Pravidlo součinu

$\cdot$

a zároveň

Kombinatorika

Shrnutí minulého cvičení

Pravidlo součtu

$+$

NEBO

Permutace! záleží na pořadí, vybíráme $\boldsymbol{n}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ prvků

$$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Variace záleží na pořadí, vybíráme $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ prvků, $\boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}$

$$V_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{n}) = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

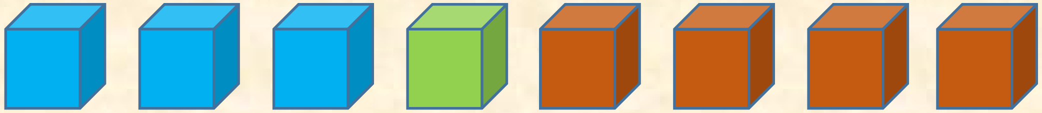
Kombinace nezáleží na pořadí, vybíráme $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ prvků,

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}! \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n -tice vybraná z n prvků

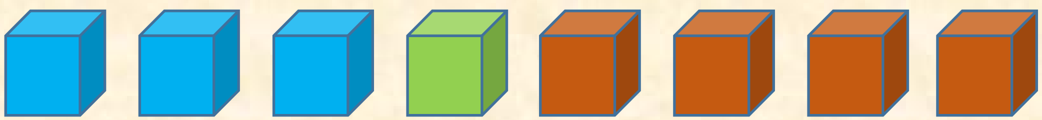
Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n -tice vybraná z n prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?

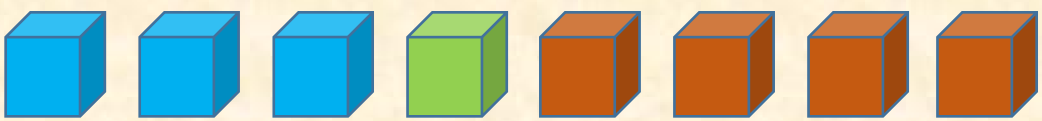


Kdyby byly kostky od sebe odlišitelné, pak by počet možností byl

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



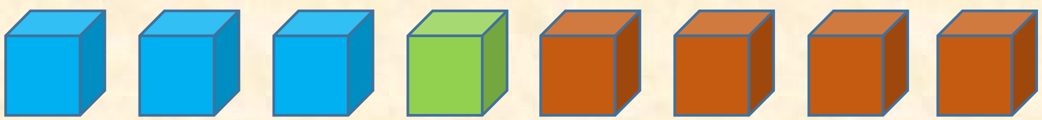
Kdyby byly kostky od sebe odlišitelné, pak by počet možností byl

$$(3+1+4)! = 8! = 40\ 320$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?

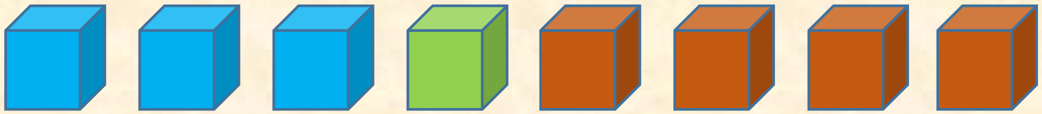


Ale

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?

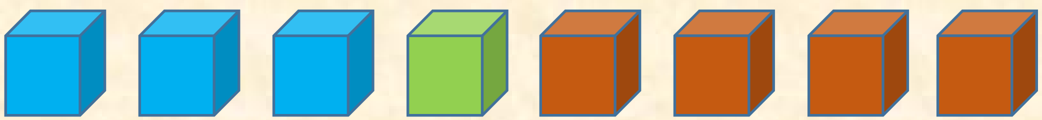


Ale například ty **tři modré** jsou úplně stejné!

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n -tice vybraná z n prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



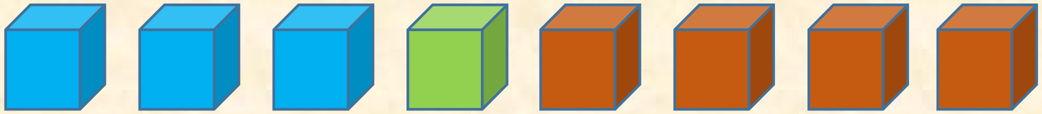
Ale například ty **tři modré** jsou úplně stejné! Je tedy zapotřebí celkový počet možností podělit počtem případů, kdy dochází pouze ke změnám mezi modrými

$$\frac{(3+1+4)!}{3!} = \frac{8!}{3!} = \frac{40\,320}{6}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?

