nebo Nivea

Mají-li všechny výsledky **stejnou šanci, že nastanou**, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

P(A) = P(Radox nebo Nivea) = $\frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

K určení „počtu příznivých“ a „všech možných“ využíváme schopností z kombinatoriky.

Příklad 1: Číslice 1, 2, 3, 4, 5 jsou napsány na 5-ti lístcích. Náhodně vybereme 3 a utvoříme trojciferné číslo, přičemž cifry k sobě skládáme v pořadí, v jakém jsme je vybrali. Vypočtěte pravděpodobnost, že se takto podaří sestavit sudé číslo.

$$\frac{2\cdot V_2(4)}{V_3(5)} = P(S)$$

všech možných

$$\underline{5}\cdot\underline{4}\cdot\underline{3} = V_3(5)$$

Příklad 2: S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet

a) šest,

b) menší než 7.

$$\underline{V_2(4)}\;\underline{\boxed{2}} + \underline{V_2(4)}\;\underline{\boxed{4}}$$

Příklad 3: Do kolony bylo náhodně seřazeno 7 aut: 2 Mercedesy, 3 Hondy a 2 Oply. Jaká je pravděpodobnost, že na prvním a posledním místě bude Honda?

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

K určení „počtu příznivých“ a „všech možných“ využíváme schopností z kombinatoriky.

Příklad 1: Číslice 1, 2, 3, 4, 5 jsou napsány na 5-ti lístcích. Náhodně vybereme 3 a utvoříme trojciferné číslo, přičemž cifry k sobě skládáme v pořadí, v jakém jsme je vybrali. Vypočtěte pravděpodobnost, že se takto podaří sestavit sudé číslo.

jev S ... podaří se sestavit sudé číslo, $P(S) = \frac{V_2(4)+V_2(4)}{V_3(5)} = \frac{1\cdot4\cdot3+1\cdot4\cdot3}{5\cdot4\cdot3} = 0{,}4 = 40\%$

Příklad 2: S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet

1 5
2 4
3 3
4 2
5 1

a) šest, S6..... součet je 6, $P(S6) = \frac{5}{V_2^*(6)} = \frac{5}{6\cdot6} \doteq 0{,}1389 \doteq 14\%$

b) menší než 7. SPod7..... součet je menší než 7,

$P(\text{SPod7}) = \frac{5+4+3+2+1}{V_2^*(6)} = \frac{15}{6\cdot6} \doteq 0{,}4167 \doteq 42\%$

Příklad 3: Do kolony bylo náhodně seřazeno 7 aut: 2 Mercedesy, 3 Hondy a 2 Oply. Jaká je pravděpodobnost, že na prvním a posledním místě bude Honda? jev H ... na začátku a na konci je Honda,

$$P(H) = \frac{\frac{5!}{2!\cdot2!}}{\frac{7!}{2!\cdot2!\cdot3!}} = \frac{5!\cdot3!}{7!} \doteq 0{,}1429 \doteq 14\%$$

Pravděpodobnost
Statistická pravděpodobnost

(Richard von Mises, počátek 20. století)

Pravděpodobnost
Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

Pravděpodobnost
Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky **stejnou šanci**, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost
Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky **stejnou šanci**, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

tzv. relativní četnost jevu A

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

hod kostkou,

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

hod kostkou,

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**

opakujeme například 100x s výsledkem:

1 ..... 10x
2 ..... 13x
3 ..... 20x
4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

hod kostkou,

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

opakujeme například 100x s výsledkem:
1 ..... 10x
2 ..... 13x
3 ..... 20x
4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**

padnou více jak 4 oka

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet nastoupení jevu A

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

hod kostkou, která je možná navrtaná

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**

padnou více jak 4 oka

opakujeme například 100x s výsledkem:

1 ..... 10x
2 ..... 13x
3 ..... 20x
4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

hod kostkou, která je možná navrtaná

Mějme **náhodný pokus.**

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**

padnou více jak 4 oka

opakujeme například 100x s výsledkem:

1 ..... 10x
2 ..... 13x
3 ..... 20x
4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

relativní četnost je $\frac{18+13}{100} = 0.31 = 31\%$

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodn**

Nechť

n je **počet opakování náh**

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku t**

padnou více jak 4 oka

Nevíme-li, zda mají všech… vys…

Význam limity:
Budeme-li pokus provádět znovu a znovu s čím dál větší sadou opakování (tj. $n \to \infty$),
bude se napočítaná hodnota relativní četnosti $\frac{n(A)}{n}$ postupně ustalovat na správné hodnotě pravděpodobnosti sledovaného jevu A.

počet nastoupení jevu A

4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

relativní četnost je $\frac{18+13}{100} = 0.31 = 31\%$

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω)

nekonečný, pak

Pravděpodobnost
Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω)
nekonečný, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny **Ω**)

pak

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Míra:

nezáporné číslo, které popisuje velikost množiny,

např.
- počet prvků, pokud je lze počítat
- délka, pokud jde o úsečku či křivku (1D)
- obsah, pokud jde o plochu (2D)
- objem pokud jde o těleso (3D)

Pravděpodobnost
Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω)
nekonečný, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

místo dopadu meteoritu na Zemi,

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω) **nekonečný**, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

místo dopadu meteoritu na Zemi,

Mějme **náhodný pokus**.

všechna místa na Zemi,

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω)

nekonečný, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost
Geometrická pravděpodobnost

místo dopadu meteoritu na Zemi,

Mějme **náhodný pokus.**

všechna místa na Zemi,

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu.**

meteorit dopadne na pevninu

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω)

nekonečný, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

místo dopadu meteoritu na Zemi,

Mějme **náhodný pokus**.

všechna místa na Zemi, takových míst je nekonečně mnoho

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

meteorit dopadne na pevninu

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny **Ω**) **nekonečný**, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

místo dopadu meteoritu na Zemi,

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

všechna místa na Zemi, takových míst je nekonečně mnoho

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

meteorit dopadne na pevninu

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω) **nekonečný**, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

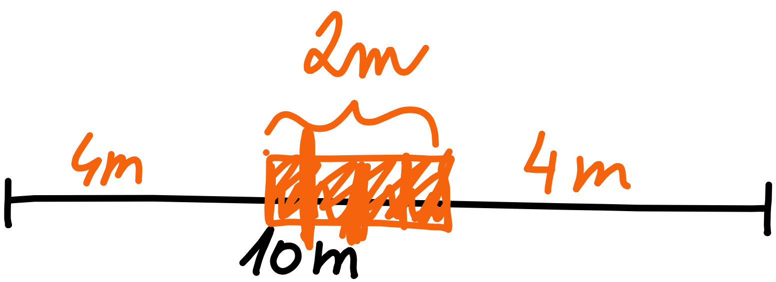
$$P(A) = \frac{plocha\ pevniny}{celkový\ povrch\ Země} = \frac{149}{361+149} = 0{,}292 = 29{,}2\%$$

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

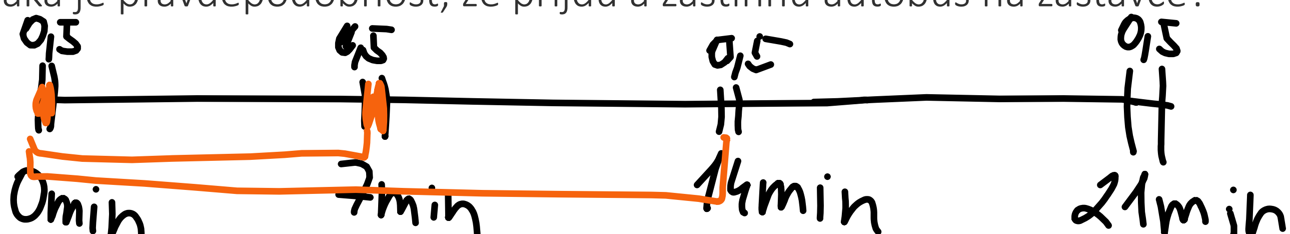
A

Příklad 1: Tyč délky **10m** je náhodně rozlomena na 2 části. Jaká je pravděpodobnost, že menší část bude delší než 4m?



$$\frac{2}{10} = P(A)$$

Příklad 2: Na zastávku místní dopravy přijíždí autobus každých 7 minut a zdrži se vždy 0,5 minuty. Jaká je pravděpodobnost, že přijdu a zastihnu autobus na zastávce?

