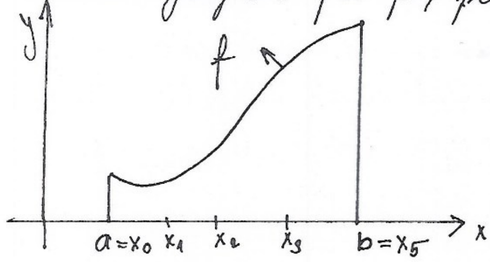
Riemannův určitý integrál.

Uvažujme nejprve spojitou nezápornou fci $y = f(x)$ definovanou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.

Mějme tento úkol: Určeme obsah P rovinného obrazce omezeného grafem fce f, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x.



Určujeme obsah křivočarého lichoběžníka $\{[x,y] \in R^2;\ x \in \langle a,b\rangle,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

Rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ dělicími body x_i, $i = 1, 2, \dots, n$ tak, že

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (1)$$

Def. Každou posloupnost tvaru (1) nazveme dělením D_n intervalu $\langle a, b\rangle$.

x_i jsou dělicí body, $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je i-tý dělicí interval, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ je délka i-tého dělicího intervalu

$\delta(D_n)$ je norma dělení a je to délka největšího z dělicích intervalů dělení D_n.

Dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ je možné volit různými způsoby, existuje tedy nekonečně mnoho dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

Předpokládejme, že $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nějaká posloupnost dělení.

Def. Řekneme, že posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je <u>normální</u>, když pro normy dělení platí

$$\lim_{n\to\infty} \delta(D_n) = 0.$$

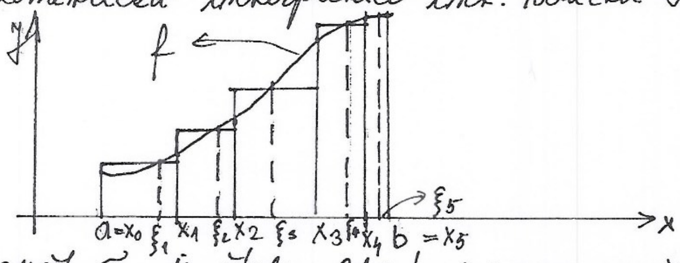
Vyberme v každém dělicím intervalu libovolný bod ξ_i, tedy $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$.

Utvořme součet

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

To je tzv. integrální součet.

Geometrická interpretace int. součtu σ_n:



Součet σ_n je číslo, které je rovno součtu obsahů obdélníků o stranách $f(\xi_i)$ a Δx_i.
σ_n je obsah „stupňovitého" mnohoúhelníka.
Je zřejmé, že čím bude bodů x_i více (tj. $n \to \infty$) a přitom norma $\delta(D_n) \to 0$, tím lépe (přesněji) bude součet σ_n aproximovat obsah zadaného obrazce.

Poznámka: Výše uvedené úvahy lze provést i v tom případě, že fce f není spojitá, ale je omezená a definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a také v tom případě, kdy fce f nabývá na $\langle a,b\rangle$ jak kladných tak i záporných hodnot.

Limitujeme-li int. součet σ_n pro $n \to \infty$ a $\delta(D_n) \to 0$, pak „stupňovitý" mnohoúhelník se „blíží" křivočarému lichoběžníku a limita integrálního součtu definuje obsah P tohoto křivočarého lichoběžníka.

Def (určitého integrálu) Nechť fce f je omezená na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Jestliže posloupnost $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ integrálních součtů příslušná k libovolné normální posloupnosti dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ je konvergentní, a to vždy k téže limitě $\lim_{n \to \infty} \sigma_n$ nezávisle na volbě dělících bodů x_i a bodů ξ_i, pak tuto limitu nazýváme Riemannovým určitým integrálem funkce f od a do b a píšeme

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Číslo a se nazývá dolní a číslo b horní mez určitého integrálu, interval $\langle a,b\rangle$ je integrační obor.

Poznámky: - Znak $\int$ má původ (připomínat) znak Σ.

- Existuje-li $\int_a^b f(x)\,dx$, pak se fce f nazývá integrovatelná (integrabilní, integrace schopná) na intervalu $\langle a,b\rangle$ podle Riemanna. Říkáme také, že má Riemannův integrál, někdy píšeme $R-\int_a^b f(x)\,dx$.
- Je zřejmé, že označíme-li integrační proměnnou jiným písmenem (t, s, apod.) neovlivní tato změna existenci či hodnotu určitého integrálu.

Je tedy $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds$

Geometrická interpretace určitého integrálu.

Je-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a,b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,dx$ je obsah rovinného obrazce omezeného grafem fce f (křivkou $y = f(x)$), přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x.