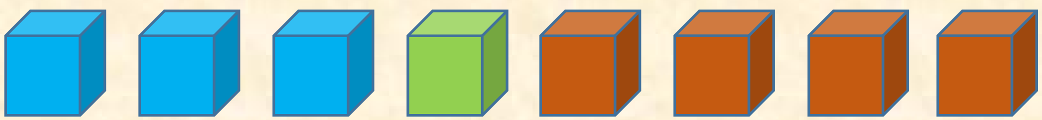


Ale navíc i ty **čtyři hnědé** jsou také úplně stejné!

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



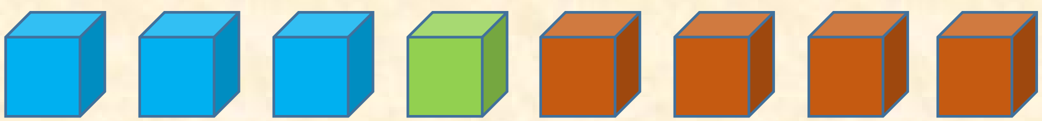
Ale navíc i ty **čtyři hnědé** jsou také úplně stejné! Je tedy zapotřebí ještě podělit počtem případů, kdy dochází pouze ke změnám mezi hnědými

$$\frac{(3+1+4)!}{3!} = \frac{8!}{3!} = \frac{40\,320}{6}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



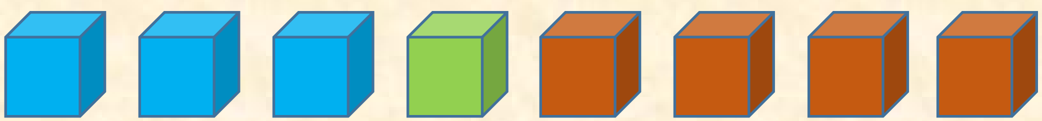
Ale navíc i ty **čtyři hnědé** jsou také úplně stejné! Je tedy zapotřebí ještě podělit počtem případů, kdy dochází pouze ke změnám mezi hnědými

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n-tice vybraná z n prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



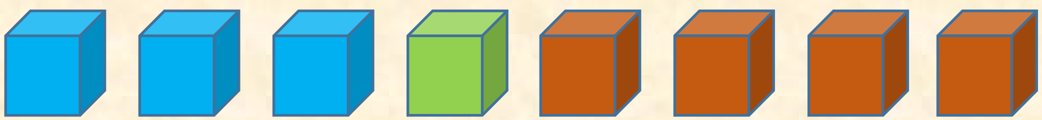
A co ta **jedna zelená**?

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



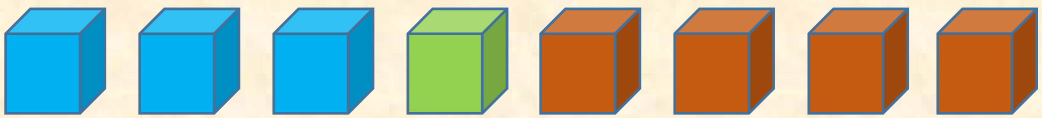
A co ta **jedna zelená**? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení?

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ -tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



A co ta jedna zelená? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení? Ale ano ☺

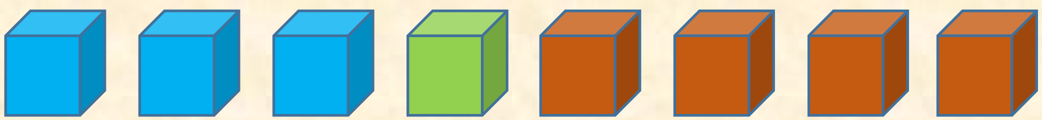
$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 1\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{n}$ **-tice** vybraná z $\boldsymbol{n}$ **prvků**

$$P^{*}_{n_1 n_2 n_3}(n_1 + n_2 + n_3) = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}$$

