Pravidlo součinu

$\cdot$

a zároveň

Kombinatorika

Celkové shrnutí

Pravidlo součtu

$+$

NEBO

Permutace! záleží na pořadí, vybíráme n prvků z n prvků

bez opakování $P(n) = n!$

včetně opakování $P^*_{n_1 n_2 \dots}(n) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots}$

Variace záleží na pořadí, vybíráme k prvků z n prvků, $k \leq n$

bez opakování $V_k(n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

včetně opakování $V_k^*(n) = n^k$

Kombinace nezáleží na pořadí, vybíráme k prvků z n prvků,

bez opakování $C_k(n) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

včetně opakování $C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$

I.B. Pravděpodobnost

Popis zákonitostí týkajících se náhodných jevů resp. pokusů.

Pravděpodobnost se používá při **modelování náhodnosti a neurčitosti**.
(Náhodnost je spojena s nedostatečnou znalostí počátečních podmínek.)

I.B. Pravděpodobnost

Popis zákonitostí týkajících se náhodných jevů resp. pokusů.

Pokus
děj, který probíhá, resp. nastává opakovaně za určitých, stejně nastavených, počátečních podmínek.

Pravděpodobnost se používá při **modelování náhodnosti a neurčitosti**.
(Náhodnost je spojena s nedostatečnou znalostí počátečních podmínek.)

I.B. Pravděpodobnost

Popis zákonitostí týkajících se náhodných jevů resp. pokusů.

Pokus
děj, který probíhá, resp. nastává opakovaně za určitých, stejně nastavených, počátečních podmínek.

Deterministický pokus
za určitých počátečních podmínek se dostaví vždy stejný výsledek.

Náhodný pokus
za stejných výchozích podmínek má různé výsledky,
např. vrh kostkou,
počet pozorovaných dopravních nehod,
zmetkovitost výrobků,
atp.

Pravděpodobnost se používá při **modelování náhodnosti a neurčitosti**.
(Náhodnost je spojena s nedostatečnou znalostí počátečních podmínek.)

I.B. Pravděpodobnost

Popis zákonitostí týkajících se náhodných jevů resp. pokusů.

Pokus
děj, který probíhá, resp. nastává opakovaně za určitých, stejně nastavených, počátečních podmínek.

Deterministický pokus
za určitých počátečních podmínek se dostaví vždy stejný výsledek.

Náhodný pokus
za stejných výchozích podmínek má různé výsledky,
např. vrh kostkou,
počet pozorovaných dopravních nehod,
zmetkovitost výrobků,
atp.

Pravděpodobnost se používá při **modelování náhodnosti a neurčitosti**.
(Náhodnost je spojena s nedostatečnou znalostí počátečních podmínek.)

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu .
Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Hod kostkou

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu .
Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.
Hod kostkou

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu .
Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

jev A... padne 6 ok

jev B... padnou 3 oka

jev S ... padne sudý počet ok

jev T ... padne počet ok ≤ 5

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Hod kostkou

U jednotlivých náhodných jevů určujeme **pravděpodobnost** jejich **nastoupení**

Používá se označení

P(A).... čti pravděpodobnost jevu A, tj. pravděpodobnost, že padne 6 ok

P(B).... čti pravděpodobnost jevu B, tj. pravděpodobnost, že padnou 3 oka

.... atp.

Náhodný jev = tvrzení o výsle

jev A... padne 6 ok

jev B... padnou 3 oka

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Měření krevního tlaku

systolický/diastolický

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu .

Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Měření krevního tlaku

systolický/diastolický

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu . Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

jev A... systolický tlak je > 120 mmHg

jev S ... systolický tlak je v normě

jev B... diastolický tlak je ≤ 100 mmHg

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Měření krevního tlaku

systolický/diastolický

Náhodný jev = tvrzení o výsledku náhodného pokusu .

Značíme velkými písmeny např. A, B, X, Y ...

jev A... systolický tlak je > 120 mmHg

jev B... diastolický tlak je ≤ 100 mmHg

jev S ... systolický tlak je v normě

je zapotřebí vědět, co je to „být v normě“

Pravděpodobnost
Základní pojmy

Náhodný pokus = děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá.

např.

Měření krevního tlaku

systolický/diastolický

Náhodný jev = tvrzení o výsle

jev A... systolický tlak je > 120 m

jev B... diastolický tlak je ≤ 100 r

→ **pravděpodobnost** jeho **nastoupení**

Používá se označení

P(A).... čti pravděpodobnost jevu A, tj.
p_st, že systol. tlak je > 120 mmHg

P(B).... čti pravděpodobnost jevu B, tj.
p_st, že diastol. tlak je ≤ 100 mmHg

.... atp.

Pravděpodobnost

označení jevů

např. u pokusu  hod kostkou

Pravděpodobnost

označení jevů

např. u pokusu  hod kostkou

Jev nemožný
A .... padne číslo 7

P(A) = 0
tj. 0%

Jev náhodný
B ... padne sudé číslo

0 < P(A) < 1
tj. mezi 0% a 100%

Jev jistý
C ... číslo menší než 8

P(A) = 1
tj. 100%

Pravděpodobnost
označení jevů

např. u pokusu  hod kostkou

Jev nemožný
A .... padne číslo 7

P(A) = 0
tj. 0%

Jev náhodný
B ... padne sudé číslo

0 < P(A) < 1
tj. mezi 0% a 100%

Jev jistý
C ... číslo menší než 8

P(A) = 1
tj. 100%

E ...**jev prakticky nemožný**
P(E) < 0.05
tj. méně než 5%

F ...**jev prakticky jistý**
P(F) > 0.95
tj. více než 95%

Pravděpodobnost
Klasická pravděpodobnost

Mějme náhodný pokus.

Nechť

Ω je množina všech jeho výsledků a

jev A je nějaké tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, pak

$$P(A) = \frac{\text{počet všech výsledků příznivých jevu } A}{\text{počet všech možných výsledků pokusu}}$$

Pravděpodobnost
Klasická pravděpodobnost

(Pierre Simon de Laplace, 1812)

Pravděpodobnost
Klasická pravděpodobnost

Mějme náhodný pokus.

Nechť

Ω je množina všech jeho výsledků a

jev *A* je nějaké tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, pak

$$P(A) = \frac{\text{počet všech výsledků příznivých jevu } A}{\text{počet všech možných výsledků pokusu}}$$

Pravděpodobnost
Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

Pravděpodobnost
Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

padne 1, 2, 3, 4, 5, 6 ok

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev $\boldsymbol{A}$ je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

padne 1, 2, 3, 4, 5, 6 ok

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

padnou více jak 4 oka

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou, která je vyvážená

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

padne 1, 2, 3, 4, 5, 6 ok

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

padnou více jak 4 oka

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

hod kostkou, která je vyvážená

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

padne 1, 2, 3, 4, 5, 6 ok

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

padnou více jak 4 oka

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

P(A) = P(padnou více jak 4 oka) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.\overline{33} \doteq 33{,}3\%$

Pravděpodobnost
Klasická pravděpodobnost

volba sprchového gelu
z regálu v obchodě

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

volba sprchového gelu
z regálu v obchodě

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

nabízí se Radox, Dove,
Fa, Nivea, Palmolive

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Mají-li všechny výsledky **stejnou šanci, že nastanou**, (jsou rovnocenné)
pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

volba sprchového gelu
z regálu v obchodě

Mějme **náhodný pokus**.

nabízí se Radox, Dove, Fa, Nivea, Palmolive

Nechť
Ω je **množina všech jeho výsledků** a
jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

bude zvolen ten od značek Radox nebo Nivea

Mají-li všechny výsledky **stejnou šanci, že nastanou**, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

volba sprchového gelu
z regálu v obchodě
se zavřenýma očima

Mějme **náhodný pokus**.

nabízí se Radox, Dove, Fa, Nivea, Palmolive

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

bude zvolen ten od značek Radox nebo Nivea

Mají-li všechny výsledky **stejnou šanci, že nastanou**, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

volba sprchového gelu
z regálu v obchodě
se zavřenýma očima

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

nabízí se Radox, Dove, Fa, Nivea, Palmolive

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

bude zvolen ten od značek Radox nebo Nivea

Mají-li všechny výsledky stejnou šanci, že nastanou, (jsou rovnocenné) pak

$$P(A) = \frac{počet\ výsledků\ příznivých\ jevu\ \boldsymbol{A}}{počet\ všech\ možných\ výsledků\ pokusu}$$

P(A) = P(Radox nebo Nivea) = $\frac{2}{5} = 0.4 = 40\%$

Pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost

K určení „počtu příznivých“ a „všech možných“ využíváme schopností z kombinatoriky.

