Kombinatorika — počet výsledků pokusu

Variace záleží na pořadí, tj. uspořádané k-tice z n prvků

n .... počet všech prvků
k .... počet prvků ve výběru

EXCEL

- bez opakování $\boxed{V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$ .... `= Permutace(`n`;`k`)`
- s opakováním $\boxed{V_k^*(n) = n^k}$ .... `= `n`^`k

Permutace záleží na pořadí, tj. počet uspořádání n prvků mezi sebou

n .... počet všech prvků

EXCEL

- bez opakování $\boxed{P(n) = V_n(n) = n!}$ .... `= Faktoriál(`n`)`
- s opakováním $\boxed{P^*_{n_1,n_2,\dots n_k} = \dfrac{(n_1+n_2+\cdots n_k)!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}}$

  např. tedy `= Faktoriál(`n_1`+`n_2`)/Faktoriál(`n_1`)/Faktoriál(`n_2`)`

Kombinace nezáleží na pořadí, tj. neuspořádané skupinky k prvků z celkového počtu n prvků

n .... počet všech prvků
k .... počet prvků ve výběru

EXCEL

- bez opakování $\boxed{C_k(n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}}$ .... `= Kombinace(`n`;`k`)`
- s opakováním $\boxed{C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}}$ `= Kombinace(`$n+k-1$`;`k`)`

Pravidla

Pravidlo součtu jednotlivé pokusy nemohou nastat zároveň .... spojka $\boxed{\text{nebo}}$
Pravidlo součinu jednotlivé pokusy mají dle zadání nastat zároveň .... spojka $\boxed{\text{a zároveň}}$

Pravděpodobnost

Výpočet p_sti výsledky náhodného pokusu lze spočítat $\Longrightarrow$ klasická p_st
nelze spočítat geometrická p_st

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \underbrace{\frac{\text{počet prvků } A}{\text{počet prvků } \Omega}}_{\textbf{klasická p\_st}} = \underbrace{\frac{\text{délka (obsah, objem) } A}{\text{délka (obsah, objem) } \Omega}}_{\textbf{geometrická p\_st}}}$$

Opakované pokusy n .... počet opakování pokusu
k .... počet nastoupení sledovaného jevu A
nezávislé pokusy ...... p ...... p_st nastoupení jevu A v každém opakování

$$\boxed{P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

závislé pokusy ...... N...... počet všech prvků
M...... počet prvků majících sledovanou vlastnost

$$\boxed{P(A_k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Podmíněná p_st B .... podmínka (předpoklad; jev, který nastal před jevem A a ovlivnil jej)
A .... sledovaný jev

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}}$$

Náhodný jev (obecné vlastnosti) standardní značení A, B, C ...

nemožný .... $\emptyset = \{\}$......... $P(\emptyset) = 0 = 0\%$
jistý .... Ω .... $P(\Omega) = 1 = 100\%$
opačný k jevu A .... $\Omega - A$......... $P(\Omega - A) = 1 - P(A)$
průnik jevů A a B ...... $A \cdot B$ .... pro A a B
nezávislé $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$
závislé $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$
sjednocení jevů A a B ... $A + B$......... pro A a B
neslučitelné $P(A + B) = P(A) + P(B)$
slučitelné $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

NEJČASTĚJŠÍ ROZDĚLENÍ $\boxed{\text{DISKRÉTNÍ}}$ NÁHODNÉ VELIČINY

Binomické opakované nezávislé pokusy

$\boxed{X \sim Bi(n,p)}$, kde n .... počet pokusů
p .... pravděpodobnost úspěchu

- pravděpodobnostní funkce $p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- číselné charakteristiky $E(X) = np$, $D(X) = np(1-p)$
- Excel: pravděpodobnostní funkce $p(k) = P(X = k)$ $\boxed{\texttt{= Binom.Dist(}k\texttt{;}n\texttt{;}p\texttt{;0)}}$
  distribuční funkce $F(x) = P(X \leq x)$ $\boxed{\texttt{= Binom.Dist(}x\texttt{;}n\texttt{;}p\texttt{;1)}}$

Poissonovo opakované nezávislé pokusy – sleduje se jev, který zřídka nastává v jiném než průměrném počtu

$\boxed{X \sim Po(\lambda)}$, kde λ .... průměrný počet výskytů za jednokovou délku

- pravděpodobnostní funkce $p_k = P(X = k) = \frac{1}{k!} \lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}$
- číselné charakteristiky $E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$
- Excel: pravděpodobnostní funkce $p(k) = P(X = k)$ $\boxed{\texttt{= Poisson.Dist(}k\texttt{;}\lambda\texttt{;0)}}$
  distribuční funkce $F(x) = P(X \leq x)$ $\boxed{\texttt{= Poisson.Dist(}x\texttt{;}\lambda\texttt{;1)}}$

Hypergeometrické opakované závislé pokusy

$\boxed{X \sim H(n, M, N)}$, kde n .... počet pokusů
M............ počet prvků, které mají sledovanou vlastnost
N............ počet všech prvků

- pravděpodobnostní funkce $p(k) = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
- číselné charakteristiky $E(X) = n\frac{M}{N}$, $D(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
- Excel: pravděpodobnostní funkce $p(k) = P(X = k)$ $\boxed{\texttt{= HypGeom.Dist(}k\texttt{;}n\texttt{;}M\texttt{;}N\texttt{;0)}}$
  distribuční funkce $F(x) = P(X \leq x)$ $\boxed{\texttt{= HypGeom.Dist(}x\texttt{;}n\texttt{;}M\texttt{;}N\texttt{;1)}}$

