Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s.

INTEGRÁLNÍ POČET

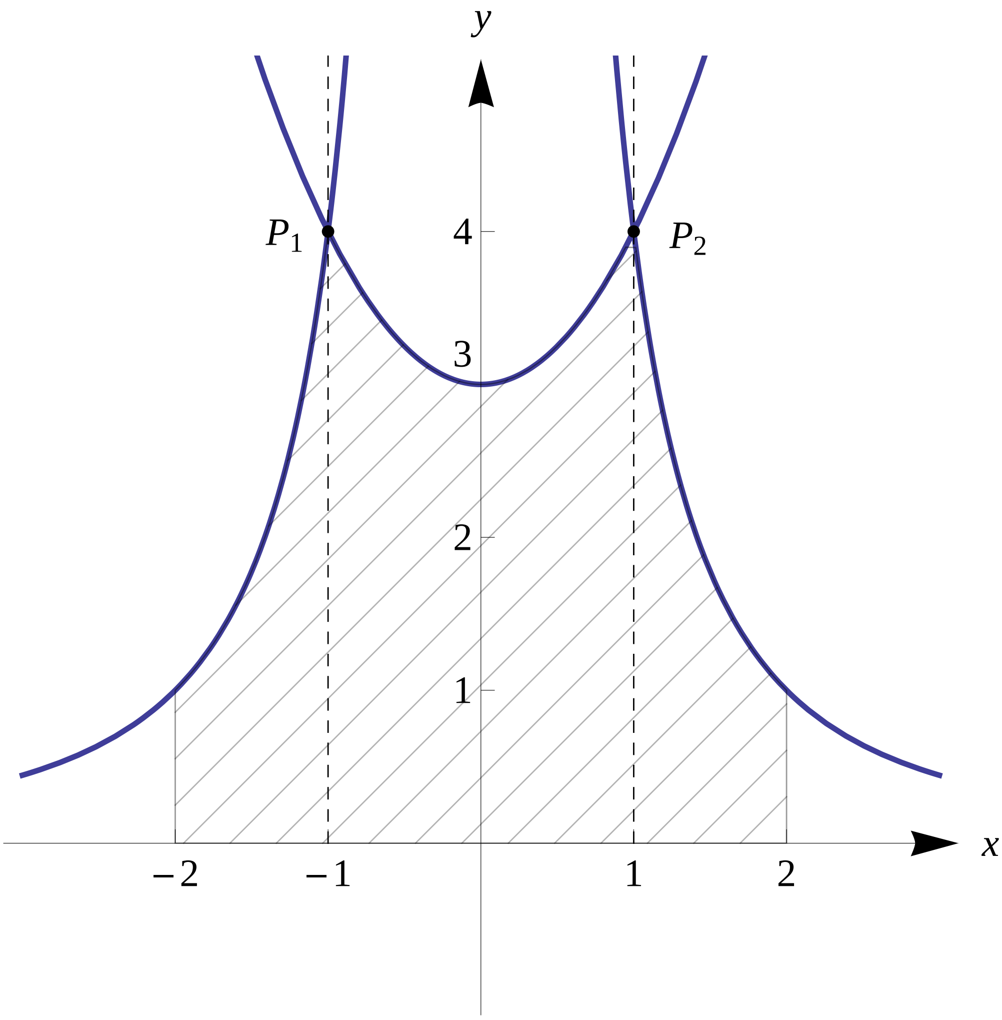
RNDr. Vladimíra Mádrová, CSc.
RNDr. Vratislava Mošová, CSc.

© Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s.
Autor: RNDr. Vladimíra Mádrová, CSc.
RNDr. Vratislava Mošová, CSc.
Recenzoval: Prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.
Olomouc
978-1-56619-909-4

INTEGRÁLNÍ POČET

Řešené příklady

- Neurčitý integrál
- Určitý integrál
- Aplikace integrálního počtu



Předmluva

Skripta „Integrální počet“ jsou určena studentům prezenční i kombinované formy studia na Moravské vysoké škole Olomouc, mohou však posloužit všem studentům v jejichž učebních plánech je zahrnuta matematická analýza. Předpokladem efektivního využití skript je všeobecný matematický přehled a alespoň základní znalost diferenciálního počtu.
Skripta jsou rozčleněna do tří kapitol, které na sebe logicky navazují. Každá kapitola obsahuje sadu řešených příkladů, na nichž je názorně ilustrován postup výpočtu základních typových úloh a jsou uvedeny matematické obraty, které se při řešení nejčastěji užívají. Celkem je ve skriptech vyřešeno 130 příkladů. Příklady jsou číslovány v každé kapitole zvlášť, první číslo označuje kapitolu. Pro lepší orientaci je konec příkladu označen symbolem ■.
Uvědomte si, že řešené příklady nelze jen pouze číst, nýbrž je nutné podrobně je propočítat a porozumět jim. Podrobné prostudování a pochopení postupu řešení typových úloh vede k osvojení důležitých návyků a ke zvýšení počtářské dovednosti a zručnosti, které jsou nezbytné k dosažení správných výsledků.
Aby studium bylo dostatečně efektivní doporučujeme:

- zopakovat základní poznatky
- samostatně propočítat co nejvíce příkladů

Zdůrazňujeme, že nejcennější je samostatná práce čtenáře.
Málo chyb, vytrvalost a hodně tvůrčí zábavy

přejí autorky

Poděkování

Vřele a upřímně děkujeme recenzentce Prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. z PřF UP Olomouc, jejíž cenné rady přispěly ke zkvalitnění těchto skript.
Je nám milou povinností poděkovat panu Martinu Cvešprovi za vyhotovení obrázků, pečlivé přepsání a celkovou úpravu textu.

autorky

Obsah

1 Neurčitý integrál

Pro přípustná $x \in R$ vypočítejte neurčité integrály.

Tabulkové integrály a linearita integrálu

Příklad 1.1 $\displaystyle\int \left(x^3 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} + 3\right)\, \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \left(x^3 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} + 3\right)\, \mathrm{d}x = \int \left(x^3 - x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} + x^{-3} + 3\right)\, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \frac{x^{-2}}{-2} + 3x + c = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2x^2} + 3x + c$$

■

Příklad 1.2 $\displaystyle\int \frac{2x^5 - 4x + 7}{x}\, \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{2x^5 - 4x + 7}{x}\, \mathrm{d}x = 2\int \frac{x^5}{x}\, \mathrm{d}x - 4\int \frac{x}{x}\, \mathrm{d}x + 7\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = 2\int x^4\, \mathrm{d}x - 4\int 1\, \mathrm{d}x + 7\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x =$$
$$= 2\frac{x^5}{5} - 4x + 7\ln|x| + c$$

■

Příklad 1.3 $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 3\sqrt[4]{x} + 2}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{2x^3 + 3\sqrt[4]{x} + 2}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \int \left(2x^{\frac{5}{2}} + 3x^{-\frac{1}{4}} + 2x^{-\frac{1}{2}}\right)\, \mathrm{d}x = 2\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 3\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$$
$$= \frac{4}{7}\sqrt{x^7} + 4\sqrt[4]{x^3} + 4\sqrt{x} + c$$

■

Příklad 1.4 $\displaystyle\int (2^x - 5e^x)\, \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (2^x - 5e^x)\, \mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} - 5e^x + c$$

■

Příklad 1.5 $\displaystyle\int \frac{4 - \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}}\, \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{4 - \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}}\, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{4}{\sqrt{4 - x^2}} - 1\right)\, \mathrm{d}x = 4\arcsin\frac{x}{2} - x + c$$

■

Příklad 1.6 $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x}\right)\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x}\right)\,\mathrm{d}x = -3\operatorname{cotg} x + 2\operatorname{tg} x + c$$

■

Příklad 1.7 $\displaystyle\int 3e^x\left(2 - e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int 3e^x\left(2 - e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(6e^x - 3e^0\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(6e^x - 3\right)\,\mathrm{d}x = 6e^x - 3x + c$$

■

Příklad 1.8 $\displaystyle\int \left(2x^2 - 3\right)^2\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \left(2x^2 - 3\right)^2\,\mathrm{d}x = \int \left(4x^4 - 12x^2 + 9\right)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 9x + c$$

■

Příklad 1.9 $\displaystyle\int \left[(\pi+1)x^\pi - \frac{1-e}{x^e}\right]\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \left[(\pi+1)x^\pi - \frac{1-e}{x^e}\right]\,\mathrm{d}x = \int \left[(\pi+1)x^\pi - (1-e)x^{-e}\right]\,\mathrm{d}x =$$

$$= (\pi+1)\cdot\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} - (1-e)\frac{x^{-e+1}}{-e+1} + c = x^{\pi+1} - x^{1-e} + c$$

■

Příklad 1.10 $\displaystyle\int \left(\frac{4}{\sqrt{6-x^2}} - \frac{3}{2+x^2}\right)\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \left(\frac{4}{\sqrt{6-x^2}} - \frac{3}{2+x^2}\right)\,\mathrm{d}x = 4\arcsin\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

■

Příklad 1.11 $\displaystyle\int \frac{3\sin^2 x - 8\cos^2 x}{4\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{3\sin^2 x - 8\cos^2 x}{4\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \frac{8}{4}\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - 2\int 1\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{4}\int 1\,\mathrm{d}x - 2\int 1\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\operatorname{tg} x - \frac{3}{4}x - 2x + c = \frac{3}{4}\operatorname{tg} - \frac{11}{4}x + c$$

■

Příklad 1.12 $\displaystyle\int \frac{x^2-6}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{x^2-6}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+4-4-6}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x^2+4}{x^2+4} - \frac{10}{x^2+4}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{10}{x^2+4}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= x - 10\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c = x - 5\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c$$

■

Metoda per partes

Příklad 1.13 $\displaystyle\int (3-2x)\,e^x\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (3-2x)\,e^x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = 3-2x & v' = e^x \\ u' = -2 & v = e^x \end{vmatrix} = (3-2x)e^x - \int -2e^x\,\mathrm{d}x = (3-2x)e^x + 2\int e^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= (3-2x)e^x + 2e^x + c = (5-2x)e^x + c$$

■

Příklad 1.14 $\displaystyle\int \left(2+\frac{3x}{4}\right)\cos x\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \left(2+\frac{3x}{4}\right)\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = 2+\frac{3x}{4} & v' = \cos x \\ u' = \frac{3}{4} & v = \sin x \end{vmatrix} = \left(2+\frac{3x}{4}\right)\sin x - \frac{3}{4}\int \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(2+\frac{3x}{4}\right)\sin x - \frac{3}{4}\cdot(-\cos x) + c = \left(2+\frac{3x}{4}\right)\sin x + \frac{3}{4}\cos x + c$$

■

Příklad 1.15 $\displaystyle\int (3x-7)\ln x\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (3x-7)\ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 3x-7 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{3x^2}{2} - 7x \end{vmatrix} = \left(\frac{3x^2}{2} - 7x\right)\cdot\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3x^2}{2} - 7x\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{3x^2}{2} - 7x\right)\cdot\ln x - \int \left(\frac{3x}{2} - 7\right)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{3x^2}{2} - 7x\right)\ln x - \frac{3x^2}{4} + 7x + c$$