Tedy $\int_a^b f(x)\,dx$ je roven obsahu P křivočarého lichoběžníka: $\{[x,y] \in R^2;\ x \in \langle a,b\rangle,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Píšeme: $P = \int_a^b f(x)\,dx$.

Kdy má fce R-integrál?

Věta Je-li fce omezená a spojitá na $\langle a,b\rangle$ všude, až na konečný počet bodů, pak má na $\langle a,b\rangle$ R-integrál.

Důsledek: Je-li fce spojitá na uzavřeném intervalu, pak má na tomto intervalu R-integrál.

Důsledek: Elementární fce mají na každém $\langle a,b\rangle \subset D(f)$ R-integrál. (Důvod - el. fce jsou spojité na svém $D(f)$)

Uvědom si!

Neurčitý integrál $\int f(x)\,dx$ je množina primitivních fcí $F(x)+C$, pro něž platí $F'(x)=f(x)$.

Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, pokud existuje, je číslo z R.

V definici R-integrálu jsme předpokládali, že $a<b$. Můžeme se však setkat i s úlohami, kde $b<a$ nebo $b=a$. Protože integrální součty mají smysl i v tomto případě, rozšíříme definici R-integrálu následovně:

Definice Nechť $a=b$, f je libovolná fce. Potom

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Nechť $a>b$ a integrál $\int_b^a f(x)\,dx$ existuje. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Poznámka: - Je-li $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$, pak $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

- Vyměníme-li v integrálu meze, změní integrál znaménko.

Vlastnosti určitého integrálu.

Věta Nechť fce f, g, h, k mají R-integrál na $\langle a,b\rangle$ a nechť $f(x) \leqq h(x)$, $k(x) \geqq 0$ na $\langle a,b\rangle$.

Potom:

1. Funkce $f \pm g$ má R-integrál na $\langle a,b\rangle$ a platí

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(Integrál ze součtu / rozdílu se rovná součtu / rozdílu integrálů)

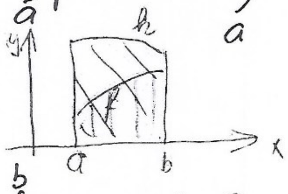
2. Fce $c \cdot f$ má R-integrál na $\langle a,b\rangle$ pro $\forall c \in R$ a platí

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

(Konstantu lze vytknout před integrační znak.)
(1 a 2 je tzv. linearita integrálu)

3. Fce $f \cdot g$ má R-integrál na $\langle a,b\rangle$
počítá se metodou per partes nebo substitucí

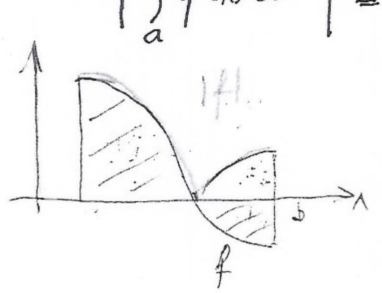
4. $$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b h(x)\,dx$$ (monotonie integrálů)



5. $$\int_a^b k(x)\,dx \geqq 0$$ (nezápornost integrálu)

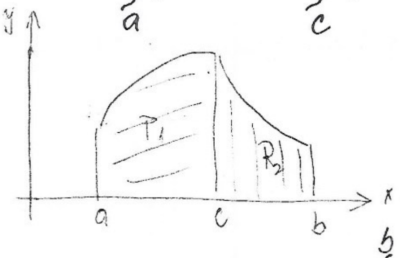
6. Fce $|f|$ má R-integrál na $\langle a,b\rangle$ a platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$



7. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, $c \in (a,b)$

(aditivita integrálu)



8. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\qquad \int_a^b 0 \cdot dx = 0$

9. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(Vyměníme-li v integrálu meze, změní integrál znaménko.)

Poznámky:

- Vlastnosti 1–3 jsme uvedli již u neurčitých integrálů; vlastnosti 1–3 mají totiž neurčité i určité integrály.
- Vzhledem k tomu, že určité integrály jsou čísla, můžeme hovořit o monotonii integrálů, nerovnosti apod.
- Tvrzení 7 zůstává pravdivým pro libovolnou polohu bodů a, b, c, pokud leží v intervalu, na němž je fce integrovatelná.
  Např. leží-li b mezi a, c, pak $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$. Odtud
  $\int_a^b = \int_a^c - \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b$
- Je-li f sudá na $\langle -a, a\rangle$, tj. platí $f(-x) = f(x)$ pro $\forall x \in \langle -a, a\rangle$, pak $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
  Je-li f lichá na $\langle -a, a\rangle$, tj. platí $f(-x) = -f(x)$ pro $\forall x \in \langle -a, a\rangle$, pak $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

Výpočet určitých integrálů

Věta Leibniz–Newtonova formule (základní věta integrálního počtu)

Je-li F libovolná primitivní fce k fci f spojité na $\langle a, b\rangle$, $a < b$ pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Hodnotu určitého integrálu spočteme tedy takto: Určíme primitivní fci F k fci f, dosadíme do ní za x nejprve horní mez b, potom dolní mez a a obě hodnoty F(b) a F(a) od sebe odečteme.