Příklad 1: Číslice 1, 2, 3, 4, 5 jsou napsány na 5-ti lístcích. Náhodně vybereme 3 a utvoříme trojciferné číslo, přičemž cifry k sobě skládáme v pořadí, v jakém jsme je vybrali. Vypočtěte pravděpodobnost, že se takto podaří sestavit sudé číslo.

Příklad 2: S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet

a) šest,

b) menší než 7.

Příklad 3: Do kolony bylo náhodně seřazeno 7 aut: 2 Mercedesy, 3 Hondy a 2 Oply. Jaká je pravděpodobnost, že na prvním a posledním místě bude Honda?

Pravděpodobnost
Klasická pravděpodobnost

K určení „počtu příznivých" a „všech možných" využíváme schopností z kombinatoriky.

Příklad 1: Číslice 1, 2, 3, 4, 5 jsou napsány na 5-ti lístcích. Náhodně vybereme 3 a utvoříme trojciferné číslo, přičemž cifry k sobě skládáme v pořadí, v jakém jsme je vybrali. Vypočtěte pravděpodobnost, že se takto podaří sestavit sudé číslo.

jev S ... podaří se sestavit sudé číslo, $P(S) = \frac{V_2(4)+V_2(4)}{V_3(5)} = \frac{1\cdot 4\cdot 3+1\cdot 4\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 3} = 0{,}4 = 40\%$

Příklad 2: S jakou pravděpodobností padne na dvou kostkách součet

a) šest, S6..... součet je 6, $P(S6) = \frac{5}{V_2^*(6)} = \frac{5}{6\cdot 6} \doteq 0{,}1389 \doteq 14\%$

b) menší než 7. SPod7..... součet je menší než 7,

$$P(\text{SPod7}) = \frac{5+4+3+2+1}{V_2^*(6)} = \frac{15}{6\cdot 6} \doteq 0{,}4167 \doteq 42\%$$

Příklad 3: Do kolony bylo náhodně seřazeno 7 aut: 2 Mercedesy, 3 Hondy a 2 Oply. Jaká je pravděpodobnost, že na prvním a posledním místě bude Honda? jev H ... na začátku a na konci je Honda,

$$P(H) = \frac{\frac{5!}{2!\cdot 2!}}{\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}} = \frac{5!\cdot 3!}{7!} \doteq 0{,}1429 \doteq 14\%$$

Pravděpodobnost
Statistická pravděpodobnost

(Richard von Mises, počátek 20. století)

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky **stejnou šanci**, pak

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

Pravděpodobnost
Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky **stejnou šanci**, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost
Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky **stejnou šanci**, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

tzv. relativní četnost jevu A

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

hod kostkou,

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

hod kostkou,

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**

padnou více jak 4 oka

opakujeme například 100x s výsledkem:

1 ..... 10x
2 ..... 13x
3 ..... 20x
4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

hod kostkou,

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**

padnou více jak 4 oka

opakujeme
například
100x s
výsledkem:
1 ..... 10x
2 ..... 13x
3 ..... 20x
4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

hod kostkou, která je možná navrtaná

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**

padnou více jak 4 oka

opakujeme například 100x s výsledkem:

1 ..... 10x
2 ..... 13x
3 ..... 20x
4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

hod kostkou, která je možná navrtaná

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

n je **počet opakování náhodného pokusu** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**

padnou více jak 4 oka

opakujeme například 100x s výsledkem:
1 ..... 10x
2 ..... 13x
3 ..... 20x
4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

Nevíme-li, zda mají všechny výsledky stejnou šanci, pak

počet nastoupení jevu A

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

relativní četnost je $\frac{18+13}{100} = 0.31 = 31\%$

Pravděpodobnost

Statistická pravděpodobnost

Mějme **náhodn**

Nechť

n je **počet opakování náh**

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku t**

padnou více jak 4 oka

Nevíme-li, zda mají všech ys

Význam limity:
Budeme-li pokus provádět znovu a znovu s čím dál větší sadou opakování (tj. $n \to \infty$),
bude se napočítaná hodnota relativní četnosti $\frac{n(A)}{n}$ postupně ustalovat na správné hodnotě pravděpodobnosti sledovaného jevu A.

počet nastoupení jevu A

4 ..... 26x
5 ..... 18x
6 ..... 13x

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\boldsymbol{A})}{n}$$

počet opakování pokusu

relativní četnost je $\frac{18+13}{100} = 0.31 = 31\%$

Pravděpodobnost
Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω)
nekonečný, pak

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω) **nekonečný**, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost
Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω)

… pak

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Míra:
nezáporné číslo, které popisuje velikost množiny,
např.
- počet prvků, pokud je lze počítat
- délka, pokud jde o úsečku či křivku (1D)
- obsah, pokud jde o plochu (2D)
- objem pokud jde o těleso (3D)

Pravděpodobnost
Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny **Ω**) **nekonečný**, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost
Geometrická pravděpodobnost

určení místa dopadu meteoritu na Zemi,

Mějme **náhodný pokus**.

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny **Ω**) **nekonečný**, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost
Geometrická pravděpodobnost

Mějme **náhodný pokus**.

určení místa dopadu meteoritu na Zemi,

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

všechna místa na Zemi,

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω)

nekonečný, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

určení místa dopadu meteoritu na Zemi,

Mějme **náhodný pokus**.

všechna místa na Zemi,

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev ***A*** je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

meteorit dopadne na pevninu

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny **Ω**)

nekonečný, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

určení místa dopadu meteoritu na Zemi,

Mějme **náhodný pokus**.

všechna místa na Zemi, takových míst je nekonečně mnoho

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev *A* je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

meteorit dopadne na pevninu

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny **Ω**) **nekonečný**, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

určení místa dopadu meteoritu na Zemi,

Mějme **náhodný pokus**.

všechna místa na Zemi, takových míst je nekonečně mnoho

Nechť

Ω je **množina všech jeho výsledků** a

jev A je nějaké **tvrzení o výsledku tohoto náhodného pokusu**.

meteorit dopadne na pevninu

Pokud je počet všech možných výsledků (počet prvků množiny Ω) **nekonečný**, pak

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

míra množiny výsledků odpovídajících jevu A

míra množiny všech možných výsledků

$$P(A) = \frac{plocha\ pevniny}{celkový\ povrch\ Země} = \frac{149}{361 + 149} = 0{,}292 = 29{,}2\%$$

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

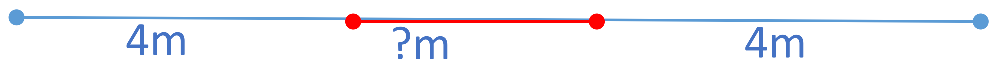
Příklad 1: Tyč délky **10m** je náhodně rozlomena na 2 části. Jaká je pravděpodobnost, že menší část bude delší než 4m?

Příklad 2: Na zastávku místní dopravy přijíždí autobus každých 7 minut a zdrži se vždy 0,5 minuty. Jaká je pravděpodobnost, že přijdu a zastihnu autobus na zastávce?

Pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost

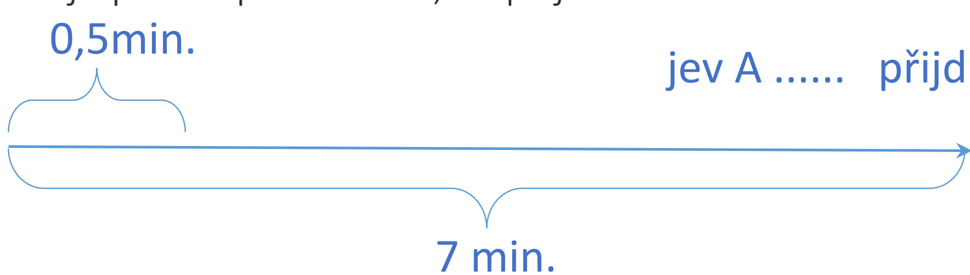
Příklad 1: Tyč délky **10m** je náhodně rozlomena na 2 části. Jaká je pravděpodobnost, že menší část bude delší než 4m?



jev A ...... po zlomení bude menší část delší než 4m

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2m}{10m} = 0{,}2 = 20\%$$

Příklad 2: Na zastávku místní dopravy přijíždí autobus každých 7 minut a zdrži se vždy 0,5 minuty. Jaká je pravděpodobnost, že přijdu a zastihnu autobus na zastávce?



jev A ...... přijdu v okamžiku, kdy je autobus na zastávce

$$P(A) = \frac{0{,}5min}{7min} = \frac{\frac{1}{2}}{7} = \frac{1}{14} \doteq 0{,}07142 \doteq 7\%$$

Pravděpodobnost

3 definice jeden význam

Pravděpodobnost

3 definice jeden význam

klasická definice

$$P(A) = \frac{\text{počet příznivých}}{\text{počet všech možných}}$$

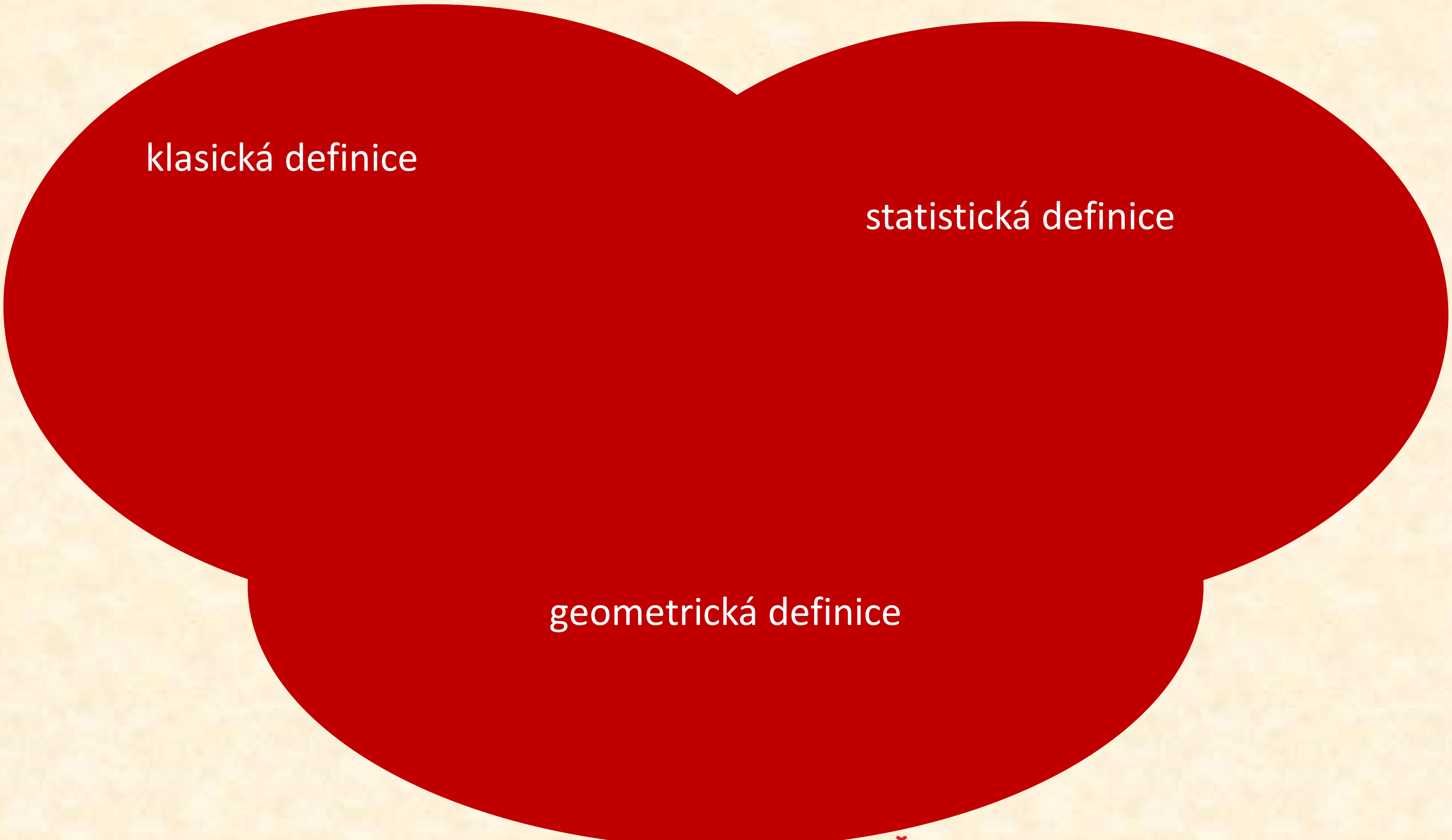
statistická definice

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

geometrická definice

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Pravděpodobnost
3 definice jeden význam



Pravděpodobnost
3 definice jeden význam

Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

Pravděpodobnost

3 definice jeden význam

Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo **mezi 0 a 1** (včetně).

Pravděpodobnost
3 definice jeden význam

Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo **mezi 0 a 1** (včetně).
2. Pravděpodobnost jevu **jistého** je rovna **1**.

Pravděpodobnost

3 definice jeden význam

Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo **mezi 0 a 1** (včetně).
2. Pravděpodobnost jevu **jistého** je rovna **1**.
3. Pravděpodobnost, že nastane některý z navzájem se vylučujících jevů, je rovna **součtu** jejich **pravděpodobností**.

Pravděpodobnost
3 definice jeden význam

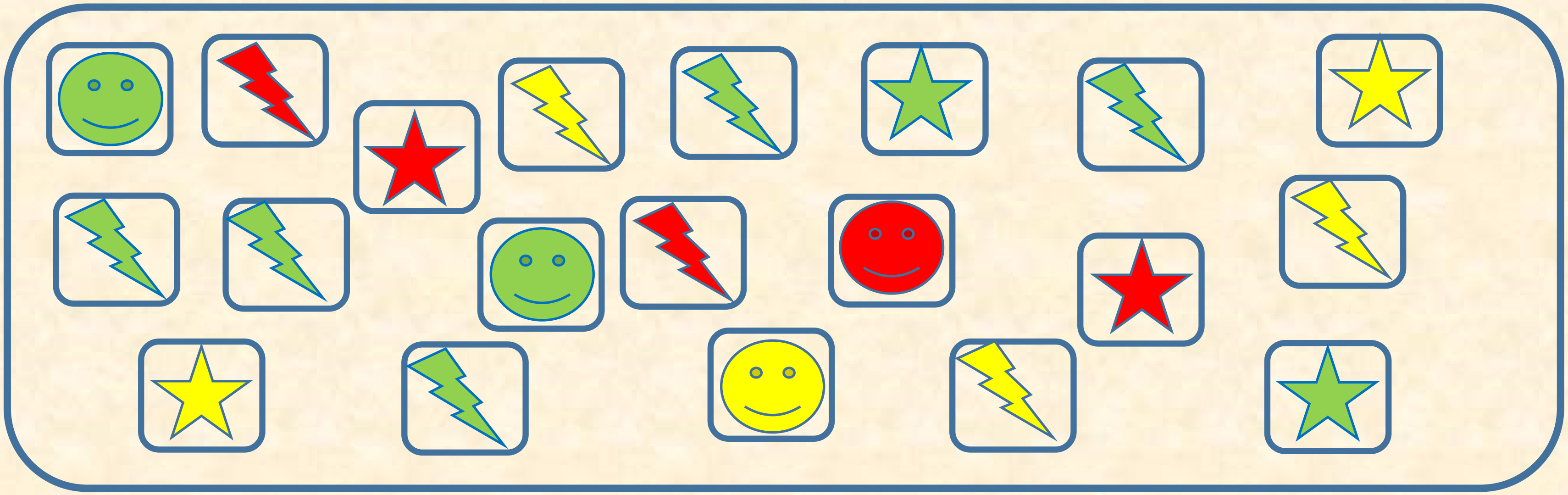
Axiomy pravděpodobnosti (Andrej Nikolajevič Kolmogorov , 1933)
Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.

1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo **mezi 0 a 1** (včetně).
2. Pravděpodobnost jevu **jistého** je rovna **1**.
3. Pravděpodobnost, že nastane některý z navzájem se vylučujících jevů, je rovna **součtu** jejich **pravděpodobností**.