■

Příklad 1.16 $\displaystyle\int (3x^2+5)\ln x\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (3x^2+5)\ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 3x^2+5 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x^3+5x \end{vmatrix} = (x^3+5x)\ln x - \int \frac{1}{x}(x^3+5x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= (x^3+5x)\ln x - \int (x^2+5)\,\mathrm{d}x = (x^3+5x)\ln x - \frac{x^3}{3} - 5x + c$$

■

Příklad 1.17 $\displaystyle\int (x^2+5x-7)e^x \, \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (x^2+5x-7)e^x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2+5x-7 & v' = e^x \\ u' = 2x+5 & v = e^x \end{array} \right| = (x^2+5x-7)e^x - \int (2x+5)\cdot e^x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2x+5 & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{array} \right| = (x^2+5x-7)e^x - \left[(2x+5)e^x - \int 2e^x \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= (x^2+5x-7)e^x - (2x+5)e^x + 2e^x + c = (x^2+3x-10)e^x + c$$

■

Příklad 1.18 $\displaystyle\int \left(6-3x-\frac{x^2}{2}\right) \sin x \, \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \left(6-3x-\frac{x^2}{2}\right) \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = 6-3x-\frac{x^2}{2} & v' = \sin x \\ u' = -3-x & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= \left(6-3x-\frac{x^2}{2}\right) \cdot (-\cos x) - \int -(3+x)\cdot(-\cos x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left(6-3x-\frac{x^2}{2}\right) \cdot (-\cos x) - \int (3+x)\cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = 3+x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+3x-6\right) \cdot \cos x - \left[(3+x)\sin x - \int 1\cdot \sin x \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+3x-6\right) \cdot \cos x - (3+x)\sin x + \int \sin x \, \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+3x-6\right) \cdot \cos x - (3+x)\sin x - \cos x + c = \left(\frac{x^2}{2}+3x-7\right) \cos x - (3+x)\sin x + c$$

■

Příklad 1.19 $\displaystyle\int (6x-5)\ln^2 x \, \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (6x-5)\ln^2 x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & v' = 6x-5 \\ u' = \frac{2}{x}\ln x & v = \frac{6x^2}{2} - 5x \end{array} \right| = (3x^2-5x)\ln^2 x - 2\int \ln x \cdot \frac{1}{x}(3x^2-5x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= (3x^2-5x)\ln^2 x - 2\int (3x-5)\ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 3x-5 \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{3x^2}{2} - 5x \end{array} \right| =$$

$$= (3x^2-5x)\ln^2 x - 2\left[\left(\frac{3x^2}{2} - 5x\right)\ln x - \int \frac{1}{x}\left(\frac{3x^2}{2}-5x\right) \, \mathrm{d}x \right] =$$

$$= (3x^2 - 5x)\ln^2 x - 2\left(\frac{3x^2}{2} - 5x\right)\ln x + 2\int\left(\frac{3x}{2} - 5\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= (3x^2 - 5x)\ln^2 x - (3x^2 - 10x)\ln x + 2\left(\frac{3x^2}{4} - 5x\right) + c =$$

$$= (3x^2 - 5x)\ln^2 x + (10x - 3x^2)\ln x + \frac{3x^2}{2} - 10x + c$$

$\blacksquare$

Substituční metoda

Příklad 1.20 $\displaystyle\int 2xe^{2-x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int 2xe^{2-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} 2 - x^2 = u \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ 2x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u \end{array}\right| = \int e^u \cdot (-\mathrm{d}u) = -\int e^u\,\mathrm{d}u = -e^u + c = -e^{2-x^2} + c$$

$\blacksquare$

Příklad 1.21 $\displaystyle\int \frac{x^2}{2}\left(5 + 2x^3\right)^4\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{x^2}{2}\left(5 + 2x^3\right)^4\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} 5 + 2x^3 = u \\ 6x^2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ x^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{6} \end{array}\right| = \int \frac{1}{2}u^4\frac{\mathrm{d}u}{6} = \frac{1}{12}\int u^4\,\mathrm{d}u = \frac{1}{12}\frac{u^5}{5}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{60}\left(5 + 2x^3\right)^5 + c$$

$\blacksquare$

Příklad 1.22 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{\left(2 - x^2\right)^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{\left(2 - x^2\right)^2}}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} 2 - x^2 = u \\ -2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ x\,\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}u}{2} \end{array}\right| = \int \frac{\frac{-\mathrm{d}u}{2}}{\sqrt[3]{u^2}} = \frac{-1}{2}\int u^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}u = \frac{-1}{2}\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{u} + c =$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2 - x^2} + c$$

$\blacksquare$

Příklad 1.23 $\displaystyle\int \sin x \cdot \sqrt{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \sin x \cdot \sqrt{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} \cos x = u \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u \end{array}\right| = \int \sqrt{u^3} \cdot (-\mathrm{d}u) = -\int u^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}u = -\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c =$$

$$= -\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + c$$

$\blacksquare$

Příklad 1.24 $\displaystyle\int \frac{2\operatorname{cotg} x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{2\operatorname{cotg} x}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \operatorname{cotg} x = u \\ -\frac{1}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \frac{1}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}u \end{array} \right| = 2\int u\,(-\mathrm{d}u) = -2\frac{u^2}{2} + c = -\operatorname{cotg}^2 x + c$$

■

Příklad 1.25 $\displaystyle\int \frac{5}{x\ln^2 x}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{5}{x\ln^2 x}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = 5\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 5\int u^{-2}\ \mathrm{d}u = 5\frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{-5}{u} + c = \frac{-5}{\ln x} + c$$

■

Příklad 1.26 $\displaystyle\int \frac{3e^x}{2+5e^x}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{3e^x}{2+5e^x}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 2+5e^x = u \\ 5e^x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ e^x\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{5} \end{array} \right| = 3\int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{5}}{u} = \frac{3}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{3}{5}\ln|u| + c = \frac{3}{5}\ln\left(2+5e^x\right) + c$$

■

Příklad 1.27 $\displaystyle\int 5x\cos\left(\frac{3x^2}{4}+5\right)\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int 5x\cos\left(\frac{3x^2}{4}+5\right)\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \frac{3x^2}{4}+5 = u \\ \frac{6x}{4}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ x\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ \mathrm{d}u \end{array} \right| = 5\cdot\frac{2}{3}\int \cos u\ \mathrm{d}u = \frac{10}{3}\sin u + c = \frac{10}{3}\sin\left(\frac{3x^2}{4}+5\right) + c$$

■

Příklad 1.28 $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = u \\ \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int u^2\ \mathrm{d}u = \frac{u^3}{3} + c = \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} x\right)^3 + c$$

■

Příklad 1.29 $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\cos^2\left(3+x^3\right)}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{2x^2}{\cos^2\left(3+x^3\right)}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 3+x^3 = u \\ 3x^2\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ \mathrm{d}u \end{array} \right| = 2\cdot\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \frac{2}{3}\operatorname{tg} u + c = \frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(3+x^3\right) + c$$

■

Příklad 1.30 $\displaystyle\int e^{2\cos x}\sin x\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int e^{2\cos x}\sin x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 2\cos x = u \\ -2\sin x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \sin x\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ \mathrm{d}u \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int e^u\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}e^u + c = -\frac{1}{2}e^{2\cos x} + c$$

■

Příklad 1.31 $\displaystyle\int \frac{2\sin x}{1-4\cos x}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{2\sin x}{1-4\cos x}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 1-4\cos x = u \\ 4\sin x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ 2\sin x\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln|1-4\cos x| + c$$

■

Příklad 1.32 $\displaystyle\int \frac{3\left(\arccos x\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{3\left(\arccos x\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \arccos x = u \\ \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}u \end{array} \right| = -3\int u^2\ \mathrm{d}u = -3\frac{u^3}{3} + c = -u^3 + c =$$

$$= -\left(\arccos x\right)^3 + c$$

■

Příklad 1.33 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x \operatorname{tg} x}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x \operatorname{tg} x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = u \\ \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c = \ln|\operatorname{tg} x| + c$$

■

Příklad 1.34 $\displaystyle\int \frac{5}{x}\ln^3 2x\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{5}{x}\ln^3 2x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \ln 2x = u \\ 2\frac{1}{2x}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}u \end{array} \right| = 5\int\ u^3\ \mathrm{d}u = \frac{5u^4}{4} + c = \frac{5}{4}\ln^4 2x + c$$

■

Užití vzorce $\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b) + c,\ a \neq 0$

Příklad 1.35 $\int (7+3x)^4\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (7+3x)^4\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\frac{(7+3x)^5}{5} + c = \frac{1}{15}(7+3x)^5 + c$$

■

Příklad 1.36 $\int \frac{6}{\sqrt[3]{(2-x)^4}}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{6}{\sqrt[3]{(2-x)^4}}\ \mathrm{d}x = 6\int (2-x)^{-\frac{4}{3}}\ \mathrm{d}x = 6 \cdot \frac{1}{-1}\frac{(2-x)^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + c = \frac{18}{\sqrt[3]{2-x}} + c$$

■

Příklad 1.37 $\int \frac{4}{3-2x}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{4}{3-2x}\ \mathrm{d}x = 4\int \frac{1}{3-2x}\ \mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{1}{-2}\ln|3-2x| + c = -2\ln|3-2x| + c$$

■

Příklad 1.38 $\int 2e^{4+3x}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int 2e^{4+3x}\ \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{3}e^{4+3x} + c = \frac{2}{3}e^{4+3x} + c$$

■

Příklad 1.39 $\int 3^{-\frac{1}{6}x}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int 3^{-\frac{1}{6}x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{1}{6}}\frac{3^{-\frac{1}{6}x}}{\ln 3} + c = -6\frac{3^{-\frac{1}{6}x}}{\ln 3} + c$$

■

Příklad 1.40 $\int \sin\left(5 - \frac{3}{4}x\right)\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \sin\left(5 - \frac{3}{4}x\right)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{3}{4}} \cdot \left[-\cos\left(5 - \frac{3}{4}x\right)\right] + c = \frac{4}{3}\cos\left(5 - \frac{3}{4}x\right) + c$$

■

Příklad 1.41 $\displaystyle\int \frac{7}{\cos^2\left(2+\frac{3}{2}x\right)}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{7}{\cos^2\left(2+\frac{3}{2}x\right)}\,\mathrm{d}x = 7\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}\left(2+\frac{3}{2}x\right)+c = \frac{14}{3}\operatorname{tg}\left(2+\frac{3}{2}x\right)+c$$

■

Užití vzorce $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+c,\ f(x)\neq 0$

Příklad 1.42 $\displaystyle\int \frac{5}{5x-4}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{5}{5x-4}\,\mathrm{d}x = \ln|5x-4|+c$$

■

Příklad 1.43 $\displaystyle\int \frac{3}{5-6x}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{3}{5-6x}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\frac{1}{-6}\int\frac{-6}{5-6x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln|5-6x|+c$$

■

Příklad 1.44 $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2-3x^3}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{4x^2}{2-3x^3}\,\mathrm{d}x = 4\cdot\frac{1}{-9}\int\frac{-9x^2}{2-3x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{9}\ln\left|2-3x^3\right|+c$$

■

Příklad 1.45 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)}{e^{2x}+e^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)+c$$

■

Příklad 1.46 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{5-2\cos x}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{\sin x}{5-2\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2\sin x}{5-2\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(5-2\cos x)+c$$

■

Příklad 1.47 $\displaystyle\int \frac{2\cotg x}{3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{2\cotg x}{3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\tg x \cdot \cos^2 x} = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}}{\tg x} = \ln|\tg x| + c$$