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



A co ta **jedna zelená**? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení? Ale ano ☺

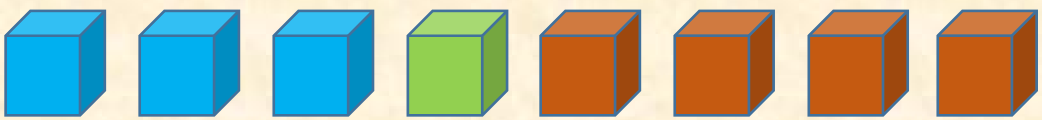
$$\frac{(3+1+4)!}{3! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{40\,320}{6 \cdot 1 \cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n-tice vybraná z n prvků

$$P^*_{n_1 n_2 n_3}\overbrace{(n_1+n_2+n_3)}^{\textbf{součet} = n} = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}$$

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



A co ta **jedna zelená**? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení? Ale ano ☺

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 1\cdot 24}$$

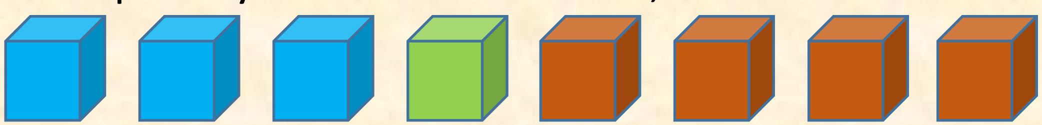
Kombinatorika

Permutace! s opakováním* = uspořádaná n-tice vybraná z n prvků

kde n_1 prvků se opakuje,
n_2 prvků se opakuje,
n_3 prvků se opakuje, ... atd.

$$P^*_{n_1 n_2 n_3}\left(\overbrace{n_1+n_2+n_3}^{\textbf{součet} = n}\right) = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}$$

Příklad: Kolika způsoby lze seřadit 3 modré, 1 zelená a 4 hnědé kostky?



A co ta **jedna zelená**? Chudinka! Ona v tom jmenovateli nemá zastoupení? Ale ano ☺

$$\frac{(3+1+4)!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{8!}{3!\cdot 1!\cdot 4!} = \frac{40\,320}{6\cdot 1\cdot 24}$$

Kombinatorika

Permutace! s opakováním*

Záleží nám na pořadí $P^*_{n_1 n_2 n_3}(n_1+n_2+n_3) = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!}$

Příklad 1: Kolika způsoby lze 14ti dětem stojícím v řadě vedle sebe rozdělit 4 žluté, 3 zelené a 7 oranžových kuliček tak, aby každé dostalo po jedné?

Příklad 2: . Kolik možností sestavit čtyřmístný kód ze dvou různých znaků?

Kombinatorika

Permutace! s opakováním*

Záleží nám na pořadí $P^*_{n_1 n_2 n_3}(n_1+n_2+n_3) = \frac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}$

Příklad 1: Kolika způsoby lze 14ti dětem stojícím v řadě vedle sebe rozdělit 4 žluté, 3 zelené a 7 oranžových kuliček tak, aby každé dostalo po jedné?

$P^*_{4,3,7} = \frac{(4+3+7)!}{4!\cdot 3!\cdot 7!}$ = **120 120 možností**

Příklad 2: . Kolik možností sestavit čtyřmístný kód ze dvou různých znaků?

$P^*_{2,2} = \frac{(2+2)!}{2!\cdot 2!}$ = 6 možností

nebo

$P^*_{1,3} = \frac{(1+3)!}{1!\cdot 3!}$ = 4 možnosti nebo $P^*_{3,1} = \frac{(3+1)!}{3!\cdot 1!}$ = 4 možností

nebo

$P^*_{0,4} = \frac{(0+4)!}{0!\cdot 4!}$ = 1 možnost nebo $P^*_{4,0} = \frac{(4+0)!}{4!\cdot 0!}$ = 1 možnost

Kombinatorika

Permutace! s opakováním*

Záleží nám na pořadí $P^*_{n_1 n_2 n_3}(n_1+n_2+n_3) = \dfrac{(n_1+n_2+n_3)!}{n_1!\cdot n_2!\cdot n_3!}$

Příklad 1: Kolika způsoby lze 14ti dětem stojícím v řadě vedle sebe rozdělit 4 žluté, 3 zelené a 7 oranžových kuliček tak, aby každé dostalo po jedné?