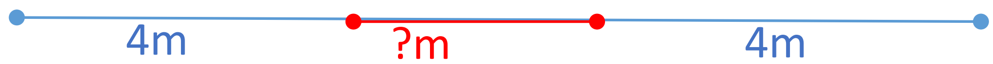


$$\frac{\frac{1}{2}\cancel{min}}{7\cancel{min}} = \frac{1}{14} = \frac{1min}{14min}$$

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

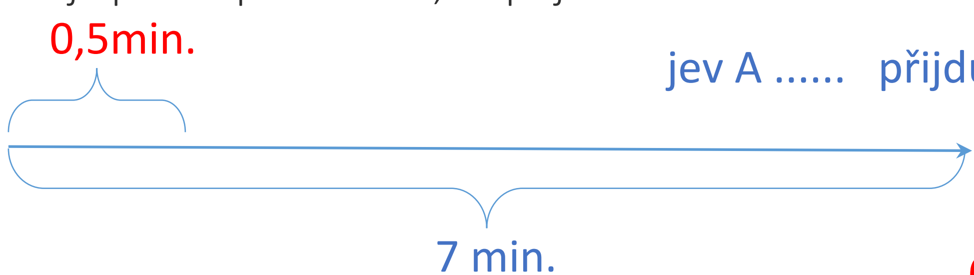
Příklad 1: Tyč délky **10m** je náhodně rozlomena na 2 části. Jaká je pravděpodobnost, že menší část bude delší než 4m?



jev A ...... po zlomení bude menší část delší než 4m

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2m}{10m} = 0{,}2 = 20\%$$

Příklad 2: Na zastávku místní dopravy přijíždí autobus každých 7 minut a zdrži se vždy 0,5 minuty. Jaká je pravděpodobnost, že přijdu a zastihnu autobus na zastávce?



jev A ...... přijdu v okamžiku, kdy je autobus na zastávce

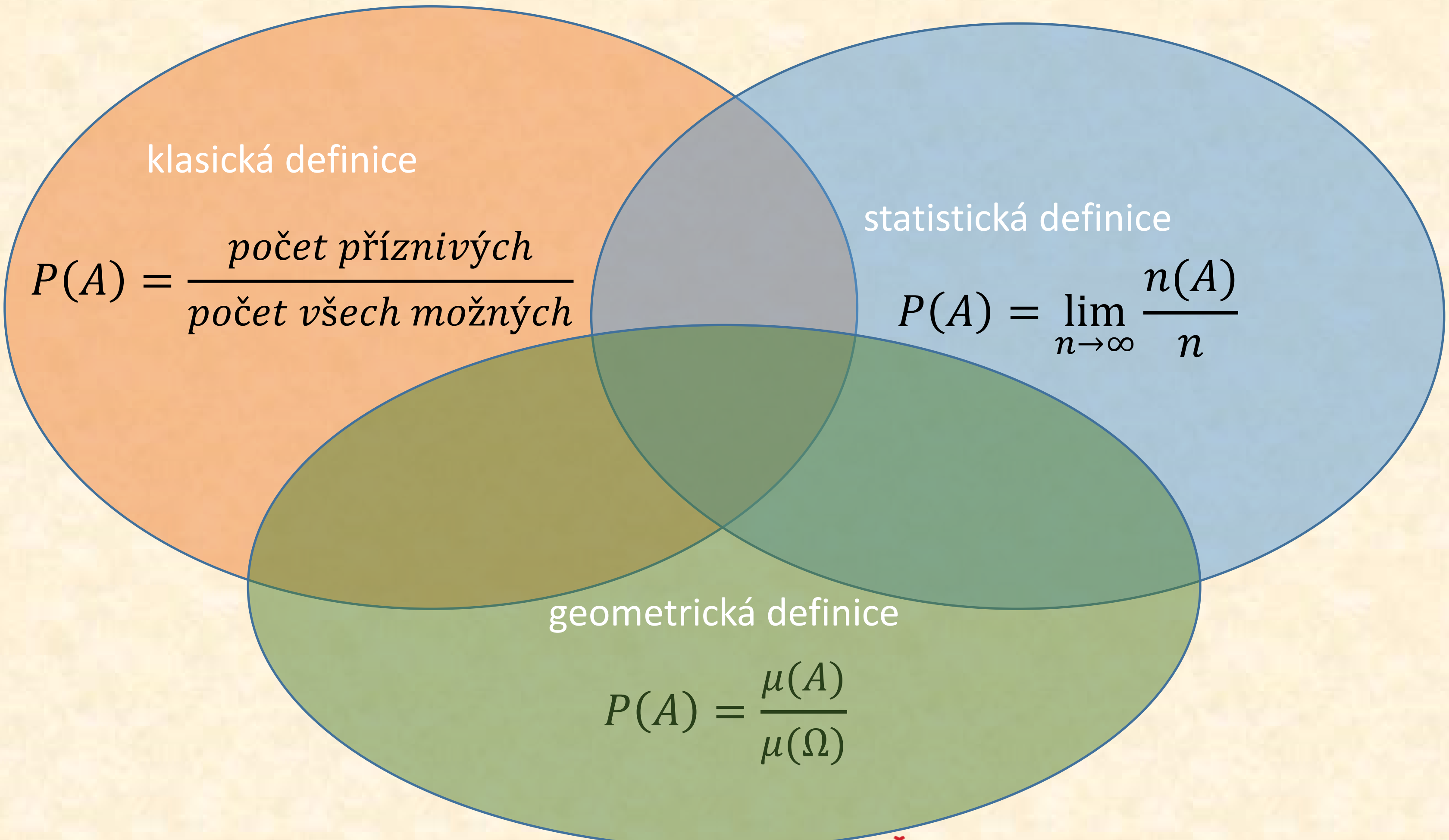
$$P(A) = \frac{0{,}5min}{7min} = \frac{\frac{1}{2}}{7} = \frac{1}{14} \doteq 0{,}07142 \doteq 7\%$$