■

Příklad 1.48 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\, x}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\, x} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}}{\mathrm{arctg}\, x} = \ln|\mathrm{arctg}\, x| + c$$

■

Užití vzorce $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + c,\ a > 0$

Příklad 1.49 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{16+x^2}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{16+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{4^2+x^2} = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{4} + c$$

■

Příklad 1.50 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{x^2}{4}+5}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{x^2}{4}+5} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{2} = u \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{2\mathrm{d}u}{u^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{5}} + c = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2\sqrt{5}} + c$$

■

Příklad 1.51 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-3)^2+4}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-3)^2+4} = \left| \begin{array}{l} 2x-3 = u \\ 2\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{2} + c = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-3}{2} + c$$

■

Příklad 1.52 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+18}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+18} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2+9} = \left| \begin{array}{l} x+3 = u \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3^2} = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{3} + c = \frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+3}{3} + c$$

■

Příklad 1.53 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x+10}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x+10} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} = \left| \begin{array}{l} x+\frac{5}{2}=u \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}u \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+\left(\sqrt{\frac{15}{4}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{\frac{15}{4}}} + c =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{15}} + c = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{15}} + c$$

■

Příklad 1.54 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+4} = \left| \begin{array}{l} 2x+1=u \\ 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + c =$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2} + c$$

■

Užití vzorce $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c,\ a>0$

Příklad 1.55 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x^2}}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + c$$

■

Příklad 1.56 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-25x^2}}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-25x^2}} = \left| \begin{array}{l} 5x=u \\ 5\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{5} \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4^2-u^2}} = \frac{1}{5}\arcsin\frac{u}{4} + c = \frac{1}{5}\arcsin\frac{5x}{4} + c$$

■

Příklad 1.57 $\displaystyle\int \frac{5\mathrm{d}x}{3\sqrt{9-\frac{x^2}{16}}}$

Řešení

$$\int \frac{5\mathrm{d}x}{3\sqrt{9-\frac{x^2}{16}}} = \frac{5}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-\frac{x^2}{16}}} = \left| \begin{array}{l} \frac{x}{4}=u \\ \frac{1}{4}\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}x=4\ \mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{5}{3}\int \frac{4\mathrm{d}u}{\sqrt{3^2-u^2}} = \frac{20}{3}\operatorname{arctg}\frac{u}{3} + c = \frac{20}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{12} + c$$

■

Příklad 1.58 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2+8x}}$

Řešení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2+8x}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(4x^2-8x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(2x-2)^2+4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5-(2x-2)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 2x-2=u \\ 2\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{5-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{u}{\sqrt{5}} + c = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-2}{\sqrt{5}} + c$$

■

Metoda per partes a substituční metoda

Příklad 1.59 $\displaystyle\int (5-3x)\, e^{2x-1}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (5-3x)\, e^{2x-1}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = 5-3x & v' = e^{2x-1} \\ u' = -3 & v = \frac{1}{2}e^{2x-1} \end{array} \right| = (5-3x)\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1} - \int -3\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1}\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}(5-3x)\, e^{2x-1} + \frac{3}{2}\int e^{2x-1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(5-3x)\, e^{2x-1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x-1} + c = \frac{1}{4}e^{2x-1}\,(13-6x) + c$$

■

Příklad 1.60 $\displaystyle\int (2x-3)\sin\left(\frac{x}{2}+1\right)\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (2x-3)\sin\left(\frac{x}{2}+1\right)\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = 2x-3 & v' = \sin\left(\frac{x}{2}+1\right) \\ u' = 2 & v = \frac{-1}{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}+1\right) \end{array} \right| =$$

$$= (2x-3)\cdot(-2)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+1\right) - \int 2\cdot(-2)\cos\left(\frac{x}{2}+1\right)\ \mathrm{d}x =$$

$$= (6-4x)\cos\left(\frac{x}{2}+1\right) + 4\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+1\right) + c = (6-4x)\cos\left(\frac{x}{2}+1\right) + 8\sin\left(\frac{x}{2}+1\right) + c$$

■

Příklad 1.61 $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x = \int 1\cdot\operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2} & v = x \end{array} \right| = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$$

■

Příklad 1.62 $\int \arcsin x \;\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \arcsin x \;\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arcsin x \;\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right| = x \arcsin - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \;\mathrm{d}x =$$

$$= x \arcsin x - \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \;\mathrm{d}x = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int -2x \cdot \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \;\mathrm{d}x =$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

■

Příklad 1.63 $\int e^{3x} \cos 6x \;\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int e^{3x} \cos 6x \;\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{3x} & v' = \cos 6x \\ u' = 3e^{3x} & v = \frac{1}{6} \sin 6x \end{array} \right| = e^{3x} \frac{1}{6} \sin 6x - \frac{3}{6} \int e^{3x} \sin 6x \;\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{3x} & v' = \sin 6x \\ u' = 3e^{3x} & v = -\frac{1}{6} \cos 6x \end{array} \right| = \frac{1}{6} e^{3x} \sin 6x - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{6} e^{3x} \cos 6x + \frac{1}{2} \int e^{3x} \cos 6x \;\mathrm{d}x \right] =$$

$$= \frac{1}{6} e^{3x} \sin 6x + \frac{1}{12} e^{3x} \cos 6x - \frac{1}{4} \int e^{3x} \cos 6x \;\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{4}\right) \int e^{3x} \cos 6x \;\mathrm{d}x &= \frac{1}{12} e^{3x} \left(2 \sin 6x + \cos 6x\right) \\ \frac{5}{4} \int e^{3x} \cos 6x \;\mathrm{d}x &= \frac{1}{12} e^{3x} \left(2 \sin 6x + \cos 6x\right) \\ \int e^{3x} \cos 6x \;\mathrm{d}x &= \frac{1}{15} e^{3x} \left(2 \sin 6x + \cos 6x\right) + c \end{aligned}$$

■

Příklad 1.64 $\int e^{2x} \sin \frac{x}{4} \;\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int e^{2x} \sin \frac{x}{4} \;\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x} & v' = \sin \frac{x}{4} \\ u' = 2e^{2x} & v = -4 \cos \frac{x}{4} \end{array} \right| = -4e^{2x} \cos \frac{x}{4} + 8 \int e^{2x} \cos \frac{x}{4} \;\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x} & v' = \cos \frac{x}{4} \\ u' = 2e^{2x} & v = 4 \sin \frac{x}{4} \end{array} \right| = -4e^{2x} \cos \frac{x}{4} + 8 \left[4e^{2x} \sin \frac{x}{4} - 8 \int e^{2x} \sin \frac{x}{4} \;\mathrm{d}x \right] =$$

$$= -4e^{2x} \cos \frac{x}{4} + 32e^{2x} \sin \frac{x}{4} - 64 \int e^{2x} \sin \frac{x}{4} \;\mathrm{d}x$$

$$(1+64)\int e^{2x}\sin\frac{x}{4}\;\mathrm{d}x = 4e^{2x}\left(8\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4}\right)$$
$$\int e^{2x}\sin\frac{x}{4}\;\mathrm{d}x = \frac{4}{65}e^{2x}\left(8\sin\frac{x}{4}-\cos\frac{x}{4}\right)+c$$

■

Příklad 1.65 $\int x^3e^{x^2}\;\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int x^3e^{x^2}\;\mathrm{d}x = \int x^2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u=x^2 & v'=xe^{x^2} \\ u'=2x & v=\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\;\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{x^2}\end{array}\right| = x^2\frac{1}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}\;\mathrm{d}x =$$
$$=\frac{x^2}{2}e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+c=\frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right)+c$$

■

Příklad 1.66 $\int x^5e^{x^3+2}\;\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int x^5e^{x^3+2}\;\mathrm{d}x = \int x^3x^2e^{x^3+2}\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u=x^3 & v'=x^2e^{x^3+2} \\ u'=3x^2 & v=\frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3+2}\;\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{x^3+2}\end{array}\right| =$$
$$=x^3\cdot\frac{1}{3}e^{x^3+2}-\int 3x^2\cdot\frac{1}{3}e^{x^3+2}\;\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}e^{x^3+2}-\frac{1}{3}\int 3x^2e^{x^3+2}\;\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}e^{x^3+2}-\frac{1}{3}e^{x^3+2}+c=$$
$$=\frac{1}{3}e^{x^3+2}\left(x^3-1\right)+c$$

■

Příklad 1.67 $\int x^3\sin\left(4-2x^2\right)\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int x^3\sin\left(4-2x^2\right)\mathrm{d}x = \int x^2x\sin\left(4-2x^2\right)\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u=x^2 & v'=x\sin\left(4-2x^2\right) \\ u'=2x & v=\frac{1}{4}\cos\left(4-2x^2\right)\end{array}\right| =$$
$$=\frac{x^2}{4}\cos\left(4-2x^2\right)-\frac{2}{4}\int x\cos\left(4-2x^2\right)\;\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}\cos\left(4-2x^2\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\sin\left(4-2x^2\right)=$$
$$=\frac{x^2}{4}\cos\left(4-2x^2\right)+\frac{1}{8}\sin\left(4-2x^2\right)+c$$

Poznámka.

$$\int x\sin\left(4-2x^2\right)\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} 4-2x^2=z \\ -4x\;\mathrm{d}x=\mathrm{d}z \\ x\;\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\mathrm{d}z\end{array}\right| = -\frac{1}{4}\int\sin z\;\mathrm{d}z=+\frac{1}{4}\cos\left(4-2x^2\right)$$

$$\int x\cos\left(4-2x^2\right)\;\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} 4-2x^2=z \\ -4x\;\mathrm{d}x=\mathrm{d}z \\ x\;\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\mathrm{d}z\end{array}\right| = -\frac{1}{4}\int\cos z\;\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\sin\left(4-2x^2\right)$$

■

2 Určitý integrál

Hodnotu určitého integrálu stanovte tak, že nejprve pomocí odpovídajícího neurčitého integrálu najdete primitivní funkci a pak na základě Newton-Leibnizovy věty spočítáte daný určitý integrál.