$P^*_{4,3,7} = \dfrac{(4+3+7)!}{4!\cdot 3!\cdot 7!}$ = **120 120 možností**

Příklad 2: . Kolik možností sestavit čtyřmístný kód ze dvou různých znaků?

$P^*_{2,2} = \dfrac{(2+2)!}{2!\cdot 2!}$ = 6 možností

nebo

$P^*_{1,3} = \dfrac{(1+3)!}{1!\cdot 3!}$ = 4 možnosti nebo $P^*_{3,1} = \dfrac{(3+1)!}{3!\cdot 1!}$ = 4 možností

nebo

$P^*_{0,4} = \dfrac{(0+4)!}{0!\cdot 4!}$ = 1 možnost nebo $P^*_{4,0} = \dfrac{(4+0)!}{4!\cdot 0!}$ = 1 možnost

Celkem 16 možností

Kombinatorika

Variace s opakováním* = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může **libovolně-krát opakovat**.

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

-----		-----		-----		-----
10 možností	a zároveň	10 možností	a zároveň	10 možností	a zároveň	10 možností

kjhg;kahsg

Kombinatorika

Variace s opakováním* = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může libovolně-krát opakovat.

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

10 a zároveň 10 a zároveň 10 a zároveň 10

Kombinatorika

Variace s opakováním* = uspořádaná k-**tice** vybraná z n **prvků**.
Každý prvek se ve výběru ale může **libovolně-krát opakovat**.

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

Kombinatorika

Variace s opakováním* = uspořádaná k-tice vybraná z n prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může libovolně-krát opakovat.

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

kódů

Kombinatorika

Variace s opakováním* = uspořádaná $\boldsymbol{k}$-tice vybraná z $\boldsymbol{n}$ prvků.
Každý prvek se ve výběru ale může *libovolně-krát opakovat*.

$$V_{k}^{*}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}^{k} \quad = \underbrace{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} \cdots \boldsymbol{n}}_{k \text{ krát}}$$

Příklad: Kolik existuje různých čtyř-ciferných kódů?

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^{4}$$

kódů

Kombinatorika

Variace s opakováním*

Záleží nám na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

$$V_k^*(n) = n^k$$

Příklad 1: Kolik je všech pěticiferných čísel?

Příklad 2: . Kolik teoreticky můžeme sestavit různých značek v Morseovou abecedou, jestliže budeme sestavovat tečky a čárky do sestav o jednom až pěti znacích?

Kombinatorika

Variace s opakováním*

Záleží nám na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

$$V_k^*(n) = n^k$$

Příklad 1: Kolik je všech pěticiferných čísel?

$V_5^*(10) = 10^5$ možností

bez čísel začínajících nulou, tj. $V_4^*(10) = 10^4$ možností

Celkem $10^5 - 10^4$ = 90 000 možností.

Příklad 2: . Kolik teoreticky můžeme sestavit různých značek v Morseovou abecedou, jestliže budeme sestavovat tečky a čárky do sestav o jednom až pěti znacích?

$V_5^*(2) = 2^5$ = 32 možností

nebo

$V_4^*(2) = 2^4$ = 16 možností nebo $V_3^*(2) = 2^3$ = 8 možností

nebo

$V_2^*(2) = 2^2$ = 4 možnosti nebo $V_1^*(2) = 2^1$ = 2 možnosti

Kombinatorika

Variace s opakováním*

Záleží nám na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

$$V_k^*(n) = n^k$$

Příklad 1: Kolik je všech pěticiferných čísel?

$V_5^*(10) = 10^5$ možností

bez čísel začínajících nulou, tj. $V_4^*(10) = 10^4$ možností

Celkem $10^5 - 10^4$ = 90 000 možností.

Příklad 2: . Kolik teoreticky můžeme sestavit různých značek v Morseovou abecedou, jestliže budeme sestavovat tečky a čárky do sestav o jednom až pěti znacích?