Pravděpodobnost

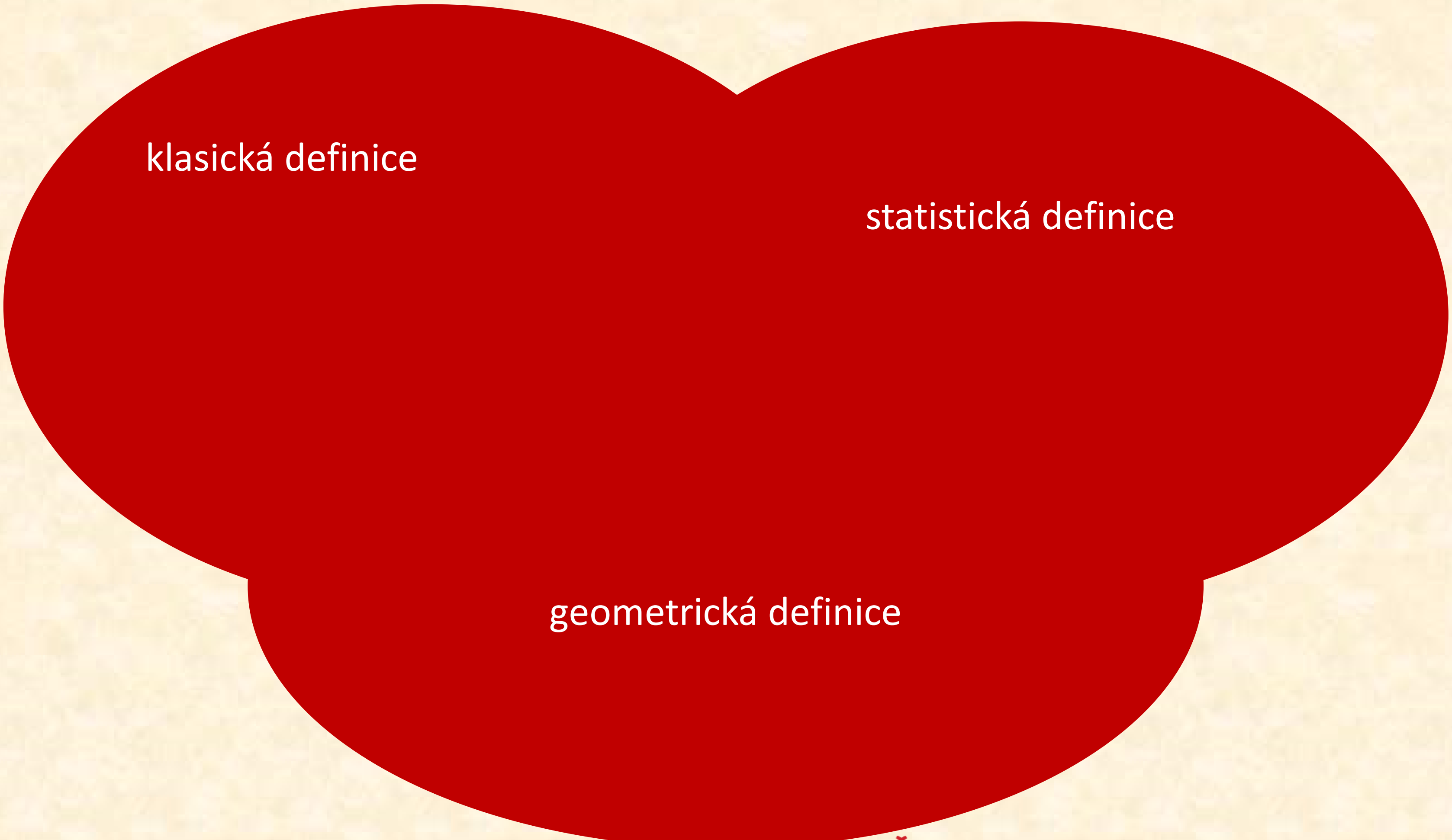
3 definice jeden význam

Pravděpodobnost

3 definice jeden význam



Pravděpodobnost
3 definice jeden význam



Pravděpodobnost
3 definice jeden význam

Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

Pravděpodobnost
3 definice jeden význam

Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo **mezi 0 a 1** (včetně).

Pravděpodobnost

3 definice jeden význam

Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo **mezi 0 a 1** (včetně).
2. Pravděpodobnost jevu **jistého** je rovna **1**.

Pravděpodobnost
3 definice jeden význam

Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo **mezi 0 a 1** (včetně).
2. Pravděpodobnost jevu **jistého** je rovna **1**.
3. Pravděpodobnost, že nastane některý z navzájem se vylučujících jevů, je rovna **součtu** jejich **pravděpodobností**.

Pravděpodobnost
3 definice jeden význam

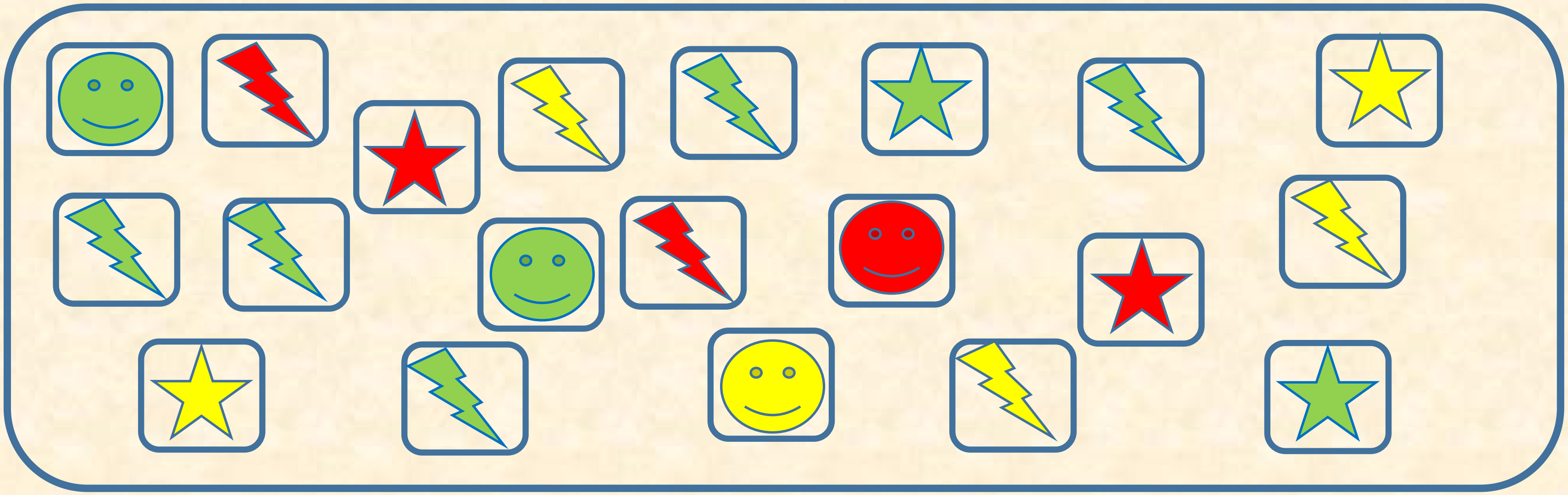
Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo **mezi 0 a 1** (včetně).
2. Pravděpodobnost jevu **jistého** je rovna **1**.
3. Pravděpodobnost, že nastane některý z navzájem se vylučujících jevů, je rovna **součtu** jejich **pravděpodobností**.

NEBO

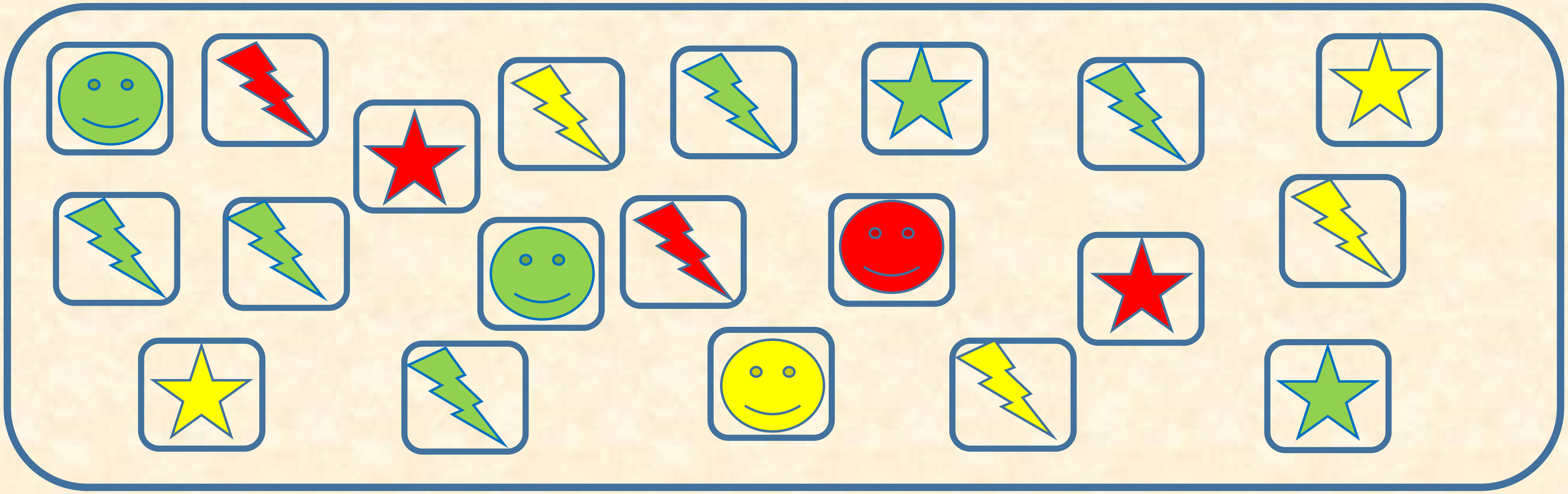
Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