Příklad 2.1 $\displaystyle\int_1^4 \left(\sqrt{x}+2x-1\right)\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \left(\sqrt{x}+2x-1\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{x^2}{2} - x + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + x^2 - x + c$$

$$\int_1^4 \left(\sqrt{x}+2x-1\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + x^2 - x\right]_1^4 = \left(\frac{2\sqrt{4^3}}{3} + 16 - 4\right) - \left(\frac{2}{3} + 1 - 1\right) = \frac{50}{3}$$

■

Příklad 2.2 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 4\arcsin x + c$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[4\arcsin x\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4\cdot\frac{\pi}{4} - 4\cdot 0 = \pi$$

■

Příklad 2.3 $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \sin x \\ u' = 2x & v = -\cos x \end{array}\right| = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = 2x & v' = \cos x \\ u' = 2 & v = \sin x \end{array}\right| =$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - \int 2\sin x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c =$$

$$= \left(2-x^2\right)\cos x + 2x\sin x + c$$

$$\int_0^{\pi} x^2\sin x\,\mathrm{d}x = \left[\left(2-x^2\right)\cos x + 2x\sin x\right]_0^{\pi} = \left(2-\pi^2\right)(-1) + 2\pi\cdot 0 - (2\cdot 1 + 0) = \pi^2 - 4$$

■

Příklad 2.4 $\displaystyle\int_1^{e} x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & v' = x \\ u' = \frac{2\ln x}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{2\ln x}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x\right) + \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x\right) + \frac{x^2}{4} + c$$

$$\int_1^e x\ln^2 x\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x\right) + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2}(1-1) + \frac{e^2}{4} - \left(\frac{1}{2}\left(\ln^2 1 - \ln 1\right) + \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$$

■

Příklad 2.5 $\displaystyle\int_0^\pi (3+\sin 2x)\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int (3+\sin 2x)\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} 2x = t \\ 2\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int (3+\sin t)\,\frac{1}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(3t - \cos t) + c = \frac{3}{2}\cdot 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c =$$

$$= 3x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

$$\int_0^\pi (3+\sin 2x)\ \mathrm{d}x = \left[3x - \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi = 3\pi - \frac{1}{2}\cdot 1 - \left(0 - \frac{1}{2}\cdot 1\right) = 3\pi$$

■

Příklad 2.6 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{6}} x\sqrt{2x^2+4}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int x\sqrt{2x^2+4}\ \mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} 2x^2+4 = t \\ 4x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ \mathrm{d}t \end{array}\right| = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{4}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3} + c = \frac{1}{6}\sqrt{(2x^2+4)^3} + c$$

$$\int_1^{\sqrt{6}} x\sqrt{2x^2+4}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}\sqrt{(2x^2+4)^3}\right]_1^{\sqrt{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{(2\cdot 6+4)^3} - \frac{1}{6}\sqrt{(2+4)^3} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot 4^3 - \frac{1}{6}\cdot 6\sqrt{6} = \frac{32}{3} - \sqrt{6}$$

■

Stanovte hodnotu určitého integrálu bez mezivýpočtu primitivní funkce. Při použití substituce neopomeňte transformovat také meze.

Příklad 2.7 $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(x^2 + x^{-4}\right)\ \mathrm{d}x = \left[x^3 + \frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^2 = \left[x^3 - \frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \left(8 - \frac{1}{3\cdot 8}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 7 + \frac{7}{3\cdot 8} = \frac{175}{24}$$

■

Příklad 2.8 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+2x^2}{x^2+x^4}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+2x^2}{x^2+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\left(1+x^2\right)+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{3}} + \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_1^{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{3-\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{12}$$

■

Příklad 2.9 $\displaystyle\int_4^{9} \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_4^{9} \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_4^9 \left(x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x|\right]_4^9 =$$

$$= \frac{-2}{3\left(\sqrt{9}\right)^3} - e^9 + \ln 9 - \left(\frac{-2}{3\left(\sqrt{4}\right)^3} - e^4 + \ln 4\right) = \frac{-2}{3\cdot 27} - e^9 + \ln 9 + \frac{2}{3\cdot 8} + e^4 - \ln 4 =$$

$$= \frac{19}{324} + e^4 - e^9 + \ln\frac{9}{4}$$

■

Příklad 2.10 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

■

Přímý výpočet integrálu metodou per partes:

Příklad 2.11 $\displaystyle\int_1^{e} x\ln x\,\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u=\ln x & v'=x \\ u'=\frac{1}{x} & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right| = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \int_1^e \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

■

Příklad 2.12 $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin x \;\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x \;\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \sin x \\ u' = 2x & v = -\cos x \end{array} \right| = \left[-x^2 \cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\,(-\cos x)\;\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2x & v' = -\cos x \\ u' = 2 & v = -\sin x \end{array} \right| = -\pi^2\,(-1) - \left(\Big[-2x\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -2\sin x \;\mathrm{d}x\right) = \pi^2 - 0 + 2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi} =$$

$$= \pi^2 + 2(-1-1) = \pi^2 - 4$$

$\blacksquare$

Příklad 2.13 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \;\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \;\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \arcsin x \;\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right| =$$

$$= \Big[x \arcsin x\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\;\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x\;\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow x\;\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\;\mathrm{d}t \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{3}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{1}{2}\right)\;\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$\blacksquare$

Příklad 2.14 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \;\mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \;\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x} & v' = \cos x \\ u' = 2e^{2x} & v = \sin x \end{array} \right| = \Big[e^{2x} \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x} \sin x \;\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2e^{2x} & v' = \sin x \\ u' = 4e^{2x} & v = -\cos x \end{array} \right| = e^{\pi} \sin\frac{\pi}{2} - 0 - \Big[-2e^{2x}\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\,(-\cos x)\;\mathrm{d}x =$$

$$= e^{\pi} \cdot 1 + 2e^{\pi} \cos\frac{\pi}{2} - 2e^0 \cos 0 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \;\mathrm{d}x = e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \;\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \;\mathrm{d}x = e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \;\mathrm{d}x$$

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \;\mathrm{d}x = e^{\pi} - 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \;\mathrm{d}x = \frac{e^{\pi} - 2}{5}$$

$\blacksquare$

Přímý výpočet integrálu substituční metodou:

Příklad 2.15 $\displaystyle\int_0^{e-1} \frac{\ln(x+1)}{x+1}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_0^{e-1} \frac{\ln(x+1)}{x+1}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \ln(x+1) = t \\ \frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x = 0 \Rightarrow t = \ln 1 = 0 \\ x = e-1 \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

■

Příklad 2.16 $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_1^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \\ x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \end{array} \right| = \int_1^{\frac{1}{3}} e^t(-\mathrm{d}t) = -\left[e^t\right]_1^{\frac{1}{3}} = -e^{\frac{1}{3}} + e = e - \sqrt[3]{e}$$

■

Příklad 2.17 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \sin x\ \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = \int_1^0 t^2(-\mathrm{d}t) = -\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^0 = \frac{1}{3}$$

■

Příklad 2.18 $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x$

Řešení

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = 3\sin t \rightarrow t = \arcsin \frac{x}{3} \\ \mathrm{d}x = 3\cos t\ \mathrm{d}t \\ x = 0 \Rightarrow t = \arcsin 0 = 0 \\ x = 3 \Rightarrow t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ = 3\cos t \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\ \mathrm{d}t = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \mathrm{d}t =$$

$$= 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2t\right)\ \mathrm{d}t = \frac{9}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{9\pi}{4}$$

■

3 Aplikace integrálního počtu

a) Geometrické aplikace

Doporučení!
Dříve než začnete řešit následující příklady, načrtněte grafy funkcí, přímky a čáry, jimiž je rovinný obrazec omezen. Vyšrafujte obrazec, jehož obsah máte vypočítat. Názorná představa vám pomůže najít integrační meze, pokud nejsou zadány, případně vám napoví způsob jejich vyhledávání. Upozorní vás i na případné rozdělení obrazce na části, pokud funkce mění na integračním oboru znaménko, nebo je obrazec shora či zdola omezen více druhy křivek.

Výpočet obsahu P rovinného obrazce omezeného křivkami $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ podle vzorce $P = \int_a^b |f(x)| \, dx$.

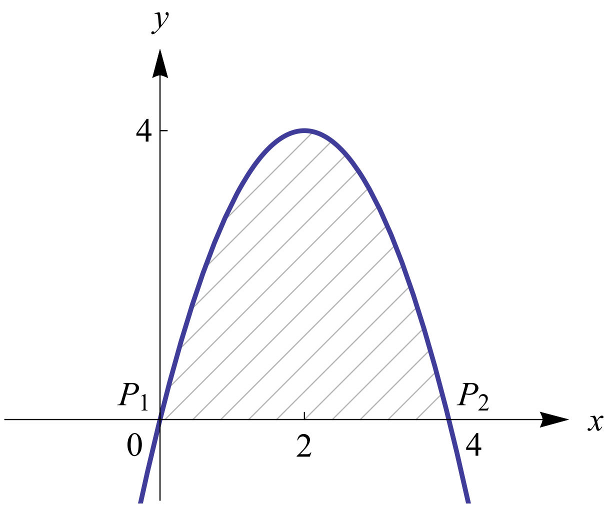
Příklad 3.1 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného grafem funkce $f(x) = 4x - x^2$ a osou x.*

Řešení

Funkce f je kvadratická funkce, jejím grafem je parabola. Určíme průsečíky grafu funkce f s osou x a načrtneme obrázek.

Průsečíky paraboly s osou x:

$4x - x^2 = 0$
$x\,(4 - x) = 0$
$x_1 = 0,\ x_2 = 4 \qquad P_1 = [0; 0]\,,\ P_2 = [4; 0]$



Obrázek 1: Plocha obrazce omezeného funkcí $f(x) = 4x - x^2$ a osou x
Zdroj: Vlastní zpracování

Máme spočítat obsah P vyšrafovaného obrazce.

$$P = \int_0^4 \left(4x - x^2\right) \, dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left(2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{0^3}{3}\right) =$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Obsah obrazce je $P = 10\frac{2}{3}\ (j^2)$.

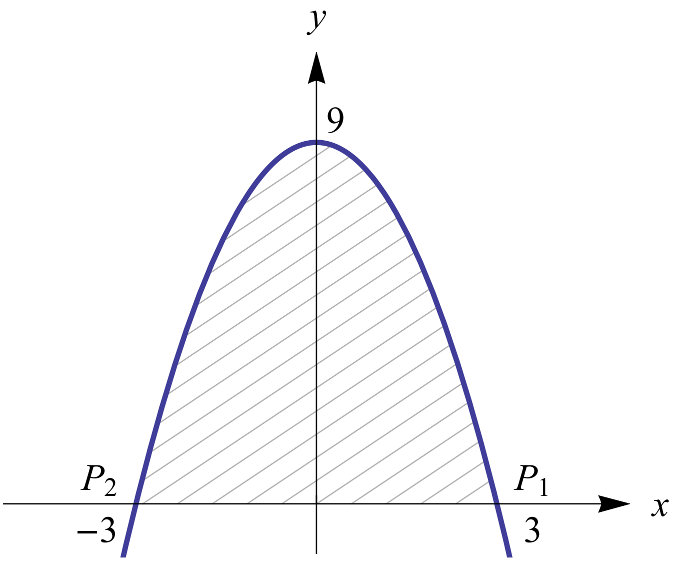
■

Příklad 3.2 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného křivkami $y = 9 - x^2$ a $y = 0$.*

Řešení

Průsečíky paraboly s osou x:

$9 - x^2 = 0$
$x^2 = 9$
$x_{1,2} = \pm 3 \qquad P_1 = [3;0]\,,\ P_2 = [-3;0]$



Obrázek 2: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = 9 - x^2$ a $y = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

Můžeme využít symetrie obrazce - je osově souměrný podle osy y.

$$P = 2\int_0^3 \left(9 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = 2\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 2\left\{\left(9\cdot 3 - \frac{3^3}{3}\right) - 0\right\} = 2\,(27-9) = 2\cdot 18 = 36$$

Obsah obrazce je $P = 36\,\left(j^2\right)$.