$V_5^*(2) = 2^5$ = 32 možností

nebo

$V_4^*(2) = 2^4$ = 16 možností nebo $V_3^*(2) = 2^3$ = 8 možností

nebo

$V_2^*(2) = 2^2$ = 4 možnosti nebo $V_1^*(2) = 2^1$ = 2 možnosti

Celkem 62 možností

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{n}) = \binom{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-1}{\boldsymbol{k}}$$

Kombinatorika

$\boxed{\text{Kombinace s opakováním*}}$ = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{n}) = \binom{\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k} - 1}{\boldsymbol{k}}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_{k}^{*}(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
X X			{1,1}	1

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(\boldsymbol{n}) = \binom{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-1}{\boldsymbol{k}}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
X X			{1,1}	1
	X X		{2,2}	2

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
X X			{1,1}	1
	X X		{2,2}	2
		X X	{3,3}	3

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
X X			{1,1}	1
	X X		{2,2}	2
		X X	{3,3}	3
X	X		{1,2}	4

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
X X			{1,1}	1
	X X		{2,2}	2
		X X	{3,3}	3
X	X		{1,2}	4
X		X	{1,3}	5

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
x x			{1,1}	1
	x x		{2,2}	2
		x x	{3,3}	3
x	x		{1,2}	4
x		x	{1,3}	5
	x	x	{2,3}	6

Kombinatorika

$\boxed{\text{Kombinace s opakováním*}}$ = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(\boldsymbol{n}) = \binom{\boldsymbol{n} + \boldsymbol{k} - 1}{\boldsymbol{k}}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
x x			{1,1}	1
	x x		{2,2}	2
		x x	{3,3}	3
x	x		{1,2}	4
x		x	{1,3}	5
	x	x	{2,3}	6

Řešení: Vybíráme čísla přihrádek pro dva dopisy. Pořadí vhození dopisů není podstatné. Hledáme $C_2^*(3)$, tj. $C_{2\ dopisy}^*(3\text{ přihrádky})$

Jde o počet neuspořádaných dvojic (k =2) ze **3** prvků (***n*=3**), přičemž prvky (čísla přihrádek) se mohou opakovat.

Kombinatorika

Kombinace s opakováním* = **Nezáleží-li nám na pořadí** ve výběru k prvků z n -členné množiny a navíc se **každý** prvek může ve výběru vyskytovat **libovolně-krát**

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad: Kolik je možností rozdělit 2 dopisy do 3 přihrádek?

1. přihrádka	2. přihrádka	3. přihrádka		
x x			{1,1}	1
	x x		{2,2}	2
		x x	{3,3}	3
x	x		{1,2}	4
x		x	{1,3}	5
	x	x	{2,3}	6

Řešení: Vybíráme čísla přihrádek pro dva dopisy. Pořadí vhození dopisů není podstatné.

Hledáme $C_2^*(3)$, tj. $C^*_{2\ dopisy}(3\ \text{přihrádky})$

Jde o počet neuspořádaných dvojic (k =2) ze **3** prvků (n=**3**), přičemž prvky (čísla přihrádek) se mohou opakovat.

$$C_2^*(3) = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}$$

$= 6$

Kombinatorika

$$C_k^*(n) = \binom{n + k - 1}{k}$$

Kombinace s opakováním* = Nezáleží na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

Příklad 1: V obchodě mají 3 druhy bonbónů v sáčcích po 100g? Kolika způsoby může zákazník koupit 1kg bonbónů?

Příklad 2: V knihkupectví mají 10 titulů knižních novinek.
Kolika způsoby lze koupit

a) 4 knižní novinky?

b) 5 různých knižních novinek?

Kombinatorika

$$C_k^*(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Kombinace s opakováním* = Nezáleží na pořadí, prvky ve výběru se mohou opakovat

Příklad 1: V obchodě mají 3 druhy bonbónů v sáčcích po 100g? Kolika způsoby může zákazník koupit 1kg bonbónů?

$$C_{10}^*(3) = \binom{3+10-1}{10} = 66 \text{ možností}$$

Příklad 2: V knihkupectví mají 10 titulů knižních novinek. Kolika způsoby lze koupit

a) 4 knižní novinky?

$$C_4^*(10) = \binom{10+4-1}{4} = 715 \text{ možností}$$

b) 5 různých knižních novinek?