NEBO

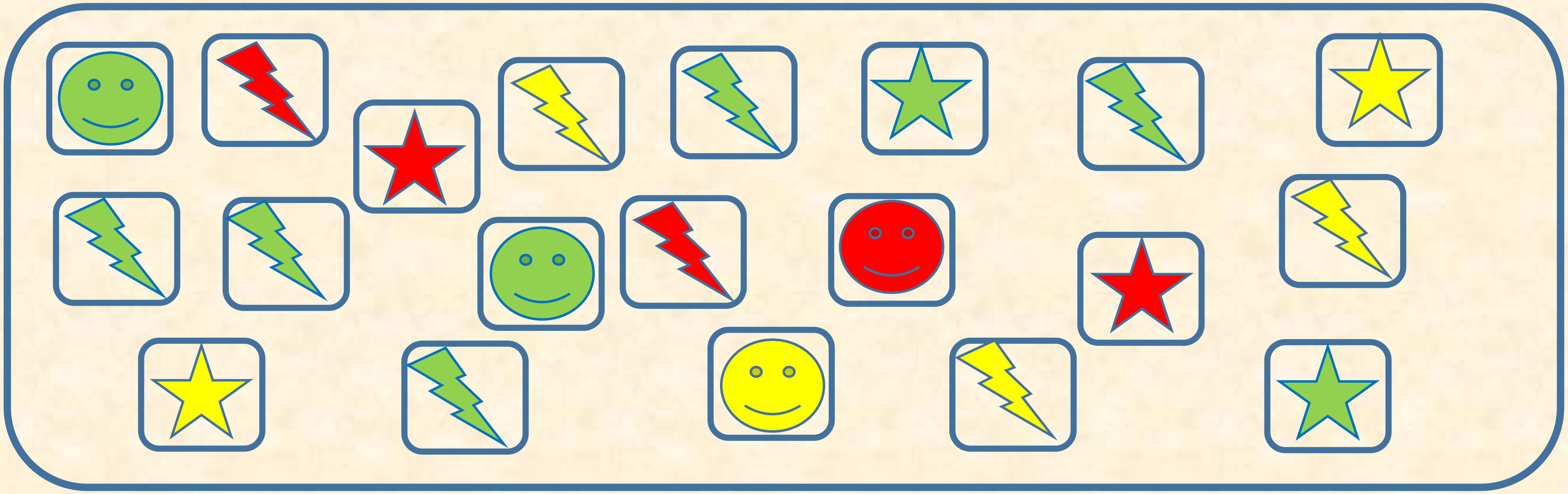
Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

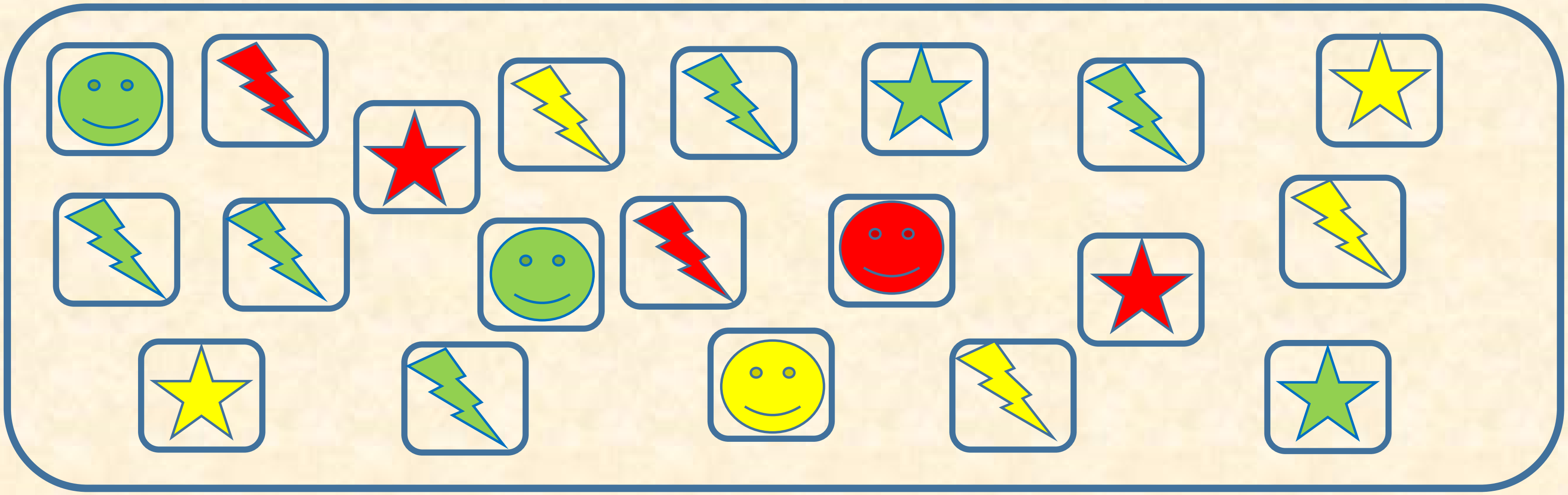
V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



jev A .... vybraný objekt je smajlík

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.