■

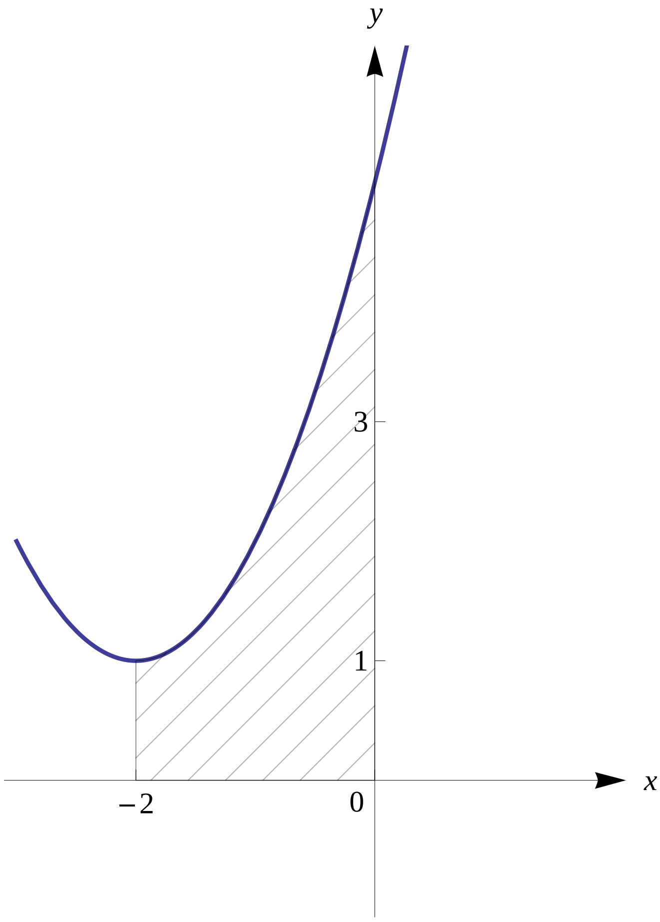
Příklad 3.3 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného křivkami $y = x^2 + 4x + 5$, $y = 0$, $x = -2$ a $x = 0$.*

Řešení

Čára $y = x^2 + 4x + 5$ je parabola, která neprotíná osu x, protože diskriminant $D = 16 - 20 < 0$. Pomocí derivace určíme vrchol V paraboly:

$y' = 2x + 4$
$y' = 0 \implies 2x + 4 = 0 \implies x = -2;\; y(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5 = 1$ Čára $y = 0$ je osa x.
$V = [-2; 1]$

Čára $x = -2$ je rovnoběžka s osou y.
Čára $x = 0$ je osa y.



Obrázek 3: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = x^2 + 4x + 5$, $y = 0$, $x = -2$ a $x = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$P = \int_{-2}^{0} \left(x^2 + 4x + 5\right)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\right]_{-2}^{0} = 0 - \left(\frac{-8}{3} + 8 - 10\right) = \frac{8}{3} + 2 = \frac{8+6}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

Obsah obrazce $P = 4\frac{2}{3}\ \left(j^2\right)$.

■

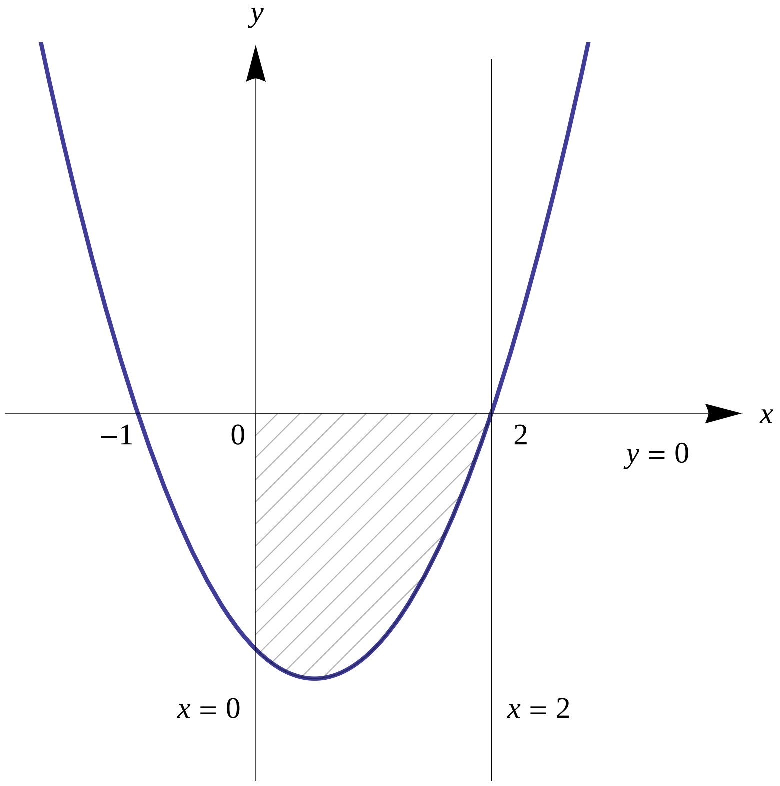
Příklad 3.4 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného grafem funkce $y = x^2 - x - 2$ a přímkami $x = 0$, $x = 2$ a $y = 0$.*

Řešení

Grafem funkce $y = x^2 - x - 2$ je parabola, její průsečíky s osou x jsou:

$x^2 - x - 2 = 0$
$(x - 2)(x + 1) = 0$
$x_1 = 2,\ x_2 = -1 \qquad P_1 = [2; 0]\,,\ P_2 = [-1; 0]$

$x = 0$ je osa y
$x = 2$ je přímka rovnoběžná s osou y
$y = 0$ je osa x



Obrázek 4: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = x^2 - x - 2$, $x = 0$, $x = 2$ a $y = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

Obrazec je celý pod osou x, proto použijeme absolutní hodnotu. (Obsah je vždy kladné číslo.)

$$P = \left|\int_0^2 \left(x^2 - x - 2\right)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^2\right| = \left|\frac{8}{3} - 2 - 4 - 0\right| = \left|\frac{8 - 18}{3}\right| = \left|-\frac{10}{3}\right| = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

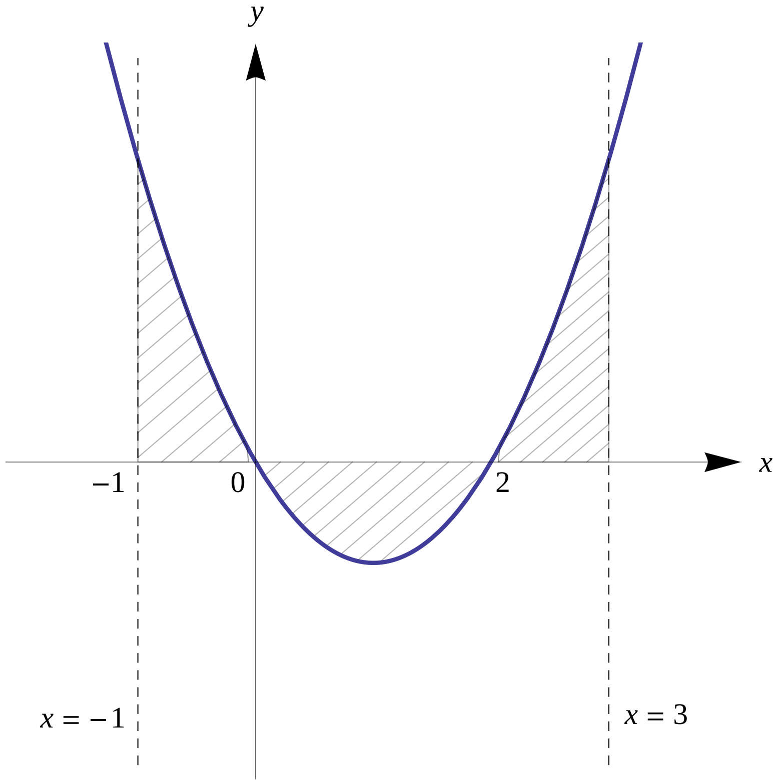
Obsah obrazce $P = 3\frac{1}{3}\,\left(j^2\right)$.

■

Příklad 3.5 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného grafem funkce $f(x) = x^2 - 2x$, přímkami $x = -1$, $x = 3$ a osou x.*

Řešení

Grafem funkce $f(x) = x^2 - 2x$ je parabola, její průsečíky s osou x jsou body $P_1 = [0; 0]$ a $P_2 = [2; 0]$. Přímky $x = -1$ a $x = 3$ jsou rovnoběžné s osou y.



Obrázek 5: Plocha obrazce omezeného funkcí $f(x) = x^2 - 2x$, přímkami $x = -1$, $x = 3$ a osou x
Zdroj: Vlastní zpracování

Funkce f mění na intervalu $\langle -1; 3\rangle$ znaménko, proto musíme výpočet obsahu rozdělit na tři části.

$$P = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x\right)\ \mathrm{d}x + \left|\int_{0}^{2} \left(x^2 - 2x\right)\ \mathrm{d}x\right| + \int_{2}^{3} \left(x^2 - 2x\right)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} + \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}\right| + \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{2}^{3} =$$

$$= \left\{0 - \left(\frac{-1}{3} - 1\right)\right\} + \left|\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right| + \left\{(9 - 9) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)\right\} = \frac{1}{3} + 1 + \left|\frac{8 - 12}{3}\right| - \frac{8}{3} + 4 =$$

$$= -\frac{7}{3} + 5 + \left|\frac{-4}{3}\right| = -\frac{7}{3} + 5 + \frac{4}{3} = 5 - 1 = 4$$

Obsah obrazce $P = 4\left(j^2\right)$.

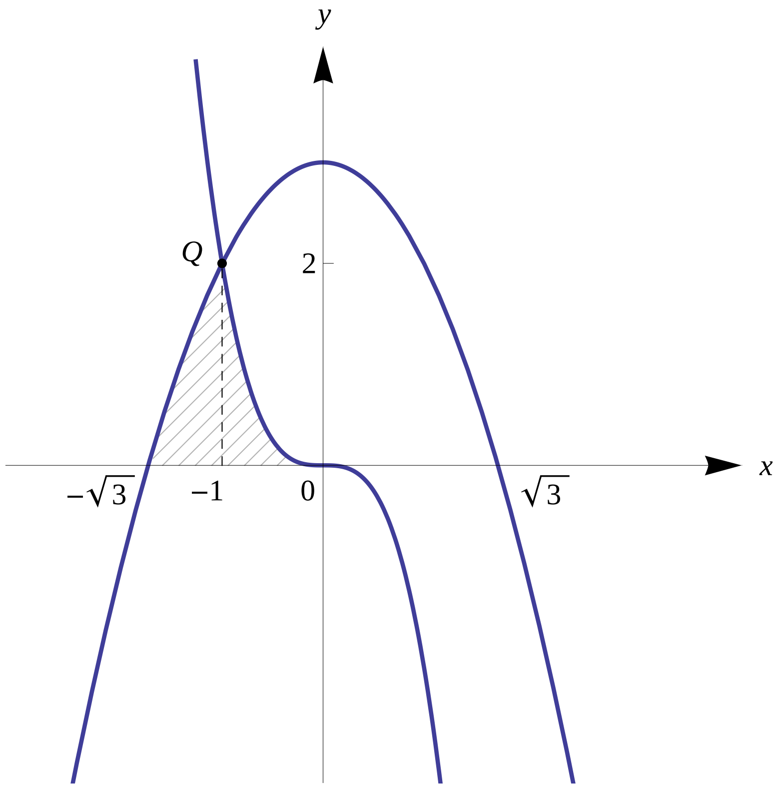
Poznámka.
Místo absolutní hodnoty jsme mohli u tohoto integrálu vyměnit meze nebo jeho výsledek odečíst.