NĚKTERÁ ROZDĚLENÍ $\boxed{\text{SPOJITÉ}}$ NÁHODNÉ VELIČINY

Rovnoměrné např. doba čekání na autobus, čekání na výrobek u automatické výrobní linky

$\boxed{X \sim Ro(a,b)}$, kde a .... začátek úseku
b .... konec úseku

- hustota pravděpodobnosti $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin \langle a,b \rangle \\ \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a,b \rangle \end{cases}$,

  distribuční funkce $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a < x \le b \\ 1 & \text{pro } x > b \end{cases}$
- číselné charakteristiky $E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$, $D(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Exponenciální doba čekání na poissonovský jev, např. čekání na obsluhu, vzdálenost mezi dvěma poškozenými místy na silnici

$\boxed{X \sim Ex(\frac{1}{\lambda})}$, kde λ .... průměrná doba čekání na sledovaný jev

- hustota pravděpodobnosti $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}x} & \text{pro } x \ge 0 \end{cases}$,

  distribuční funkce $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}x} & \text{pro } x \ge 0 \end{cases}$
- číselné charakteristiky $E(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda^2$
- <u>Excel</u>: hustota pravděpodobnosti $f(x)$ `= Expon.dist(x; 1/λ ;0)`

  distribuční funkce $F(x)$ `= Expon.dist(x; 1/λ ;1)`

Normální (obecné normální)

$\boxed{X \sim N(\mu,\sigma)}$, kde μ .... střední hodnota náhodné veličiny
σ .... směrodatná odchylka

- hustota pravděpodobnosti $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- číselné charakteristiky $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$
- <u>Excel</u>: hustota pravděpodobnosti $f(x)$ `= Norm.dist(x;μ;σ;0)`

  distribuční funkce $F(x)$ `= Norm.dist(x;μ;σ;1)`

Náhodná veličina obecně a její číselné charakteristiky

Diskrétní NV reálná funkce $X : \Omega \mapsto \{x_1, x_2, \dots x_n\}$; definičním oborem je Ω (množina všech elementárních jevů náhodného pokusu) a oborem hodnot je diskrétní množina hodnot z $\mathbb{R}^1$ — např. $\{x_1, x_2, \dots x_n\} \subset \mathbb{R}^1$

Charakteristika pomocí funkcí

pravděpodobnostní funkce (frekvenční funkce) $p(x_i) \overset{def}{=} P(X = x_i)$;
Vlastnosti: 1) $p(x_i) \in \langle 0, 1\rangle\ \forall i$
2) $\sum_i p(x_i) = 1$

distribuční funkce $F(x) \overset{def}{=} P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$;
Vlastnosti: 1) $F(x_i) \in \langle 0, 1\rangle\ \forall i$
2) $P(x_i < X \leq x_k) = F(x_k) - F(x_i)$
3) $F(-\infty) = 0$ a $F(+\infty) = 1$, neklesající (roste nebo stagnuje)

Číselné charakteristiky vlastnosti následujících číselných charakteristik jsou ve skriptech

střední hodnota $(\mu =)\ E(X) \overset{def}{=} \sum_i x_i \cdot p(x_i)$

rozptyl $(\sigma^2 =)\ D(X) \overset{def}{=} \sum_i (x_i - E(X))^2 \cdot p(x_i)$

směrodatná odchylka $\sigma \overset{def}{=} \sqrt{D(X)}$

koeficient šikmosti $A(X) \overset{def}{=} \frac{1}{\sigma^3} \cdot \sum_i (x_i - E(X))^3 \cdot p(x_i)$

koeficient špičatosti $\bar{e} \overset{def}{=} \left(\frac{1}{\sigma^4} \cdot \sum_i (x_i - E(X))^4 \cdot p(x_i)\right) - 3$

p–**kvantil** hodnota x_p taková, že $F(x_p) = p$
Speciálně: 1) medián je $Me = x_{0.5}$
2) kvartily jsou $x_{0.25}$, $x_{0.5}$, $x_{0.75}$, tedy 100% se rozdělí na čtvrtiny
3) decily jsou $x_{0.1}$, $x_{0.2}$, $x_{0.3}$, $\dots x_{0.9}$, tedy 100% se rozdělí na desetiny
4) percentily jsou $x_{0.01}$, $x_{0.02}$, $x_{0.03}$, $\dots x_{0.99}$ tedy 100% se rozdělí na setiny

modus maximum frekvenční funkce, tj. taková hodnota x, v níž pravděpodobnostní funkce $p(x)$ nabývá maxima.

Excel: střední hodnota $E(X) =$ `= Průměr(seznamCisel)`
rozptyl $D(X) =$ `= Var.P(seznamCisel)`
směrodatná odchylka od průměru
$\sigma = \sqrt{D(X)} =$ `= SmOdch.P(seznamCisel)`
koef. šikmosti $A(X) =$ `= Skew.P(seznamCisel)`
koef. špičatosti $\bar{e} \approx$ `= Kurt(seznamCisel)`

kvantily 1. kvartil $x_{0.25} =$ `= Quartil.inc(seznamCisel ; 1)`
2. kvartil, tj medián $x_{0.5} =$ `= Quartil.inc(seznamCisel ; 2)`
3. kvartil $x_{0.75} =$ `= Quartil.inc(seznamCisel ; 3)`

1. percentil $x_{0.01} =$ `= Percentil.inc(seznamCisel ; 0,01)`
2. percentil $x_{0.02} =$ `= Percentil.inc(seznamCisel ; 0,02)`

. . . atd.

modus = `= Mode.sngl(seznamCisel)`