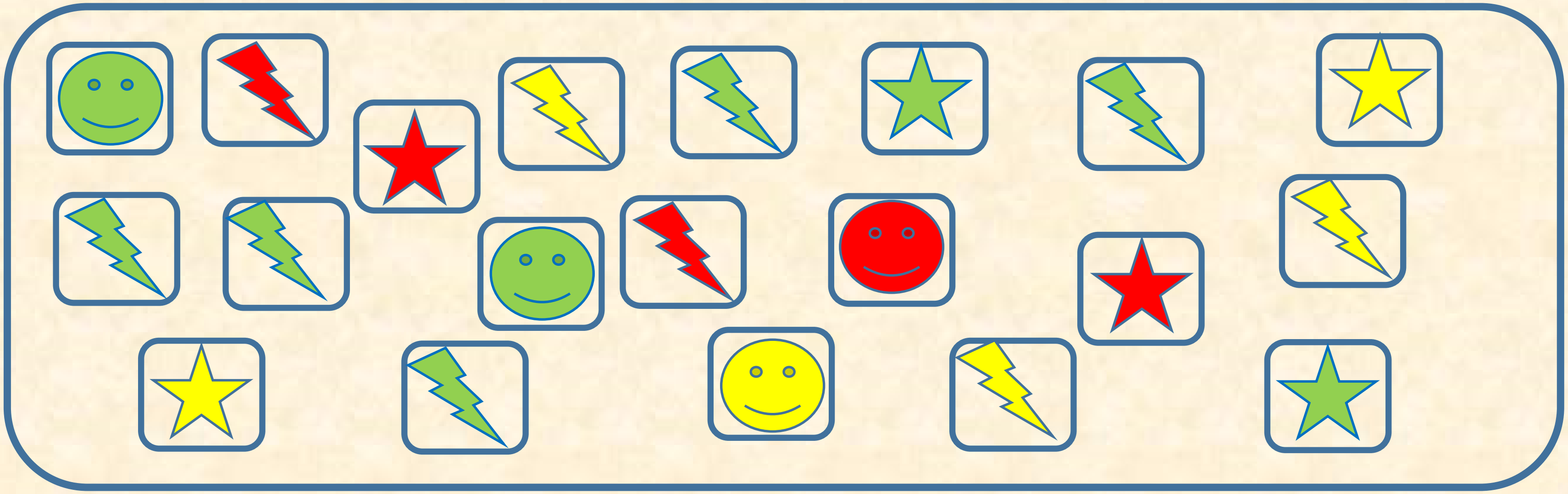
V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



jev A .... vybraný objekt je smajlík

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.

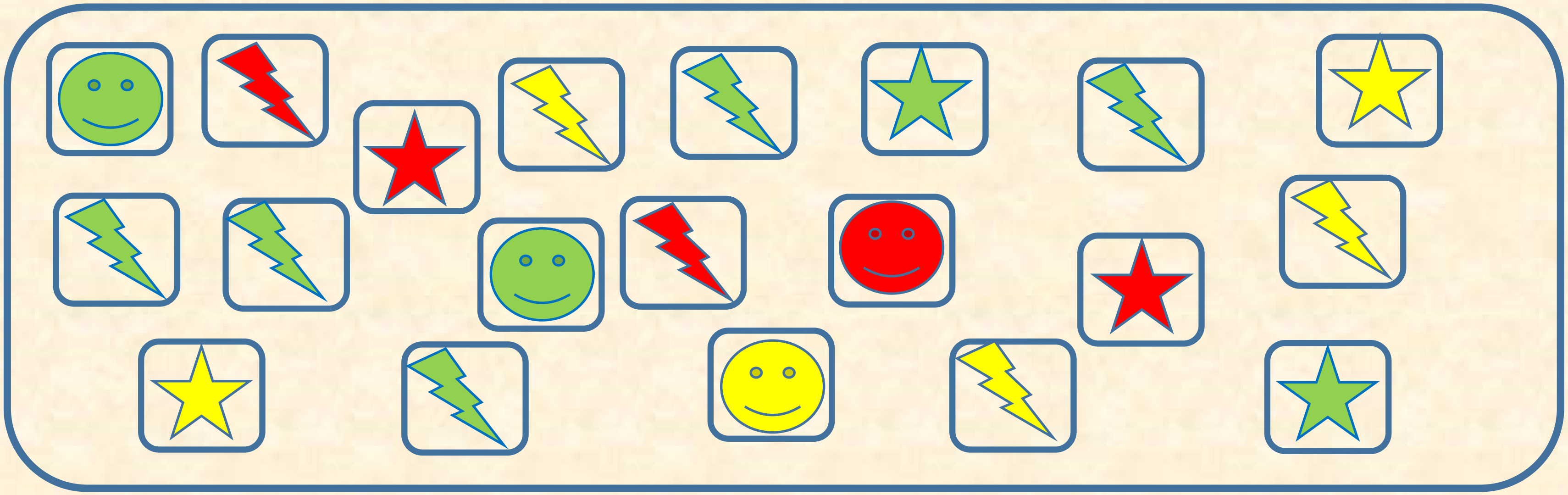


jev A .... vybraný objekt je smajlík

jev opačný A' .... vybraný objekt není smajlík

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



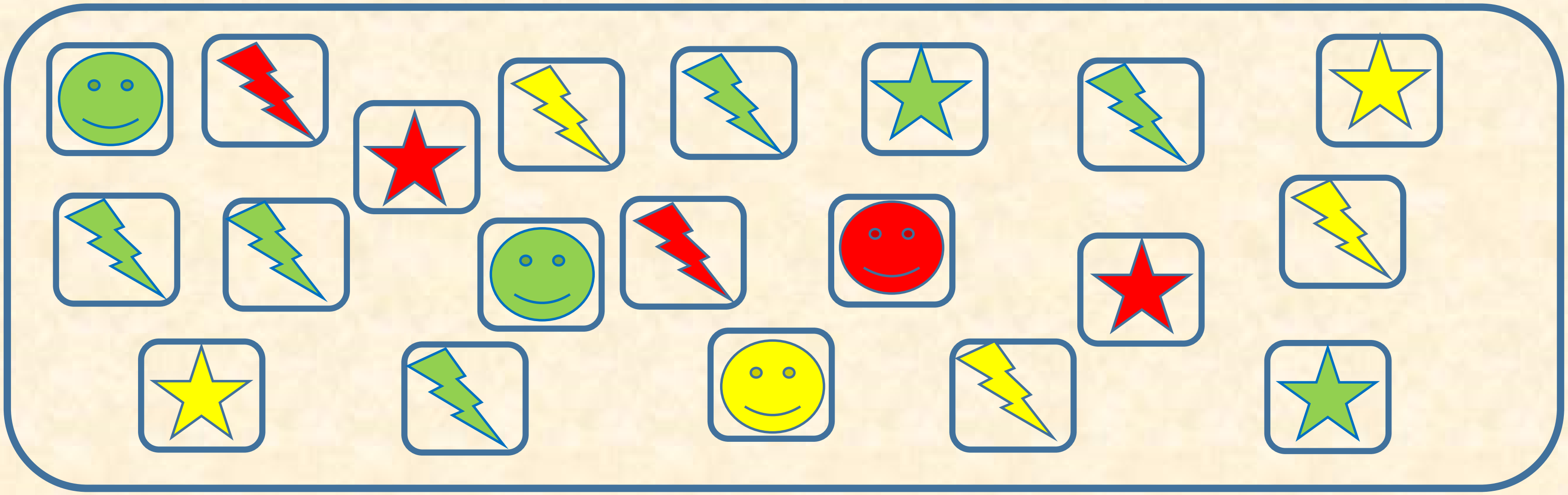
jev A .... vybraný objekt je smajlík $P(A) = \dfrac{4}{20} = 0{,}2 = 20\%$

jev opačný A' .... vybraný objekt není smajlík

$$P(A') = \frac{20-4}{20} = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 = 80\%$$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