■

Příklad 3.6 *Vypočítejte obsah obrazce omezeného čarami $y = 3 - x^2$, $y = -2x^3$ a $y = 0$, víte-li, že průsečík prvních dvou čar je bod $Q = [-1; 2]$.*

Řešení

$y = 3 - x^2$ je parabola
$y = -2x^3$ je kubická parabola



Obrázek 6: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = 3 - x^2$, $y = -2x^3$ a $y = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

Pozor! Část obrazce je na intervalu $\left\langle -\sqrt{3}; -1 \right\rangle$ omezena shora parabolou a na intervalu $\langle -1, 0 \rangle$ kubickou parabolou, proto musíme výpočet P rozdělit na dvě části.

$$P = \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \left(3 - x^2\right) \; \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} -2x^3 \; \mathrm{d}x = \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{-1} - 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= -3 + \frac{1}{3} - \left(-3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) - 2\left(0 - \frac{1}{4}\right) = -3 + \frac{1}{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{-18 + 2 + 3}{6} + 2\sqrt{3} = \frac{-13}{6} + 2\sqrt{3}$$

Obsah obrazce $P = \left(\frac{-13}{6} + 2\sqrt{3}\right) \left(j^2\right)$.

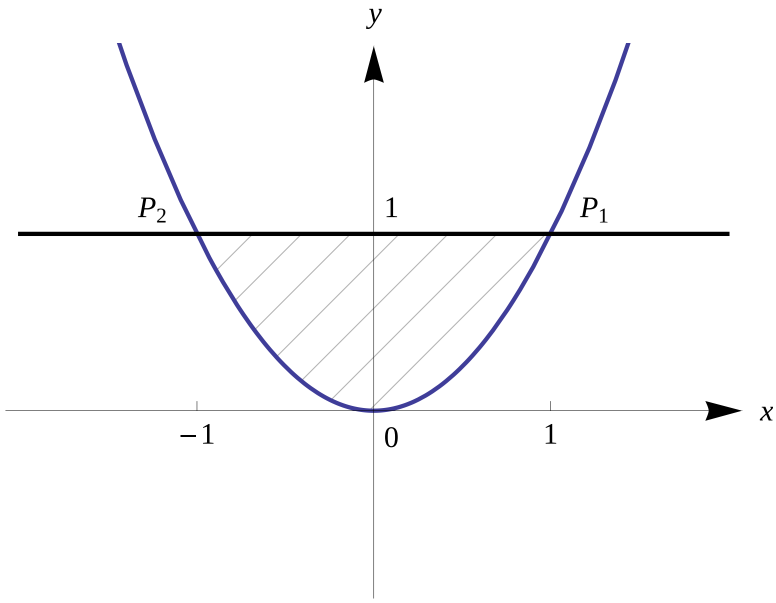
■

Příklad 3.7 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného grafem funkce $y = x^2$ a přímkou $y = 1$.*

Řešení

Určíme průsečíky paraboly a přímky:

$x^2 = 1 \implies x_{1,2} = \pm 1; \qquad P_1 = [1; 1]\,,\ P_2 = [-1; 1]$



Obrázek 7: Plocha obrazce omezeného funkcí $y = x^2$ a přímkou $y = 1$
Zdroj: Vlastní zpracování

Využijeme souměrnosti obrazce podle osy y.

$$P = 2\int_0^1 \left(1 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Obsah obrazce $P = \frac{4}{3}\left(j^2\right)$.

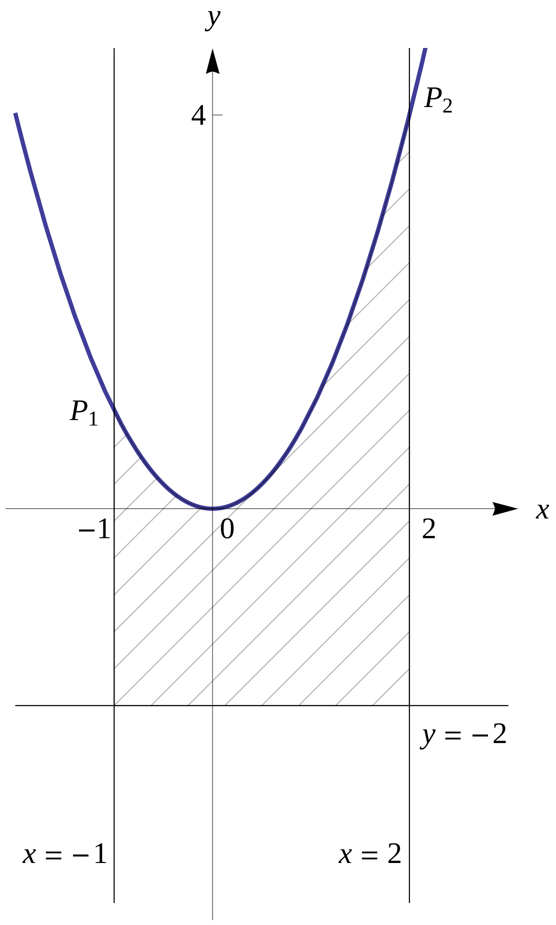
Upozornění.
Obrazec je shora omezen přímkou a zdola grafem funkce $y = x^2$ a ne osou x, jak tomu bylo v předchozích příkladech.

■

Příklad 3.8 *Určete obsah P rovinného obrazce omezeného grafem funkce $y = x^2$ a přímkami $y = -2$, $x = -1$ a $x = 2$.*

Řešení

$P_1 = [-1; 1]$ - průsečík paraboly s přímkou $x = -1$
$P_2 = [2; 4]$ - průsečík paraboly s přímkou $x = 2$



Obrázek 8: Plocha obrazce omezeného funkcí $y = x^2$ a přímkami $y = -2$, $x = -1$ a $x = 2$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$P = \int_{-1}^{2} \left[x^2 - (-2)\right] \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 2\right) \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + 4 - \left(-\frac{1}{3} - 2\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} + 2 = 6 + \frac{9}{3} = 9$$

Obsah obrazce $P = 9 \left(j^2\right)$.

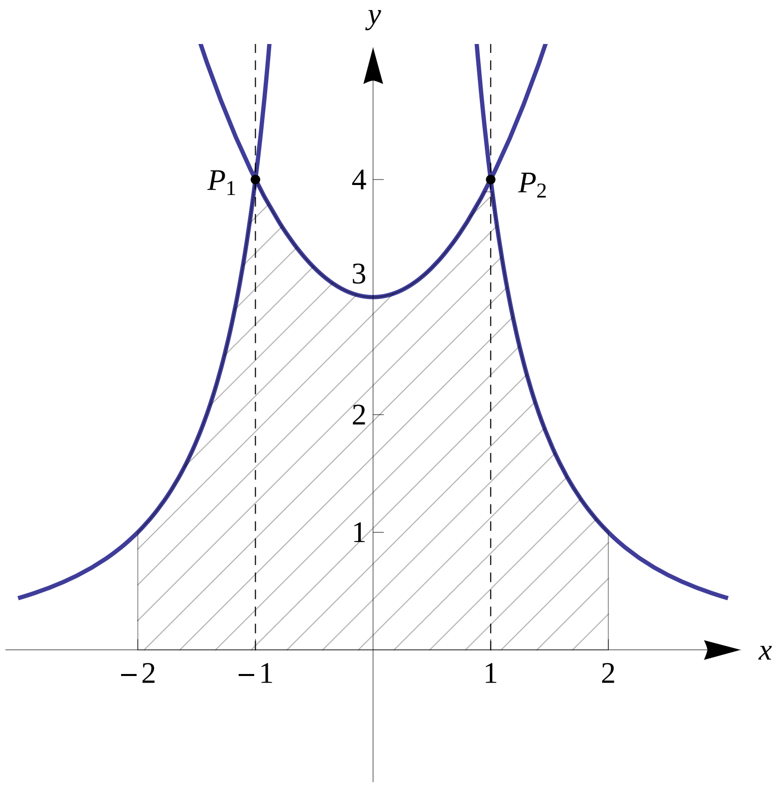
■

Příklad 3.9 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného čarami $y = x^2 + 3$ a $y = \frac{4}{x^2}$, $x = -2$, $x = 2$ a $y = 0$.*

Řešení

Průsečíky hyperboly $y = \frac{4}{x^2}$ a paraboly $y = x^2 + 3$:

$\frac{4}{x^2} = x^2 + 3 \quad / \cdot x^2$
$4 = x^4 + 3x^2$
$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
$\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - 1\right) = 0$
$x_{1,2} = \pm 1 \qquad P_1 = [-1; 4]\,,\ P_2 = [1; 4]$



Obrázek 9: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = x^2 + 3$, $y = \frac{4}{x^2}$, $x = -2$, $x = 2$ a $y = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

Obrazec je souměrný podle osy y. Výpočet musíme rozdělit na části, poněvadž shora je obrazec omezen zčásti parabolou a zčásti hyperbolou.

$$P = 2\left[\int_0^1 \left(x^2 + 3\right)\, \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{4}{x^2}\, \mathrm{d}x\right] = 2\left\{\left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_0^1 + \left[-\frac{4x^{-1}}{1}\right]_1^2\right\} = 2\left\{\frac{1}{3} + 3 - 4\left[\frac{1}{x}\right]_1^2\right\} =$$

$$= 2\left\{\frac{1}{3} + 3 - 4\left(\frac{1}{2} - 1\right)\right\} = 2\left\{\frac{10}{3} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = 2\left\{\frac{10}{3} + 2\right\} = 2 \cdot \frac{10 + 6}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

Obsah obrazce $P = 10\frac{2}{3}\ \left(j^2\right)$.

■

Příklad 3.10 *Určete obsah P rovinného obrazce omezeného grafem funkce $f(x) = -x^3 - 8$, osou y a přímkou $y = 19$.*

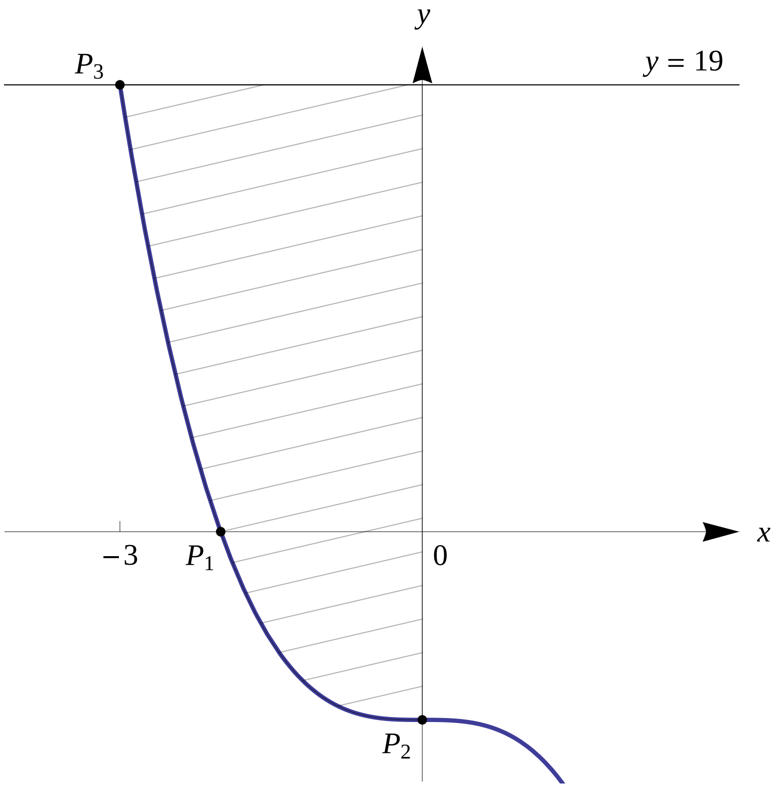
Řešení

Grafem funkce $f(x) = -x^3 - 8$ je kubická parabola.