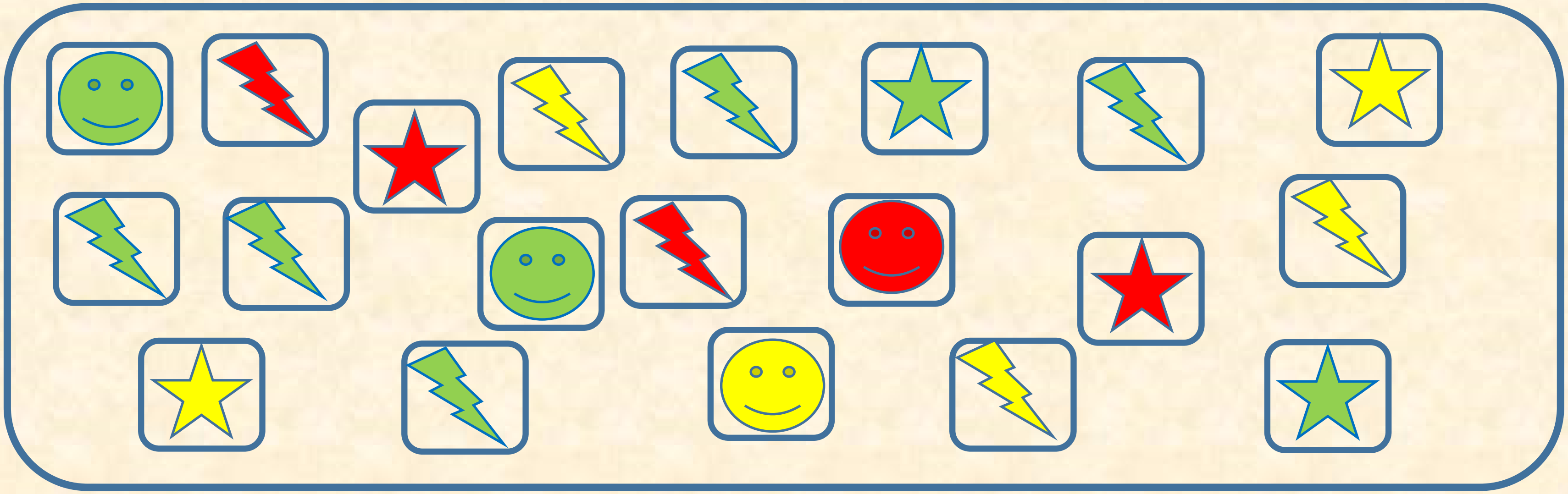


jev A .... vybraný objekt je smajlík

jev opačný A' .... vybraný objekt není smajlík

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



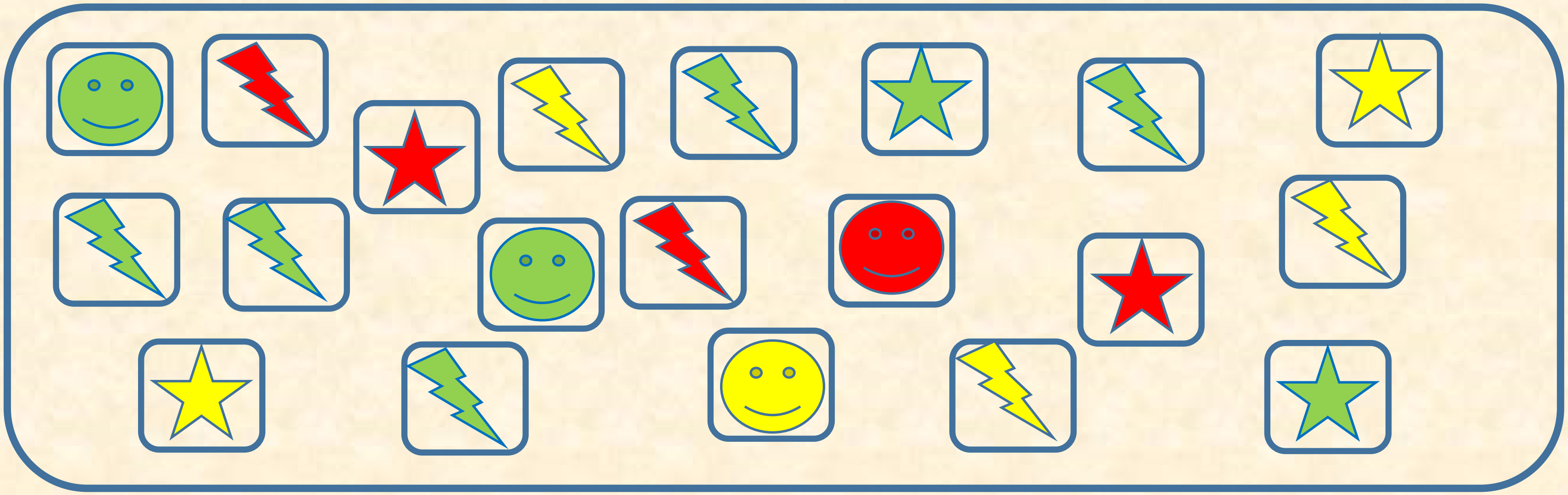
jev A .... vybraný objekt je smajlík $P(A) = \dfrac{4}{20} = 0{,}2 = 20\%$

jev opačný A' .... vybraný objekt není smajlík

$$P(A') = \frac{20-4}{20} = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 = 80\%$$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



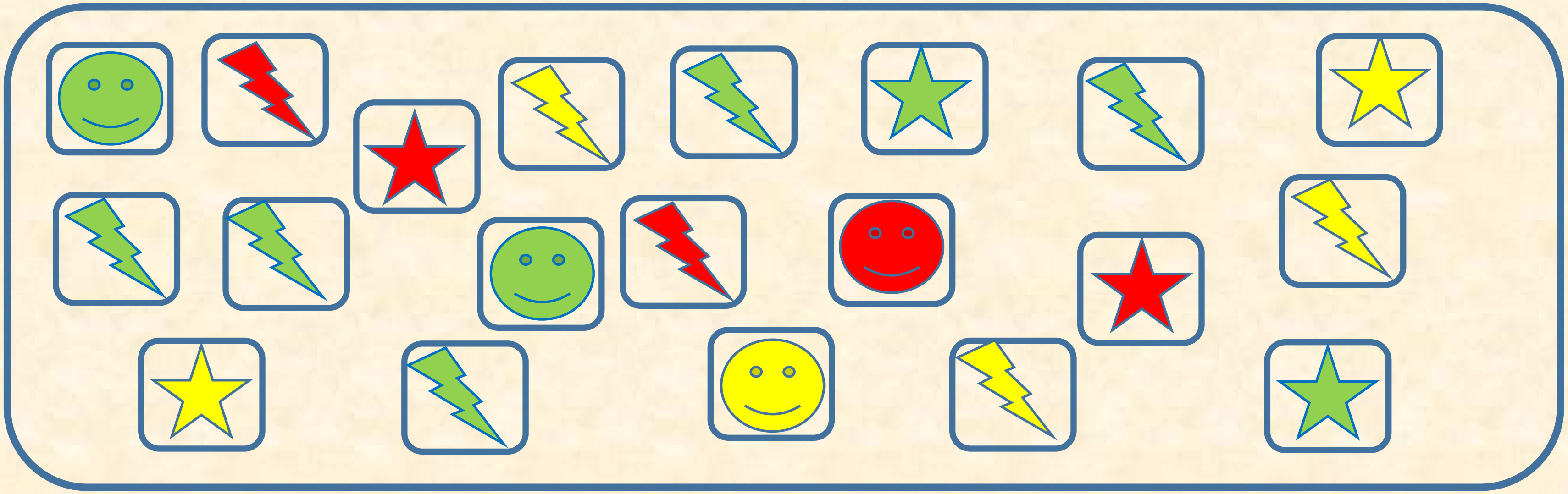
jev A .... vybraný objekt je smajlík $P(A) = \frac{4}{20} = 0{,}2 = 20\%$

jev opačný A' .... vybraný objekt není smajlík

$$\boldsymbol{P(A')} = \frac{20-4}{20} = \boldsymbol{1 - P(A)} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 = 80\%$$

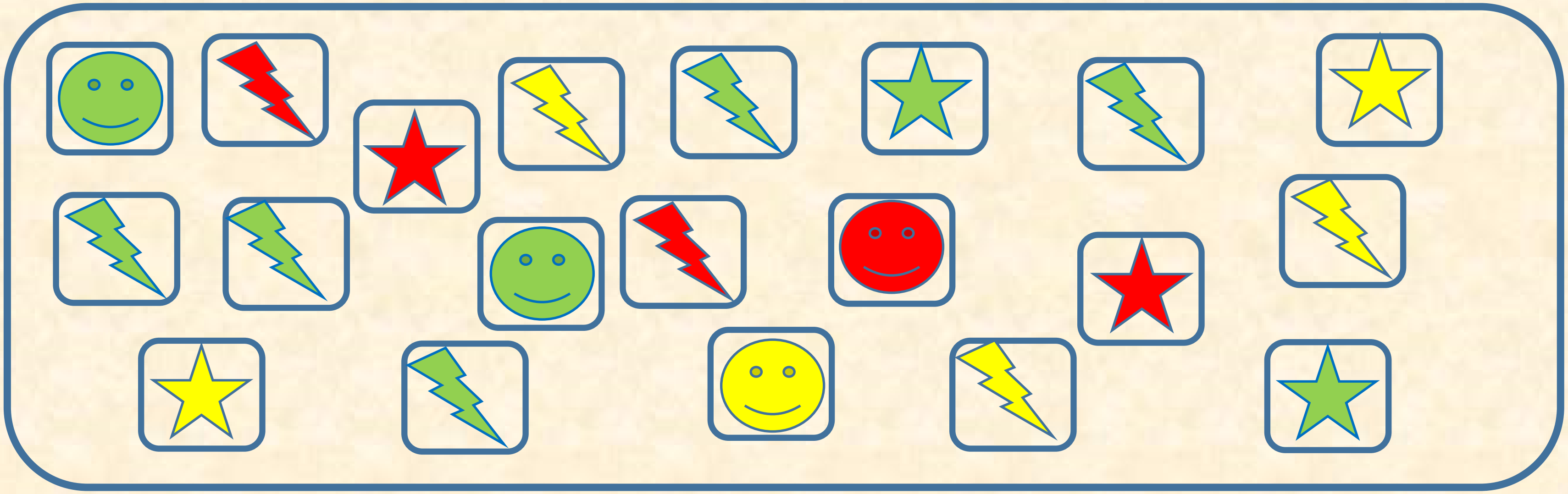
Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