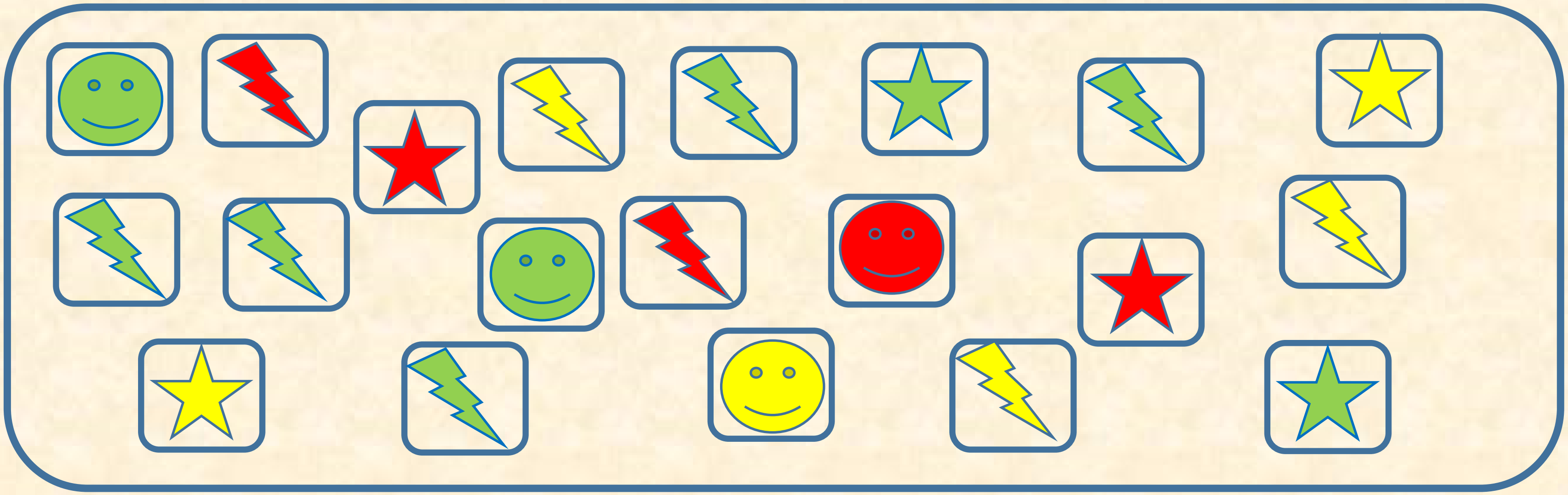
jev A .... vybraný objekt je smajlík $P(A) = \frac{4}{20} = 0{,}2 = 20\%$

jev opačný A' .... vybraný objekt není smajlík

$$\boxed{\boldsymbol{P(A')}} = \frac{20-4}{20} = \boxed{\boldsymbol{1 - P(A)}} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 = 80\%$$

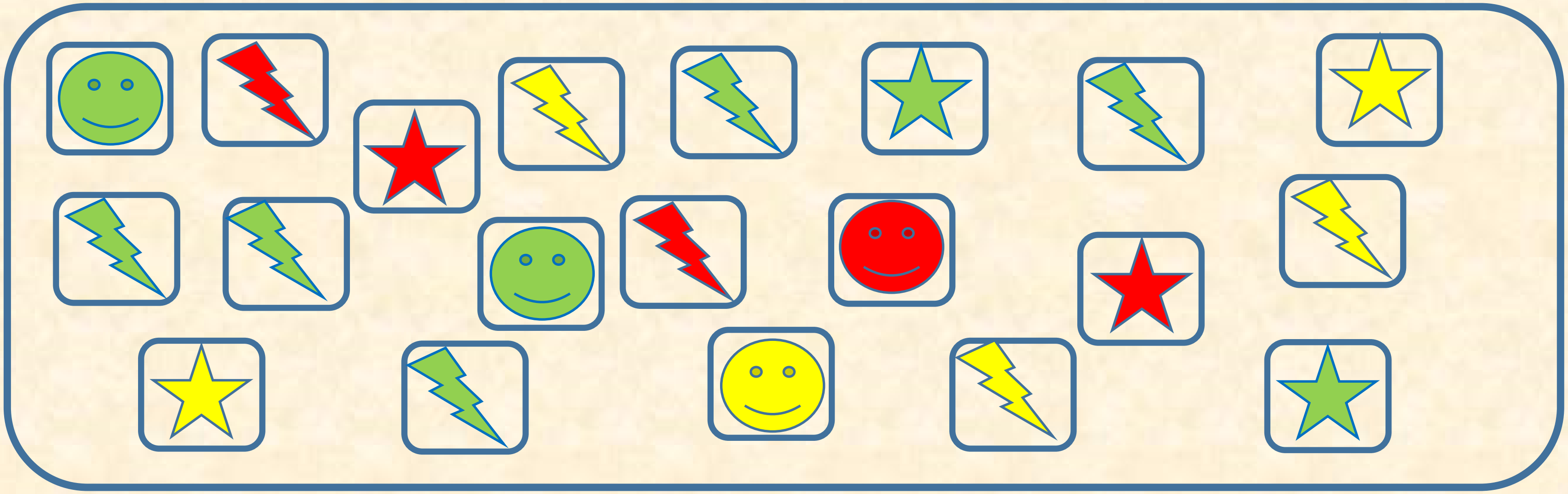
Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

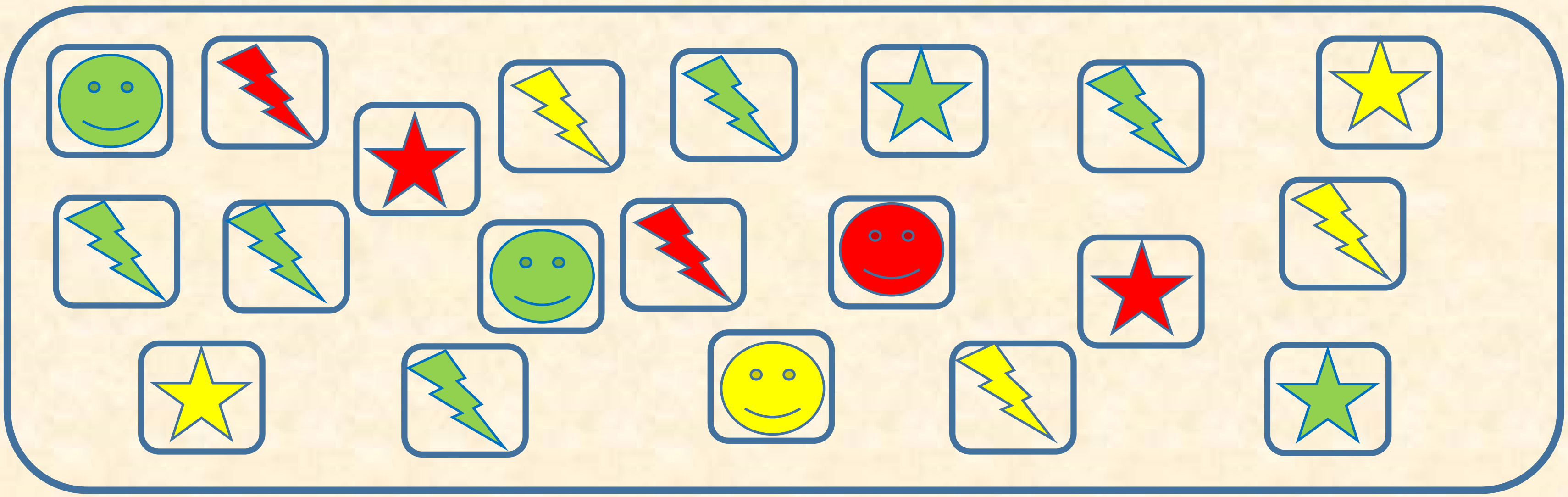
V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



jev **Č** ... náhodně vybraný útvar je **červený**
jev ★.. náhodně vybraný útvar je **hvězda**