Průsečík paraboly s osou x:
$-x^3 - 8 = 0 \implies x^3 = -2 \implies x = -2 \qquad P_1 = [-2; 0]$

Průsečík paraboly s osou y:
$f(0) = -8 \qquad P_2 = [0; -8]$

Průsečík paraboly s přímkou $y = 19$:
$-x^3 - 8 = 19$
$-x^3 = 27 \implies x = -3 \qquad P_3 = [-3; 19]$



Obrázek 10: Plocha obrazce omezeného funkcí $f(x) = -x^3 - 8$, osou y a přímkou $y = 19$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$P = \int_{-3}^{0} \left[19 - \left(-x^3 - 8\right)\right] \, \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} \left(27 + x^3\right) \, \mathrm{d}x = \left[27x + \frac{x^4}{4}\right]_{-3}^{0} =$$

$$= 0 - \left[27 \cdot (-3) + \frac{(-3)^4}{4}\right] = 81 - \frac{81}{4} = 81 \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 81 \cdot \frac{3}{4} = \frac{243}{4} = 60\frac{3}{4}$$

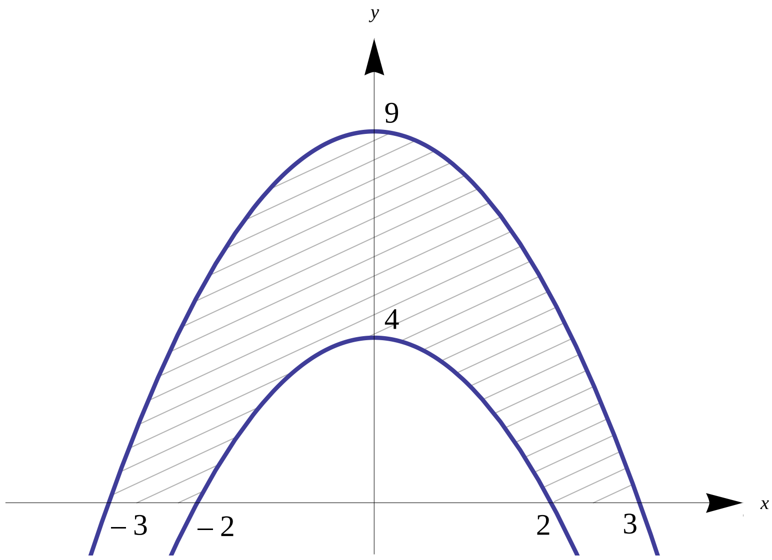
Obsah obrazce $P = 60\frac{3}{4} \left(j^2\right)$.

■

Příklad 3.11 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného čarami $y = 9 - x^2$, $y = 4 - x^2$ a $y = 0$.*

Řešení

Paraboly $y = 9 - x^2$ a $y = 4 - x^2$ mají vrcholy na ose y a jsou otevřené směrem dolů.
Parabola $y = 9 - x^2$ má vrchol $V = [0; 9]$ a protíná osu x v bodech -3 a 3.
Parabola $y = 4 - x^2$ má vrchol $V = [0; 4]$ a protíná osu x v bodech -2 a 2.



Obrázek 11: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = 9 - x^2$, $y = 4 - x^2$ a $y = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

Využijeme souměrnosti obrazce podle osy y.

$$P = 2\left\{\int_0^3 \left(9 - x^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_0^2 \left(4 - x^2\right)\ \mathrm{d}x\right\} = 2\left\{\left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 - \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2\right\} =$$

$$= 2\left\{27 - 9 - 8 + \frac{8}{3}\right\} = 2\left(10 + \frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \frac{38}{3} = \frac{76}{3} = 25\frac{1}{3}$$

Obsah obrazce $P = 25\frac{1}{3}\ (j^2)$.

■

Příklad 3.12 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného grafy funkcí $f(x) = \frac{9}{4}\pi^2 - x^2$ a $g(x) = \cos x$.*

Řešení

Grafem funkce f je parabola s vrcholem $V = \left[0; \frac{9}{4}\pi^2\right]$ otevřená směrem dolů.

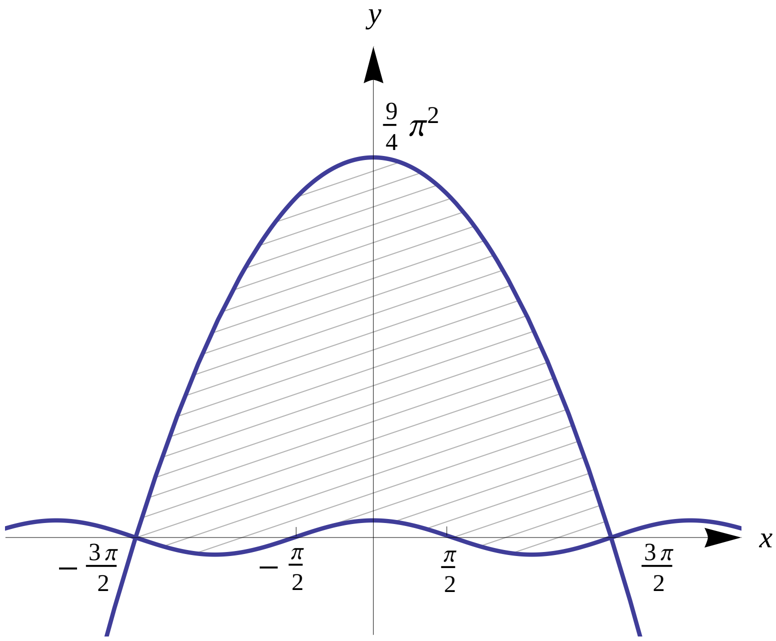
Její průsečíky s osou x jsou:

$\frac{9}{4}\pi^2 - x^2 = 0$

$x^2 = \frac{9}{4}\pi^2$

$x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}\pi$

Grafem funkce g je kosinusoida.



Obrázek 12: Plocha obrazce omezeného funkcemi $f(x) = \frac{9}{4}\pi^2 - x^2$ a $g(x) = \cos x$
Zdroj: Vlastní zpracování

Obrazec je souměrný podle osy y.

$$P = 2\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{9}{4}\pi^2 - x^2 - \cos x\right)\, \mathrm{d}x = 2\left[\frac{9}{4}\pi^2 x - \frac{x^3}{3} - \sin x\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} =$$

$$= 2\left(\frac{9}{4}\pi^2 \cdot \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}\pi^3 - \sin\frac{3}{2}\pi\right) = 2\left[\frac{27}{8}\pi^3 - \frac{9}{8}\pi^3 - (-1)\right] = 2\left(\frac{9}{4}\pi^3 + 1\right) = \frac{9}{2}\pi^3 + 2$$

Obsah obrazce $P = \left[\frac{9}{2}\pi^3 + 2\right]\left(j^2\right)$.

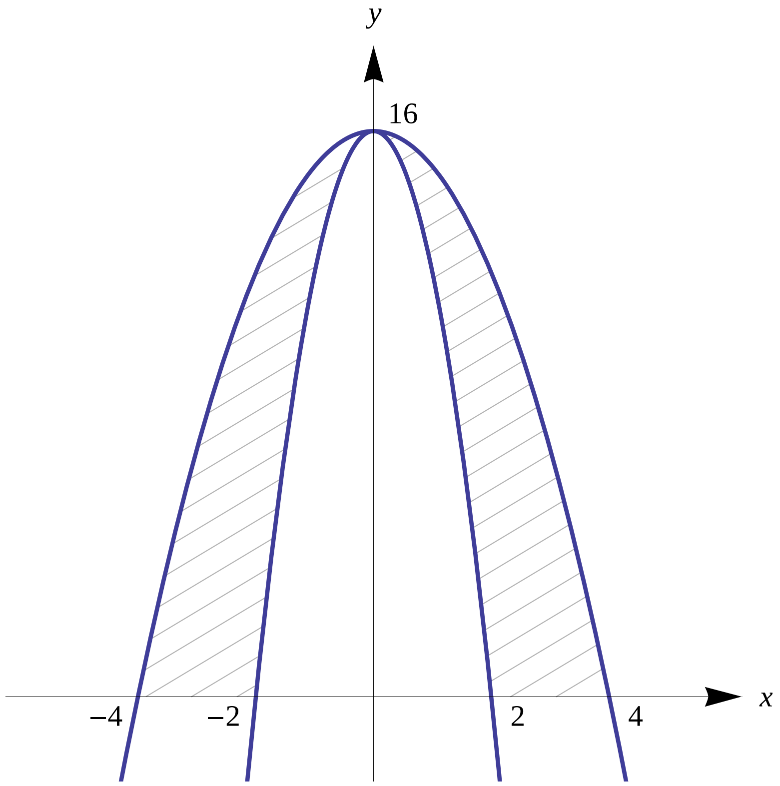
■

Příklad 3.13 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného křivkami $y = 16 - x^2$, $y = 16 - 4x^2$ a $y = 0$.*

Řešení

Obě křivky jsou paraboly s vrcholem $V = [0; 16]$ a otevřené směrem dolů.
Průsečíky parabol s osou x:

$16 - x^2 = 0$	$16 - 4x^2 = 0$
$x_{1,2} = \pm 4$	$x^2 = 4$
	$x_{1,2} = \pm 2$



Obrázek 13: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = 16 - x^2$, $y = 16 - 4x^2$ a $y = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

Využijeme souměrnosti obrazce podle osy y.

$$P = 2\left\{\int_0^4 \left(16 - x^2\right)\ \mathrm{d}x - \int_0^2 \left(16 - 4x^2\right)\ \mathrm{d}x\right\} = 2\left\{\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 - 4\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2\right\} =$$

$$= 2\left\{64 - \frac{64}{3} - 4\left(8 - \frac{8}{3}\right)\right\} = 2\left\{64 - \frac{64}{3} - 32 + \frac{32}{3}\right\} =$$

$$= 2\left(32 - \frac{32}{3}\right) = 2 \cdot 32 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 64 \cdot \frac{2}{3} = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}$$

Obsah obrazce $P = 42\frac{2}{3}\ (j^2)$.