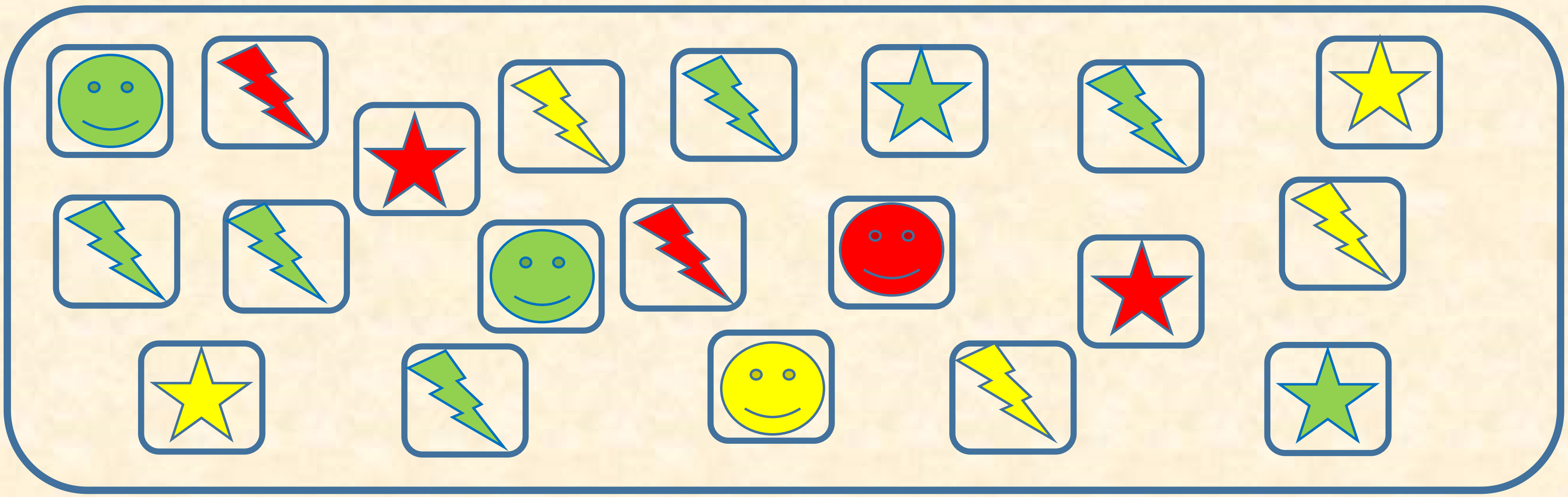
V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



jev **Č** ... náhodně vybraný útvar je **červený**
jev ★... náhodně vybraný útvar je **hvězda**

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



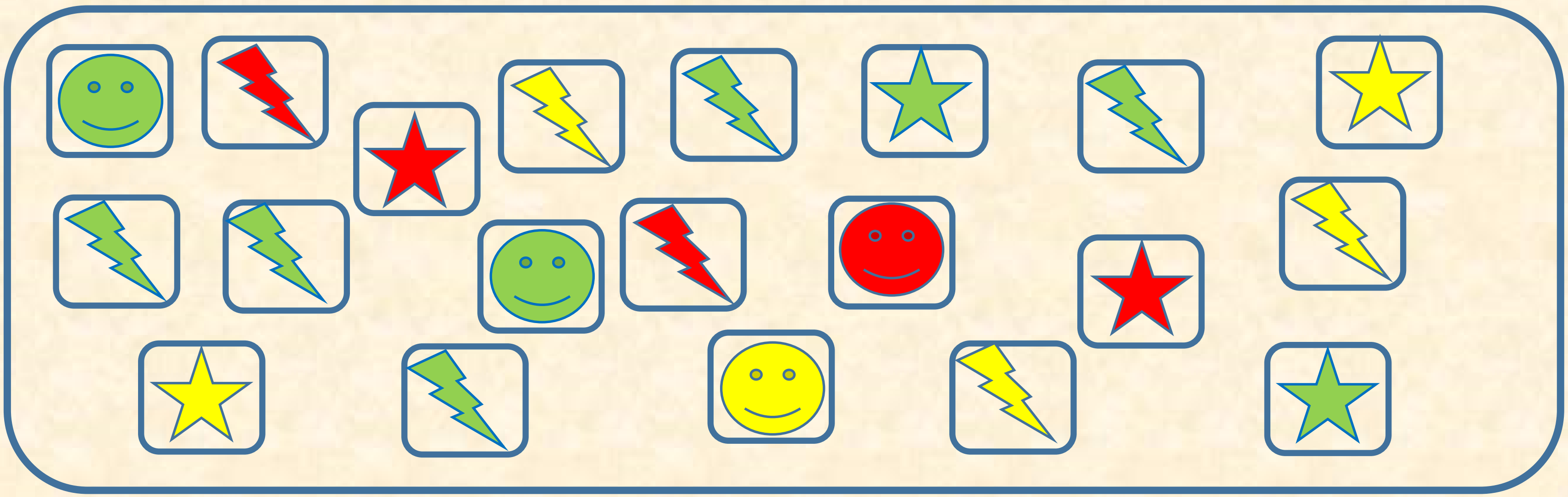
jev **Č** ... náhodně vybraný útvar je **červený**
jev ★... náhodně vybraný útvar je **hvězda**

$P(Č) = \frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$

$P(Č \cap ★) = \frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\%$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



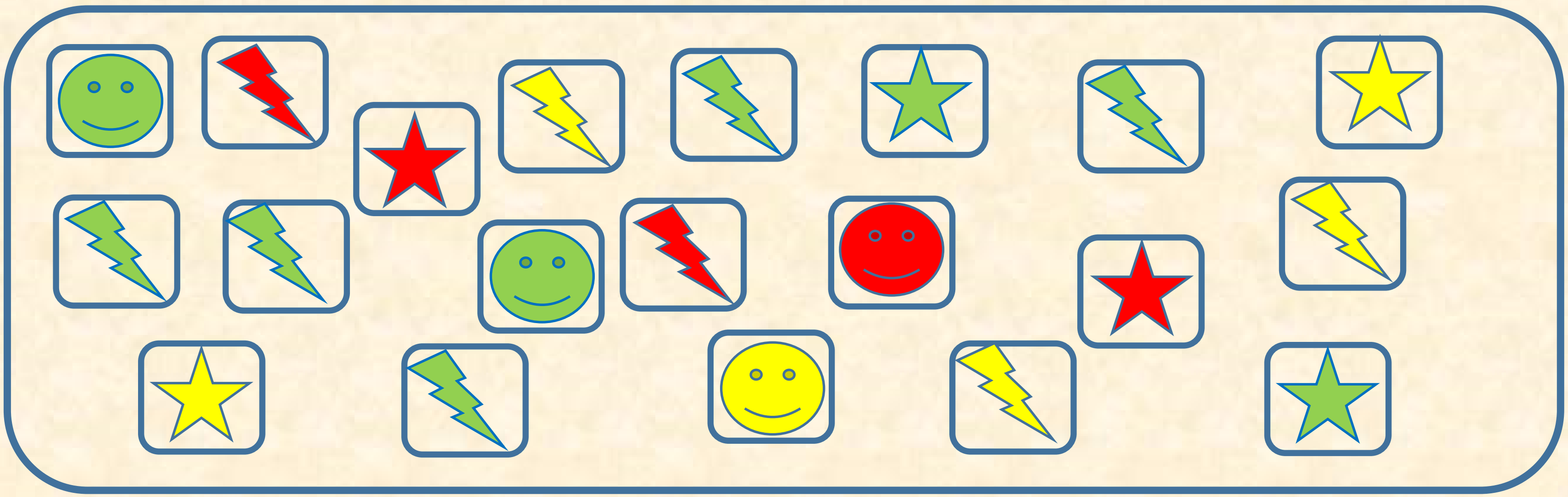
jev **Č** ... náhodně vybraný útvar je **červený**
jev ★.. náhodně vybraný útvar je **hvězda**

$$P(Č) = \frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$$

$$P(Č \cap ★) = \frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\%$$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