$$C_5(10) = \binom{10}{5} = 252 \text{ možností}$$

Pravidlo součinu

$\cdot$

a zároveň

Kombinatorika

Celkové shrnutí

Pravidlo součtu

$+$

NEBO

Permutace! záleží na pořadí, vybíráme $\boldsymbol{n}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ prvků

bez opakování $\boldsymbol{P(n) = n!}$

včetně opakování $\boldsymbol{P^*_{n_1 n_2 \dots}(n) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \, \cdots}}$

Variace záleží na pořadí, vybíráme $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ prvků, $\boldsymbol{k \leq n}$

bez opakování $V_k(\boldsymbol{n}) = \dfrac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$

včetně opakování $V^*_k(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n}^k$

Kombinace nezáleží na pořadí, vybíráme $\boldsymbol{k}$ prvků z $\boldsymbol{n}$ prvků,

bez opakování $C_k(\boldsymbol{n}) = \dbinom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \dfrac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}! \cdot (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$

včetně opakování $C^*_k(\boldsymbol{n}) = \dbinom{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-1}{\boldsymbol{k}}$

Kombinatorika opakování

Příklad 1: Deset přátel si vzájemně poslalo pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic celkem rozeslali?

Příklad 2: V plně obsazené lavici sedí 6 žáků a, b, c, d, e, f.

a) Kolika způsoby je lze přesadit?

b) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žáci a, b seděli vedle sebe?

c) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji?

d) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji a žáci a, b seděli vedle sebe?

Příklad 3: Student má v knihovně 4 různé učebnice ekonomie, 3 různé učebnice matematiky a 2 různé učebnice angličtiny. Kolika způsoby je lze seřadit, mají-li zůstat učebnice jednotlivých oborů vedle sebe?

Příklad 4: Četa vojáků má vyslat na stráž 4 muže. Kolik mužů má četa, je-li možno úkol splnit 210 způsoby?

Příklad 5: V zásobníku je 7 ostrých a 3 slepé náboje. Určete, kolika způsoby lze namátkou ze zásobníku vyjmout 5 nábojů, z nichž alespoň 3 jsou ostré.

Kombinatorika opakování

Příklad 1: Deset přátel si vzájemně poslalo pohlednice z prázdnin. Kolik pohlednic celkem rozeslali?

$$C_2(10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!} = 90 \text{ pohlednic}$$

Příklad 2: V plně obsazené lavici sedí 6 žáků a, b, c, d, e, f.

a) Kolika způsoby je lze přesadit? $P(6) = 6! = 720$ způsobů

b) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žáci a, b seděli vedle sebe? $P(2) \cdot P(5) = 2! \cdot 5! = 240$ způsobů

c) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji? $2 \cdot P(5) = 2 \cdot 5! = 240$ způsobů

d) Kolika způsoby je lze přesadit tak, aby žák c seděl na kraji a žáci a, b seděli vedle sebe?

$$2 \cdot P(4) \cdot P(2) = 2 \cdot 4! \cdot 2! = 96 \text{ způsobů}$$

Příklad 3: Student má v knihovně 4 různé učebnice ekonomie, 3 různé učebnice matematiky a 2 různé učebnice angličtiny. Kolika způsoby je lze seřadit, mají-li zůstat učebnice jednotlivých oborů vedle sebe?

$$3! \cdot \big(P(4) \cdot P(3) \cdot P(2)\big) = 3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 1\,728 \text{ způsobů}$$

Příklad 4: Četa vojáků má vyslat na stráž 4 muže. Kolik mužů má četa, je-li možno úkol splnit 210 způsoby?

$$\binom{počet\ mužů}{4} = 210 \text{ způsobů}$$

Příklad 5: V zásobníku je 7 ostrých a 3 slepé náboje. Určete, kolika způsoby lze namátkou ze zásobníku vyjmout 5 nábojů, z nichž alespoň 3 jsou ostré.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{3ostr. a 2sl.} & C_3(7) \cdot C_2(3) \\ \text{4ostr. a 1sl.} & C_4(7) \cdot C_1(3) \\ \text{5ostr. a 0sl.} & C_5(7) \cdot C_0(3) \end{array}\right\} \quad 231 \text{ způsobů}$$