Výpočet se zpravidla zapisuje takto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Pokud neumíme určit primitivní fci přímo, můžeme užít metodu per partes nebo substituční metodu.

Věta Metoda per partes pro určité integrály

Nechť fce $u(x)$ a $v(x)$ mají na $\langle a, b\rangle$ spojité derivace $u'(x)$ a $v'(x)$. Potom platí:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Věta Substituční metoda pro určité integrály

Nechť 1) fce $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)$ jsou spojité na $\langle \alpha, \beta\rangle$,

2) fce f je spojitá pro všechny hodnoty, kterých fce $x = \varphi(t)$ nabývá na $\langle \alpha, \beta\rangle$,

3) $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Pak platí:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Aplikace integrálního počtu.

Určitý integrál je důležitým nástrojem k technickým výpočtům. Ostatně, k tomto účelům byl konstruován. Určitý integrál využíváme při řešení úloh v geometrii a také při výpočtech ve fyzice, např. při určování souřadnic těžiště, při výpočtu statických momentů atd., a také nachází uplatnění ve statistice.

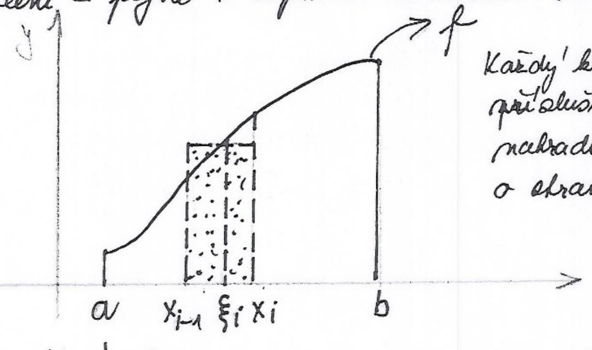
Geometrické aplikace určitého integrálu.

1. Obsah rovinného obrazce.

Věta Je-li fce f spojitá a nezáporná na $\langle a,b\rangle$, pak obsah P rovinného obrazce omezeného grafem fce (křivkou) $y=f(x)$, přímkami $x=a$, $x=b$ a osou x je dán vzorcem

$$P=\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^b y\,dx$$

Vysvětlení – plyne z definice určitého integrálu.



Každý křivočarý lichoběžník příslušný intervalu Δx_i nahradíme obdélníkem o stranách $f(\xi_i)$ a Δx_i.

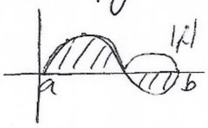
Zvolíme dělení $\langle a,b\rangle$: $a=x_0<x_1<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_n=b$.
v každém $\langle x_{i-1},x_i\rangle$ zvolíme lib. bod ξ_i a určíme tzv. element obsahu $dP=f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$

Utvoříme součet obsahů všech těchto obdélníků

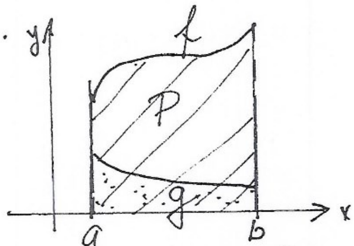
$$P_1=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

P_1 je obsah stupňovitého lichoběžníka ($P_1 \doteq P$)
Protože fce f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ existuje limita součtu P_1 pro $n \to \infty$ a $\delta(D) \to 0$ a rovná se určitému integrálu, který určuje obsah P.

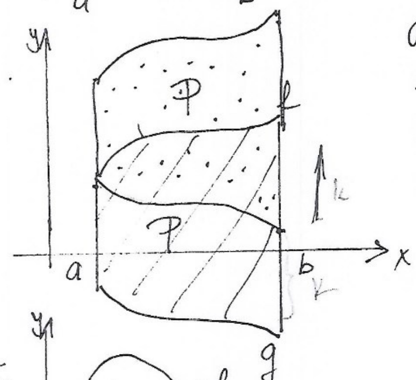
Poznámky: k obsahům

1. Mění-li fce f na $\langle a,b\rangle$ znaménko, je obsah P rovinného obrazce
$$P = \int_a^b |f(x)|\,dx$$


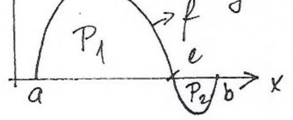
2. Je-li $f(x) \leqq 0$ na $\langle a,b\rangle$ je
$$P = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \text{ nebo } P = -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$$

3. 

$$P = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

4. 