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



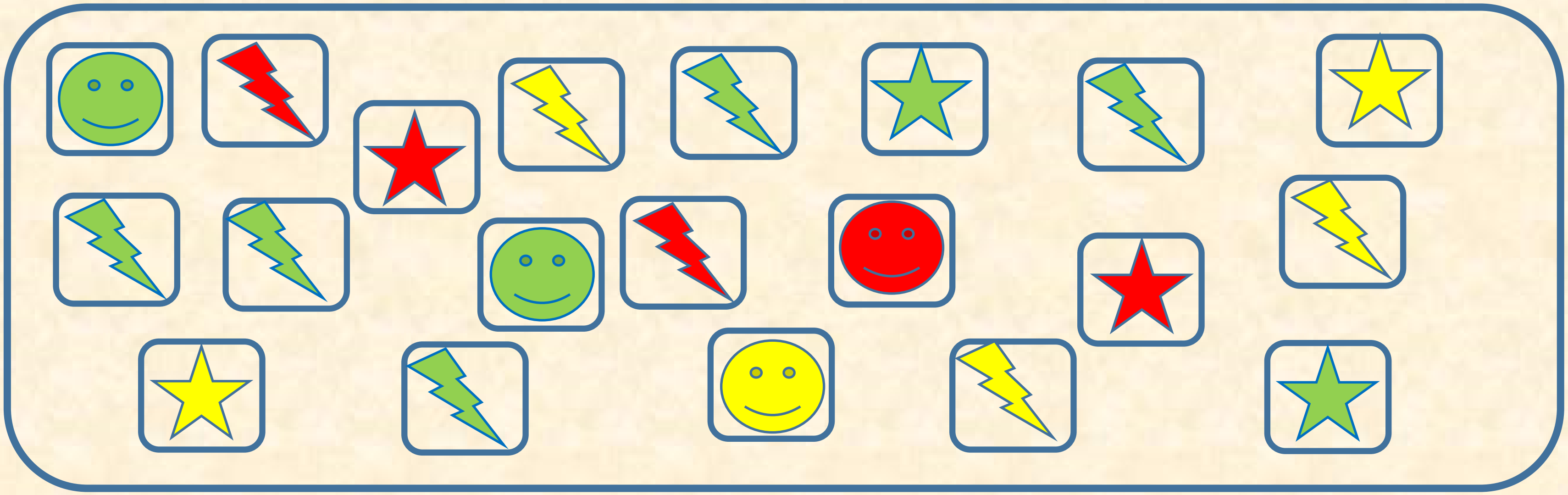
jev **Č** ... náhodně vybraný útvar je **červený**
jev ★... náhodně vybraný útvar je **hvězda**

$P(Č) = \frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$

$P(Č \cap ★) = \frac{2}{20} = 0,1 = 10\%$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



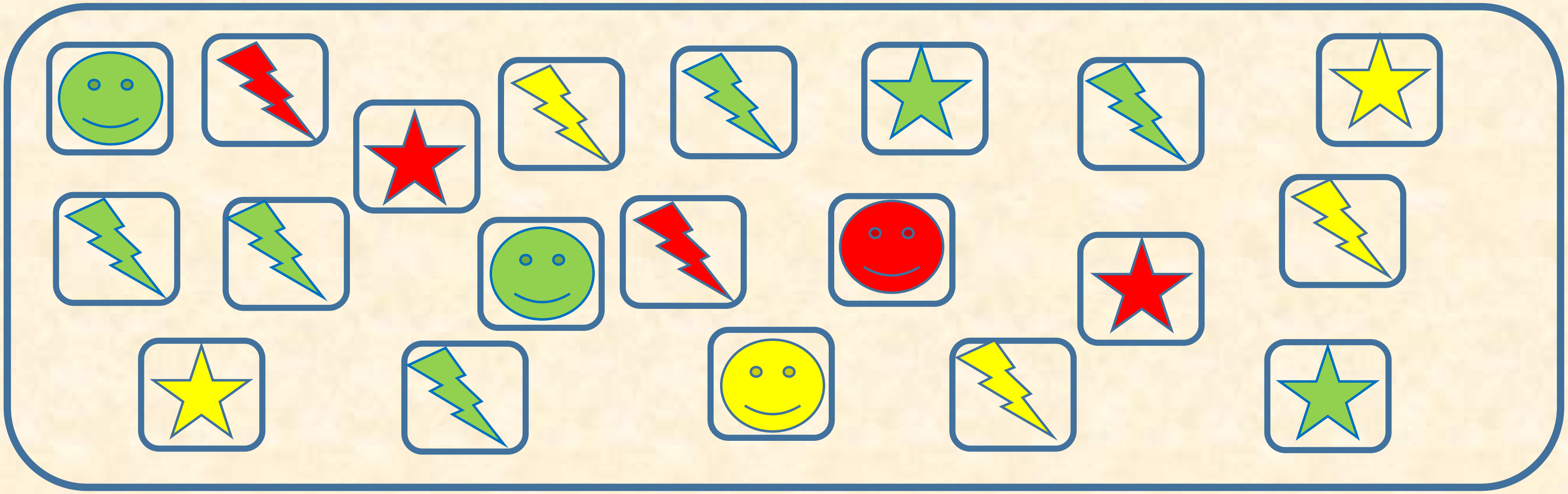
jev **Č** ... náhodně vybraný útvar je **červený**
jev ★... náhodně vybraný útvar je **hvězda**

$P(Č) = \frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$

$P(Č \cap ★) = \frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\%$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



jev **Č** ... náhodně vybraný útvar je **červený**
jev ★... náhodně vybraný útvar je **hvězda**

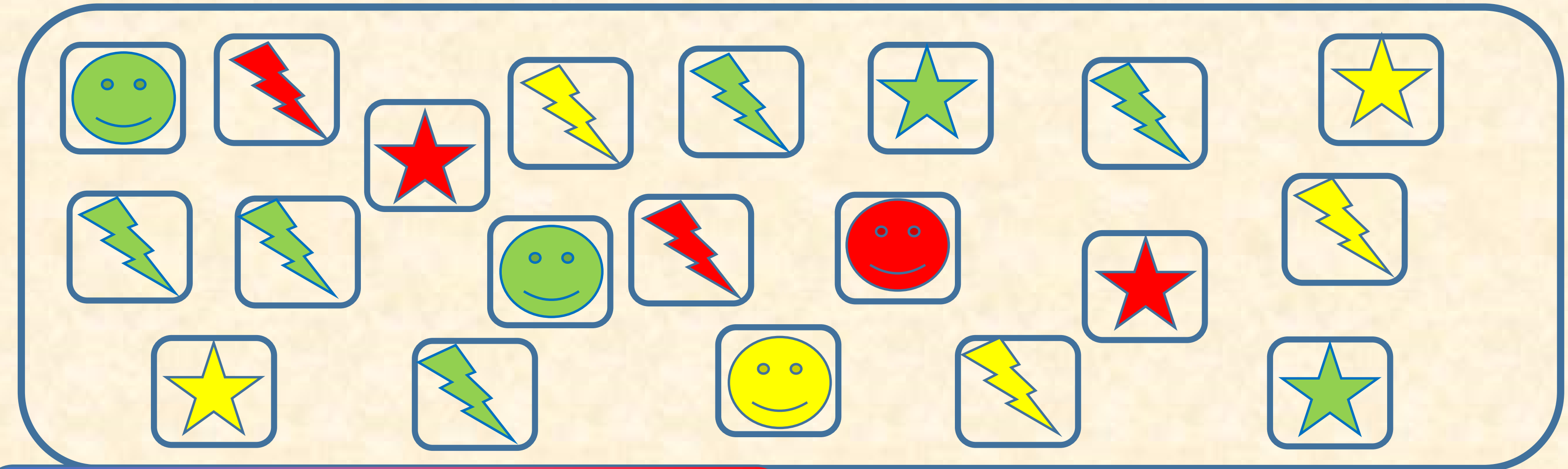
Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pravděpodobnost

vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



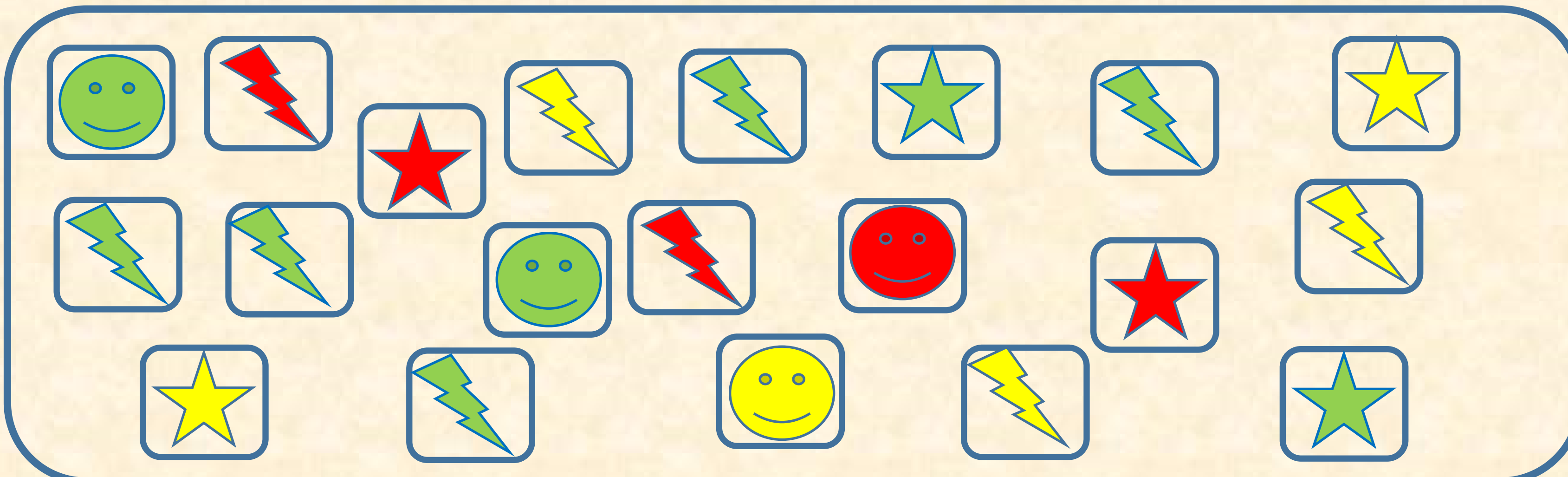
čti: „pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B“

Podmíněná pravděpodobnost

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



P(Č)= $\frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$

P(★∩Č) = $\frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\%$

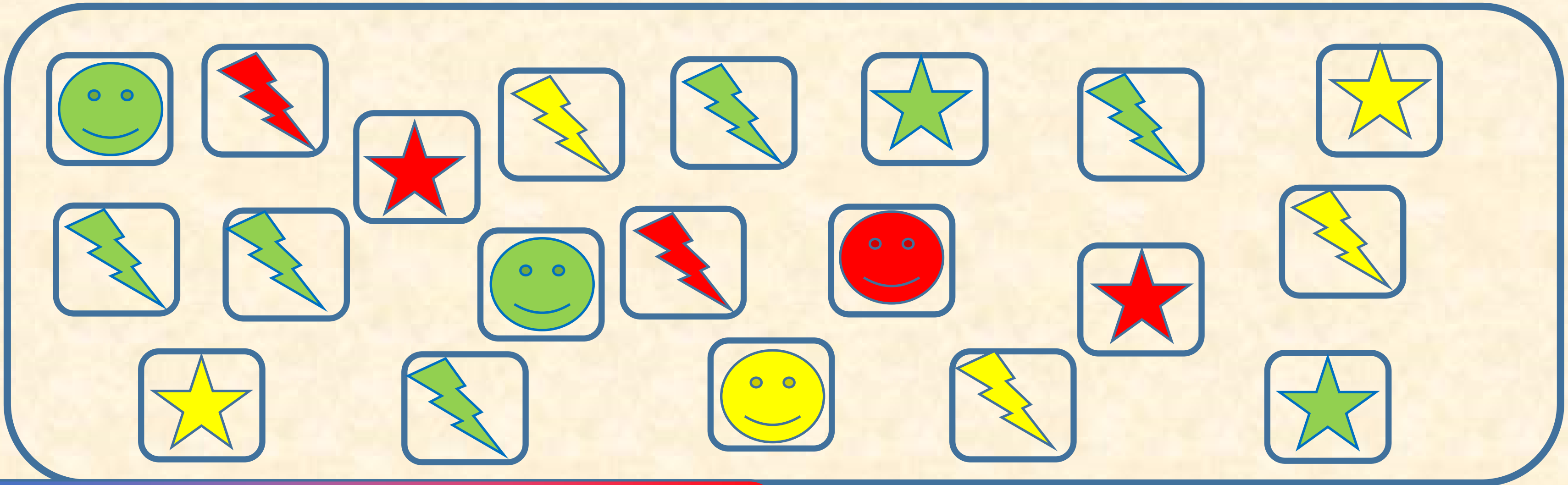
čti: „pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B“

Podmíněná pravděpodobnost

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



čti: „pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B“

$P(\text{Č}) = \frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$

$P(\bigstar \cap \text{Č}) = \frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\%$

$$\boldsymbol{P(\bigstar|\text{Č})} = \frac{\boldsymbol{P(\bigstar \cap \text{Č})}}{\boldsymbol{P(\text{Č})}} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4 = 40\%$$

Podmíněná pravděpodobnost

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Pravděpodobnost
další vlastnosti

1. $P(A') = 1 - P(A)$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost

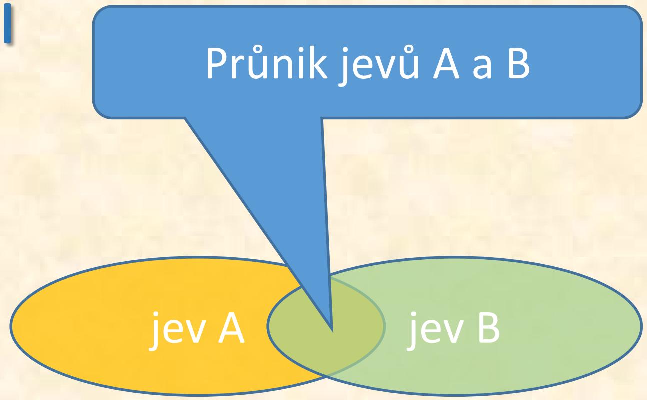
další vlastnosti

Pravděpodobnost jevu opačného k jevu A

1. $P(A') = 1 - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost

vlastnosti



1. $P(A') = 1 - P(A)$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší

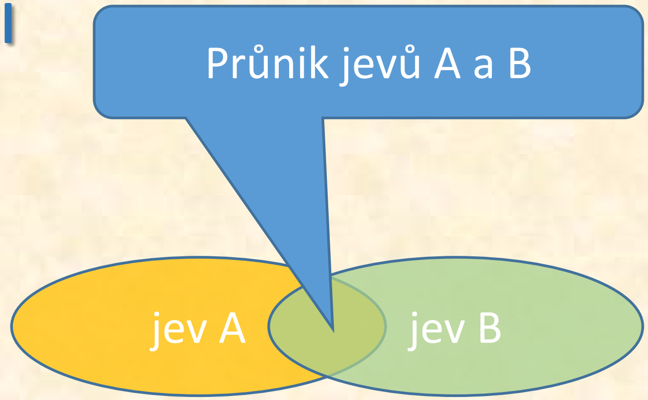
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost

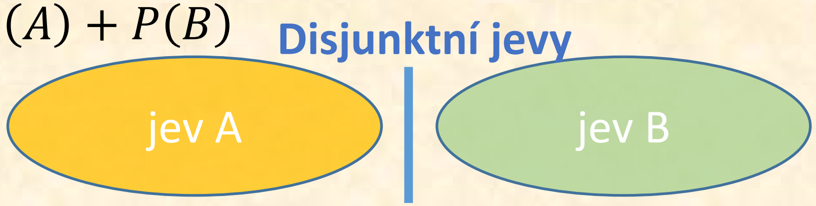
vlastnosti



1. $P(A') = 1 - P(A)$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

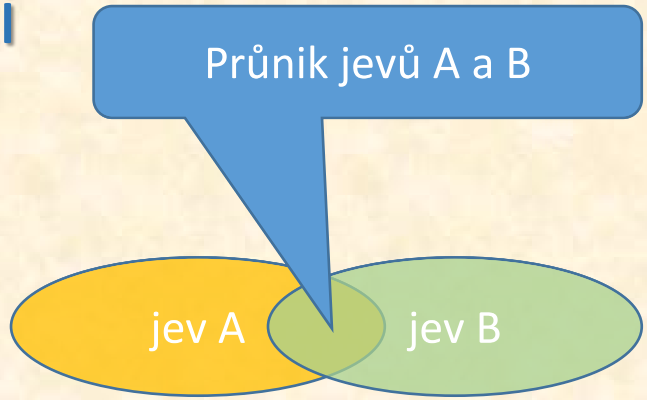


3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost

vlastnosti



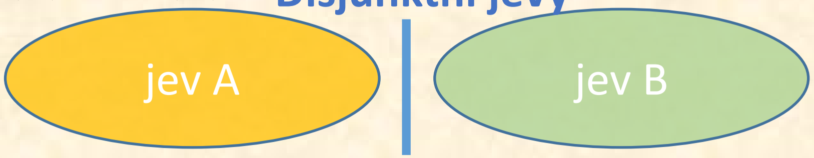
1. $P(A') = 1 - P(A)$

NEBO

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Disjunktní jevy



3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost
vlastnosti

1. $P(A') = 1 - P(A)$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost
vlastnosti

1. $P(A') = 1 - P(A)$

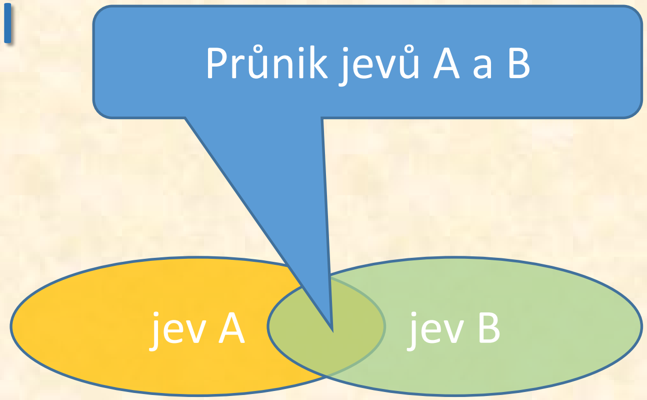
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

a zároveň

Pravděpodobnost

vlastnosti

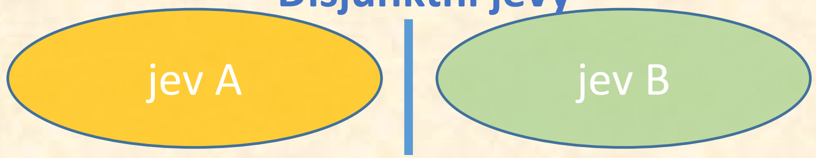


1. $P(A') = 1 - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

NEBO

Disjunktní jevy



3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

a zároveň

Pravděpodobnost

Příklad 1: Házíme dvěma kostkami. Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost toho, že

a) padne-li na 1.kostce dvojka, padne součet větší než 6.

b) padne-li na 1. kostce sudé číslo, padne součet větší než 8.

Příklad 2: Kruhový terč má 3 pásma. Pravděpodobnost zásahu

- prvního pásma je 0,2
- druhého pásma 0,23
- třetího pásma 0,15.

Jaká je pravděpodobnost minutí cíle?

Pravděpodobnost

Příklad 1: Házíme dvěma kostkami. Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost toho, že

a) padne-li na 1.kostce dvojka, padne součet větší než 6.

jev A .... součet je víc jak 6
jev B .... na 1. kostce padne 2

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6 \cdot 6}}{\frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 6}} = \frac{2}{6} = 0,\overline{33} \doteq 33\%$$

b) padne-li na 1. kostce sudé číslo, padne součet větší než 8.

jev A .... součet je víc jak 8
jev B .... na 1. kostce padne sudé

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 6}}{\frac{3 \cdot 6}{6 \cdot 6}} = \frac{1}{3} = 0,\overline{33} \doteq 33\%$$

Příklad 2: Kruhový terč má 3 pásma. Pravděpodobnost zásahu

- prvního pásma je 0,2
- druhého pásma 0,23
- třetího pásma 0,15.

Z1 ...... zasáhne 1. pásmo, P(Z1)=0,2
Z2 ...... zasáhne 2. pásmo, P(Z2)=0,23
Z3 ...... zasáhne 3. pásmo, P(Z3)=0,15

Jaká je pravděpodobnost minutí cíle?

$$P(minutí) = 1 - P(jakýkoli\ zásah)$$
$$= 1 - (0{,}2 + 0{,}23 + 0{,}15) = 0{,}42 = 42\%$$

Pravděpodobnost

Příklad 3: Výrobek prochází v průběhu zpracování postupně čtyřmi úrovněmi zpracování. Pravděpodobnost vyrobení zmetku u jednotlivých úrovní je postupně rovna 0,02; 0,03; 0,005; 0,015. Určete pravděpodobnost toho, že výsledkem výrobního procesu v daném případě bude zmetek.

jev Zm .... výrobek je zmetek

jev U1 .... výrobek prošel 1. úrovní zpracování, $P(U1 \cap Zm) = 0{,}02$

jev U2 .... výrobek prošel 2. úrovní zpracování , $P(U2 \cap Zm) = 0{,}03$

jev U3 .... výrobek prošel 3. úrovní zpracování , $P(U3 \cap Zm) = 0{,}005$

jev U4 .... výrobek prošel 4. úrovní zpracování , $P(U4 \cap Zm) = 0{,}015$

$$P(Zm) = \boxed{1 - P(\text{není } Zm)} = 1 - P(U1 \cap \text{není } Zm) \cdot P(U2 \cap \text{není } Zm) \cdot P(U3 \cap \text{není } Zm) \cdot P(U4 \cap \text{není } Zm) =$$
$$= 1 - \big(1 - P(U1 \cap \text{není } Zm)\big) \cdot \big(1 - P(U2 \cap \text{není } Zm)\big) \cdot \big(1 - P(U3 \cap \text{není } Zm)\big) \cdot \big(1 - P(U4 \cap \text{není } Zm)\big) =$$
$$= \boxed{1 - 0.98 \cdot 0.97 \cdot 0.995 \cdot 0.985} = 0{,}06834 \doteq 7\%$$

Příklad 4: Z celkové produkce závodu jsou 4% zmetků. Z vyhovujících výrobků je 75% standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní.

Zm ...... výrobek je zmetek, $P(Zm) = 0{,}04$

Vyh ...... výrobek je vyhovující, $P(Vyh) = 1 - P(Zm) = 1 - 0{,}4 = 0{,}96$

St ...... výrobek je standardní, $P(Vyh\,|St) = 0{,}75$

$$P(St \text{ a zároveň } Vyh) = P(St \cap Vyh) = P(St \mid Vyh) \cdot P(Vyh) =$$
$$= 0{,}75 \cdot 0{,}96 = 0{,}72 = 72\%$$