jev **Č** ... náhodně vybraný útvar je **červený**

jev ★.. náhodně vybraný útvar je **hvězda**

Podmíněná pravděpodobnost

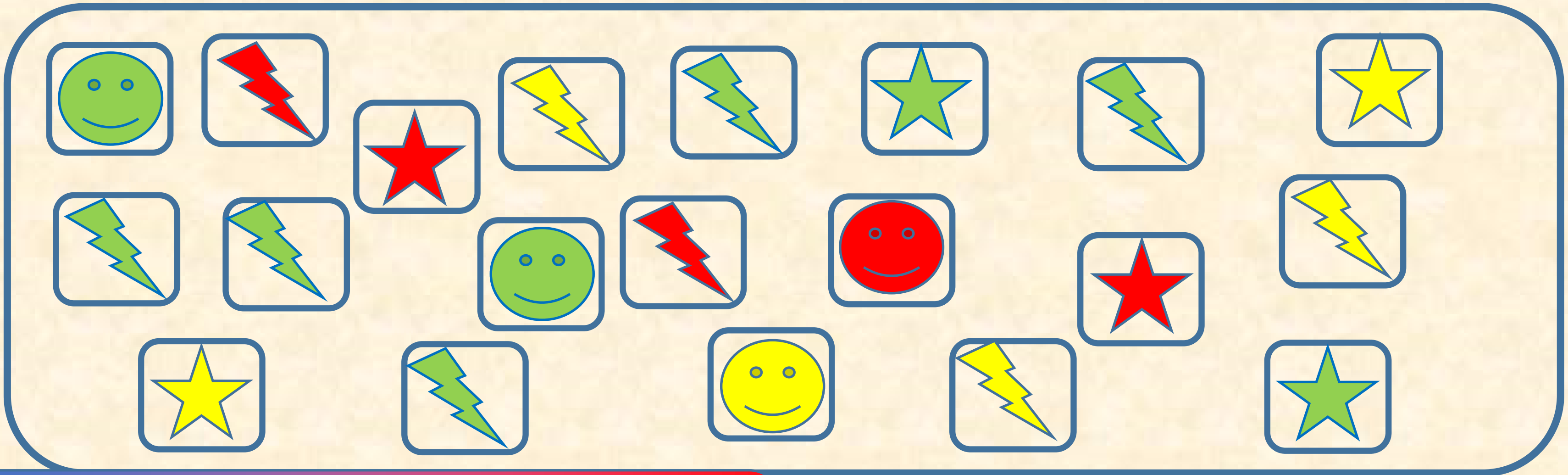
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

MVŠO › KNOWLEDGE FOR THE FUTURE

Pravděpodobnost

vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



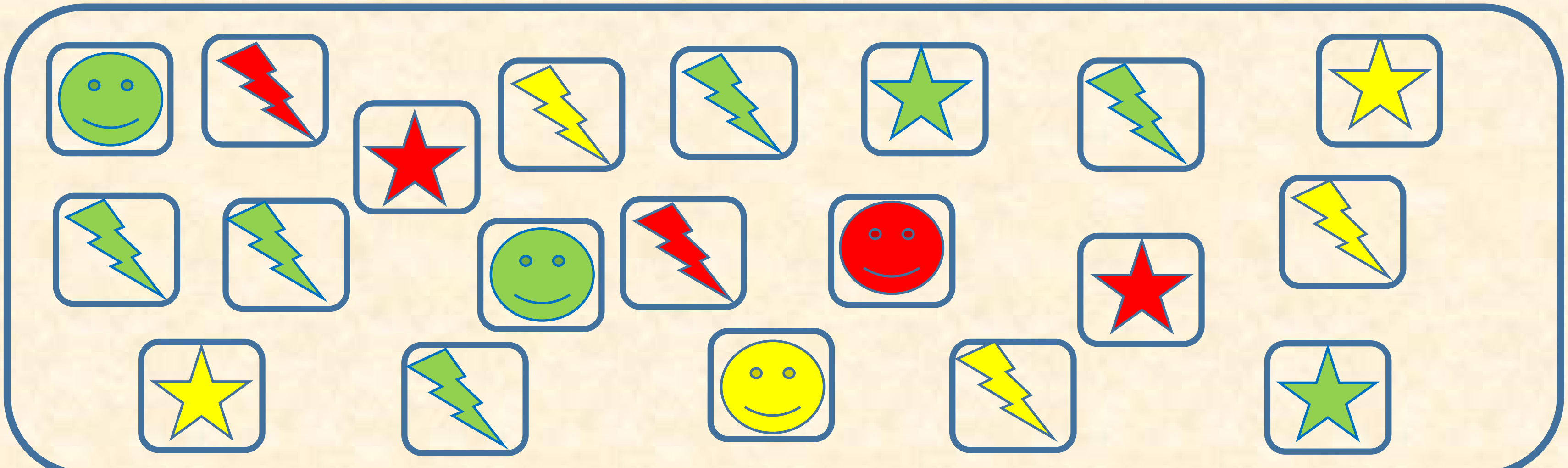
čti: „pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B“

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



čti: „pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B“

P(Č)= $\frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$

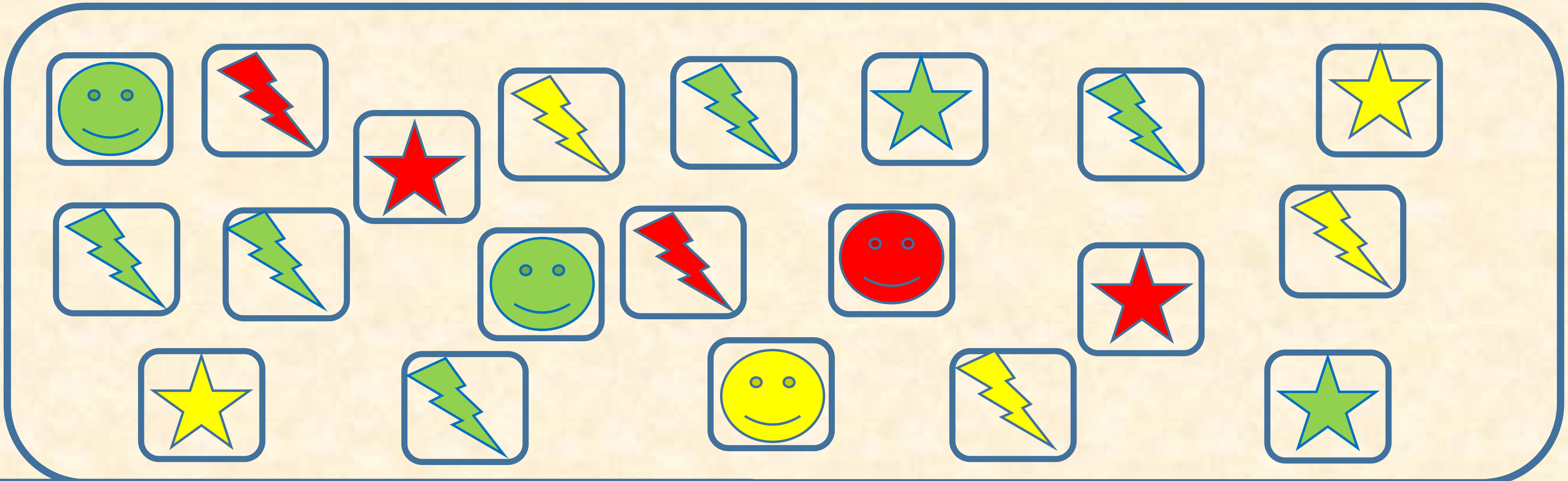
P(★∩Č) = $\frac{2}{20} = 0,1 = 10\%$

Podmíněná pravděpodobnost

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Pravděpodobnost
vysvětlení dalších pojmů

V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



čti: „pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B“

Podmíněná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

P(Č)= $\frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$

P(★∩Č) = $\frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\%$

$$P(\bigstar|\text{Č}) = \frac{P(\bigstar \cap \text{Č})}{P(\text{Č})} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4 = 40\%$$

Pravděpodobnost
další vlastnosti

1. $P(A') = 1 - P(A)$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost
další vlastnosti

Pravděpodobnost jevu opačného k jevu A

1. $P(A') = 1 - P(A)$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší

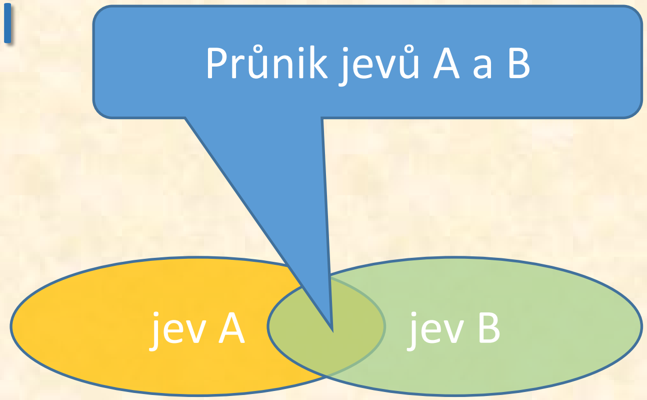
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost

vlastnosti



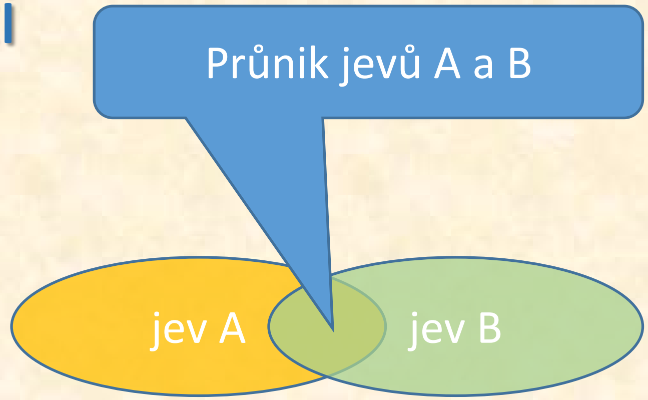
1. $P(A') = 1 - P(A)$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší
   $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost

vlastnosti



1. $P(A') = 1 - P(A)$

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

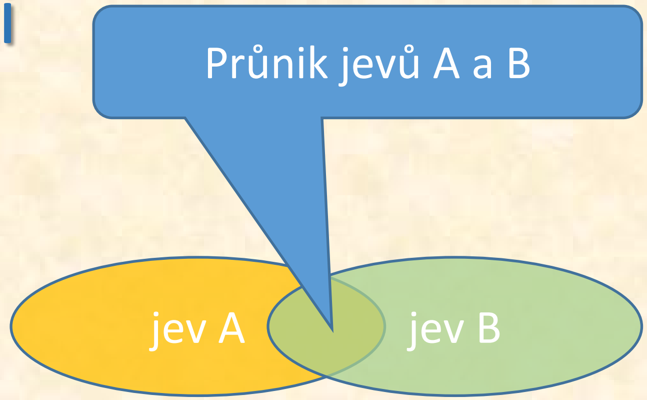
Disjunktní jevy

3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost

vlastnosti



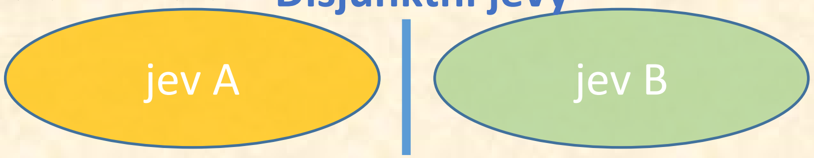
1. $P(A') = 1 - P(A)$

NEBO

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Disjunktní jevy

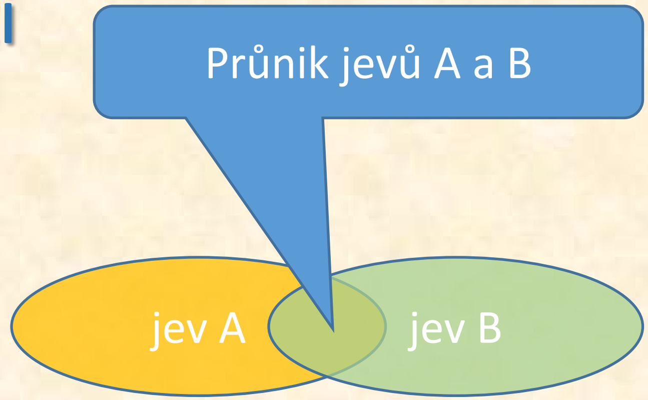


3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost

vlastnosti

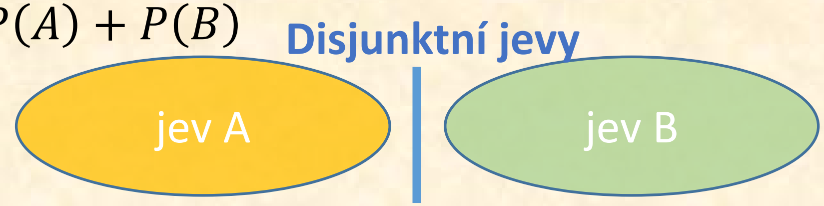


1. $P(A') = 1 - P(A)$

NEBO

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - pokud jsou A, B **disjunktní** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



a zároveň

3. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$
   - pokud jsou A, B **nezávislé** jevy, potom je vzorec jednodušší

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pravděpodobnost

Příklad 1: Házíme dvěma kostkami. Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost toho, že

a) padne-li na 1.kostce dvojka, padne součet větší než 6.

b) padne-li na 1. kostce sudé číslo, padne součet větší než 8.

Příklad 2: Kruhový terč má 3 pásma. Pravděpodobnost zásahu

- prvního pásma je 0,2
- druhého pásma 0,23
- třetího pásma 0,15.

Jaká je pravděpodobnost minutí cíle?

Pravděpodobnost

Příklad 1: Házíme dvěma kostkami. Vypočtěte, jaká je pravděpodobnost toho, že

a) padne-li na 1.kostce dvojka, padne součet větší než 6.

jev A .... součet je víc jak 6
jev B .... na 1. kostce padne 2

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{6 \cdot 6}}{\frac{1 \cdot 6}{6 \cdot 6}} = \frac{2}{6} = 0,\overline{33} \doteq 33\%$$

b) padne-li na 1. kostce sudé číslo, padne součet větší než 8.

jev A .... součet je víc jak 8
jev B .... na 1. kostce padne sudé

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 6}}{\frac{3 \cdot 6}{6 \cdot 6}} = \frac{1}{3} = 0,\overline{33} \doteq 33\%$$

Příklad 2: Kruhový terč má 3 pásma. Pravděpodobnost zásahu

- prvního pásma je 0,2
- druhého pásma 0,23
- třetího pásma 0,15.

Z1 ...... zasáhne 1. pásmo, P(Z1)=0,2
Z2 ...... zasáhne 2. pásmo, P(Z2)=0,23
Z3 ...... zasáhne 3. pásmo, P(Z3)=0,15

Jaká je pravděpodobnost minutí cíle?

$$P(minutí) = 1 - P(jakýkoli\ zásah)$$
$$= 1 - (0{,}2 + 0{,}23 + 0{,}15) = 0{,}42 = 42\%$$

Pravděpodobnost

Příklad 3: Výrobek prochází v průběhu zpracování postupně čtyřmi úrovněmi zpracování. Pravděpodobnost vyrobení zmetku u jednotlivých úrovní je postupně rovna 0,02; 0,03; 0,005; 0,015. Určete pravděpodobnost toho, že výsledkem výrobního procesu v daném případě bude zmetek.

jev Zm .... výrobek je zmetek

jev U1 .... výrobek prošel 1. úrovní zpracování, $P(U1 \cap Zm) = 0{,}02$

jev U2 .... výrobek prošel 2. úrovní zpracování , $P(U2 \cap Zm) = 0{,}03$

jev U3 .... výrobek prošel 3. úrovní zpracování , $P(U3 \cap Zm) = 0{,}005$

jev U4 .... výrobek prošel 4. úrovní zpracování , $P(U4 \cap Zm) = 0{,}015$

$$P(Zm) = \boxed{1 - P(\textit{není}\ Zm)} = 1 - P(U1 \cap \textit{není}\ Zm) \cdot P(U2 \cap \textit{není}\ Zm) \cdot P(U3 \cap \textit{není}\ Zm) \cdot P(U4 \cap \textit{není}\ Zm) =$$
$$= 1 - \big(1 - P(U1 \cap \textit{není}\ Zm)\big) \cdot \big(1 - P(U2 \cap \textit{není}\ Zm)\big) \cdot \big(1 - P(U3 \cap \textit{není}\ Zm)\big) \cdot \big(1 - P(U4 \cap \textit{není}\ Zm)\big) =$$
$$= \boxed{1 - 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}995 \cdot 0{,}985} = 0{,}06834 \doteq 7\%$$

Příklad 4: Z celkové produkce závodu jsou 4% zmetků. Z vyhovujících výrobků je 75% standardních. Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek je standardní.

Zm ...... výrobek je zmetek, $P(Zm) = 0{,}04$

Vyh ...... výrobek je vyhovující, $P(Vyh) = 1 - P(Zm) = 1 - 0{,}4 = 0{,}96$

St ...... výrobek je standardní, $P(Vyh\,|St) = 0{,}75$

$$P(St\ a\ \textit{zároveň}\ Vyh) = P(St \cap Vyh) = P(St \mid Vyh) \cdot P(Vyh) = 0{,}75 \cdot 0{,}96 = 0{,}72 = 72\%$$