Posuneme obrazec o hodnotu $k>0$ tak, aby byl celý obrazec nad osou x.
Potom
$$P = \int_a^b (f(x)+k)\,dx - \int_a^b (g(x)+k)\,dx = \text{(linearita integrálu)}$$
$$= \int_a^b (f(x)+k-g(x)-k)\,dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

5. 

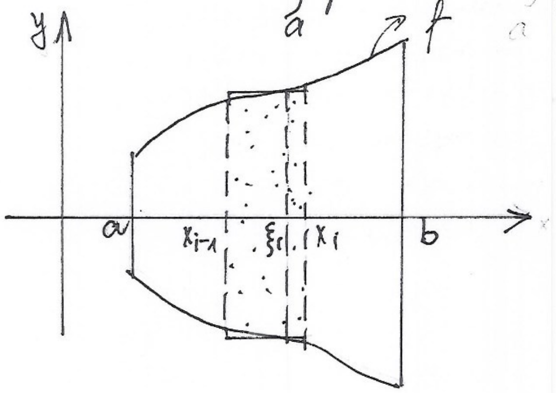
$$P = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \text{ nebo } P = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

6. Rozlišuj mezi hodnotou určitého integrálu a jeho geom. aplikací.
Hodnota určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ obecně nevyjadřuje obsah rovinného obrazce (vyjadřuje ho pouze v případě, že $f(x) \geq 0$ pro $\forall x \in \langle a,b\rangle$)

2. Objem rotačního tělesa.

Věta Je-li f spojitá a nezáporná na $\langle a,b\rangle$, pak objem V rotačního tělesa vzniklého rotací rovinného obrazce omezeného křivkou $y=f(x)$ a přímkami $x=a$, $x=b$ a $y=0$ kolem osy x je dán vzorcem

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. = \pi\int_a^b y^2\,dx$$



Každou část rotačního tělesa mezi rovinami x_{i-1} a x_i nahradíme rotačním válcem o poloměru podstavy $f(\xi_i)$ a výšce Δx_i

Vysvětlení: Zvolíme dělení $a=x_0<x_1<\dots<x_{i-1}<x_i<\dots<x_n=b$, libovolný bod $\xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$.

Element objemu $dV=\pi\cdot f^2(\xi_i)\,\Delta x_i$ – objem válce ($V=\pi r^2 v$) o poloměru podstavy $f(\xi_i)$ a výšce Δx_i.

Utvoříme součet objemů všech válců

$$V_1=\sum_{i=1}^{n}\pi f^2(\xi_i)\,\Delta x_i$$

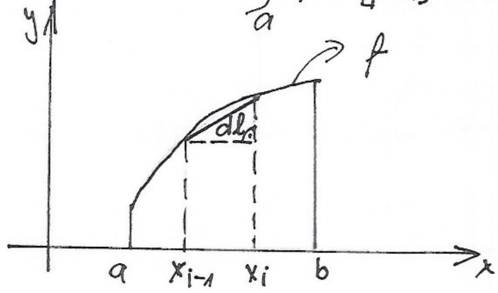
V_1 je objem „stupňovitého" tělesa, $V_1 \doteq V$.

Limitním přechodem pro $n\to\infty$ při $\sigma(D)\to 0$ obdržíme určitý integrál, který udává objem V.

3. Délka rovinné křivky.

Věta Délka l oblouku grafu spojité a hladké fce $y = f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ je dána vzorcem

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$



Část oblouku příslušnou intervalu Δx_i nahradíme tětivou dl (přeponou pravoúhlého trojúhelníka).

$$l = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Vysvětlení: Zvolíme dělení $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.

Element délky $dl = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$

Užijeme Lagrangeovu větu $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$,

potom $dl = \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$

Utvoříme součet délek všech úseček

$$l_1 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i$$

l_1 je délka lomené čáry, $l_1 \doteq l$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ při $\sigma(D) \to 0$ obdržíme určitý integrál, který udává délku l grafu fce.

4. Obsah rotační plochy (obsah pláště rotačního tělesa)

Věta Obsah S rotační plochy, která vznikne rotací spojité, hladké a nezáporné fce na $\langle a, b\rangle$ kolem osy x je dán vzorcem

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Poznámka: Hladká fce má v každém bodě derivaci.