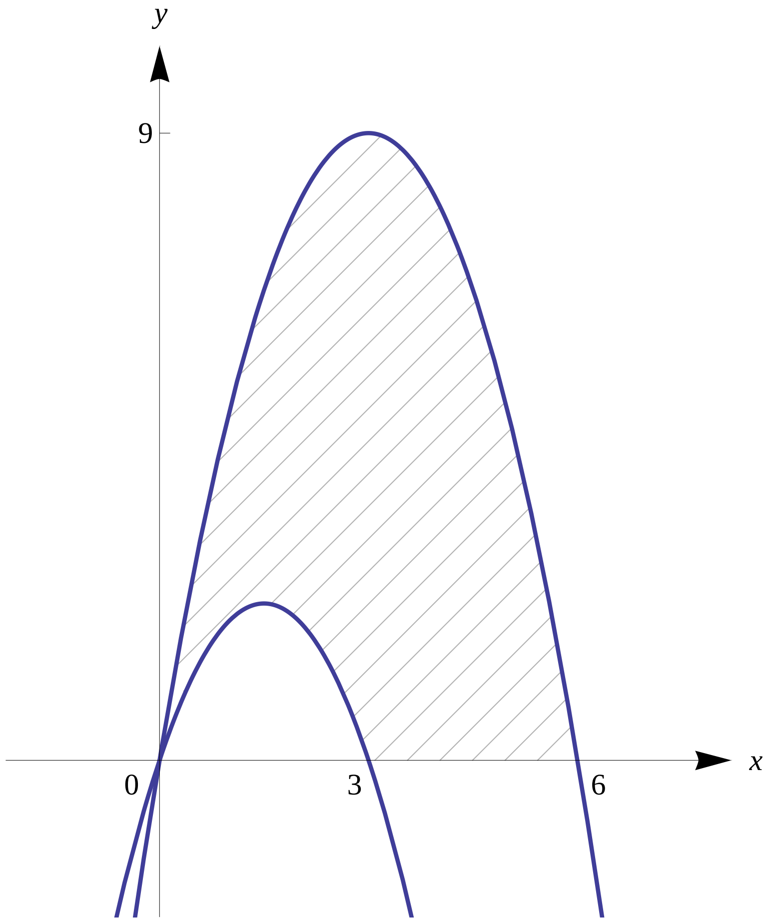
■

Příklad 3.14 *Vypočítejte obsah P obrazce omezeného křivkami $y = 3x - x^2$, $y = 6x - x^2$ a $y = 0$.*

Řešení

Určíme průsečíky parabol s osou x:

$6x - x^2 = 0$	$3x - x^2 = 0$
$x\,(6 - x) = 0$	$x\,(3 - x) = 0$
$x_1 = 0,\; x_2 = 6$	$x_1 = 0,\; x_2 = 3$



Obrázek 14: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = 3x - x^2$, $y = 6x - x^2$ a $y = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$P = \int_0^6 \left(6x - x^2\right)\,\mathrm{d}x - \int_0^3 \left(3x - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[6\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 - \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \left(3 \cdot 36 - \frac{36 \cdot 6}{3}\right) - \left(3 \cdot \frac{9}{2} - \frac{27}{3}\right) = 108 - 72 - \left(\frac{27}{2} - 9\right) = 45 - \frac{27}{2} = 31\frac{1}{2}$$

Obsah obrazce $P = 31\frac{1}{2}\,\left(j^2\right)$.

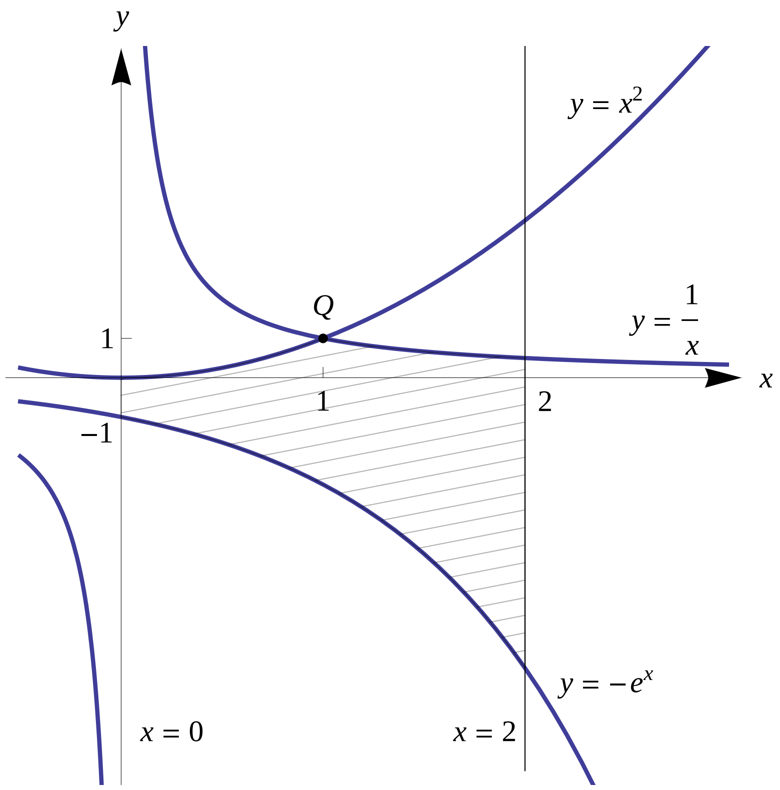
■

Příklad 3.15 *Vypočítejte obsah P obrazce omezeného grafy funkcí $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = -e^x$ a přímkami $x = 0$ a $x = 2$.*

Řešení

Určíme průsečík paraboly a hyperboly:

$x^2 = \frac{1}{x}$
$x^3 = 1 \implies x = 1$
$Q = [1; 1]$



Obrázek 15: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = -e^x$, $x = 0$ a $x = 2$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$P = \int_0^1 \left[x^2 - (-e^x)\right] \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (-e^x)\right] \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + e^x\right]_0^1 + \left[\ln x + e^x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{3} + e^1 - 0 - e^0 + \ln 2 + e^2 - \ln 1 - e^1 = \frac{1}{3} + \ln 2 + e^2 - 1 = e^2 + \ln 2 - \frac{2}{3}$$

Obsah obrazce $P = \left[e^2 + \ln 2 - \frac{2}{3}\right] \left(j^2\right)$.

■

Příklad 3.16 *Určete obsahy rovinných obrazců*

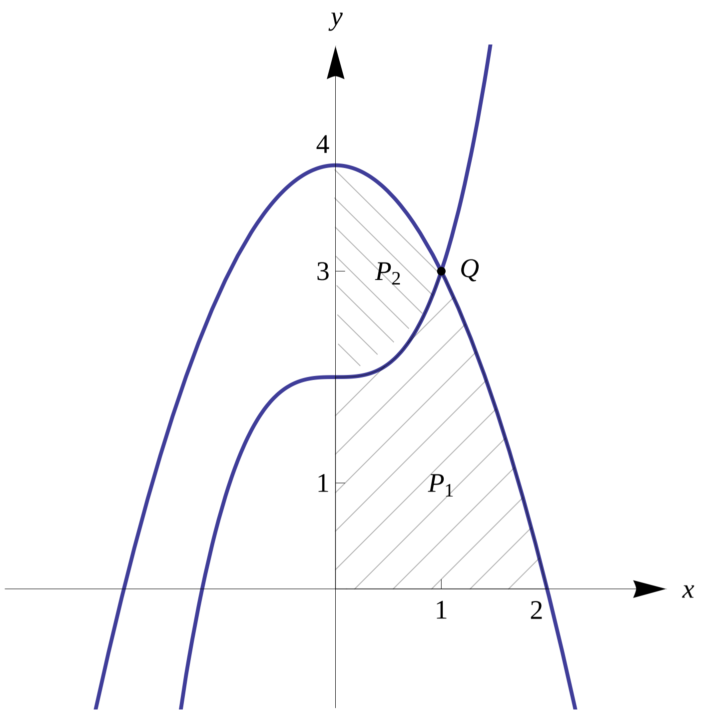
a) P *omezeného parabolou* $y = 4 - x^2$ *a souřadnými osami,*

b) P_1 *omezeného čarami* $y = 4 - x^2$, $y = x^3 + 2$ *a souřadnými osami,*

c) P_2 *omezeného čarami* $y = 4 - x^2$, $y = x^3 + 2$ *a osou* y,

víte-li, že průsečík zadaných parabol je bod $Q = [1; 3]$. *Obrazec leží vždy v* I. *kvadrantu.*

Řešení



Obrázek 16: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = 4 - x^2$, $y = x^3 + 2$, a souřadnými osami x a y
Zdroj: Vlastní zpracování

a) $$P = \int_0^2 \left(4 - x^2\right) \, \mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \qquad P = \frac{16}{3} \left(j^2\right)$$

b) $$P_1 = \int_0^1 \left(x^3 + 2\right) \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(4 - x^2\right) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + 2x\right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + 2 + 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} = 6 - \frac{7}{3} + \frac{1}{4} = \frac{72 - 28 + 3}{12} = \frac{47}{12} \qquad P_1 = \frac{47}{12} \left(j^2\right)$$

c) $$P_2 = \int_0^1 \left[\left(4 - x^2\right) - \left(x^3 + 2\right)\right] \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2 - x^2 - x^3\right) \, \mathrm{d}x = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{24 - 4 - 3}{12} = \frac{17}{12} \qquad P_2 = \frac{17}{12} \left(j^2\right)$$

Poznámka.
Jistě jste si všimli, že $P = P_1 + P_2$.
Přesvědčíme se: $P = P_1 + P_2 = \frac{47}{12} + \frac{17}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$

■

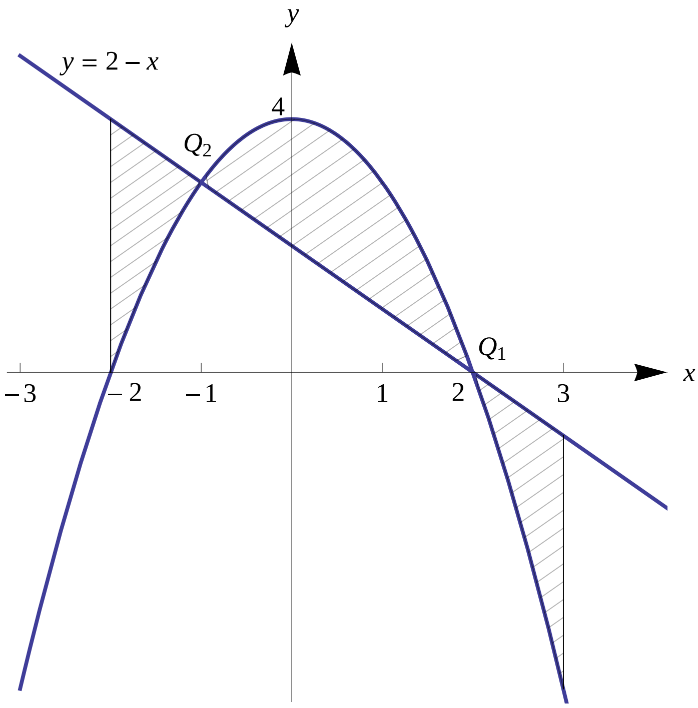
Příklad 3.17 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného křivkami $y = 4 - x^2$ a $y = 2 - x$ pro $x \in \langle -2; 3 \rangle$.*

Řešení

$y = 4 - x^2 \cdots$ parabola
$y = 2 - x \cdots$ přímka

Průsečíky paraboly a přímky:

$4 - x^2 = 2 - x$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x-2)(x+1) = 0$
$x_1 = 2, x_2 = -1 \qquad Q_1 = [2; 0]\,,\ Q_2 = [-1; 3]$



Obrázek 17: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = 4 - x^2$ a $y = 2 - x$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$P = \int_{-2}^{-1} \left[(2-x) - \left(4 - x^2\right)\right]\ \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} \left[\left(4 - x^2\right) - (2-x)\right]\ \mathrm{d}x + \int_{2}^{3} \left[(2-x) - \left(4 - x^2\right)\right]\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{-1} \left(x^2 - x - 2\right)\ \mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right)\ \mathrm{d}x + \int_{2}^{3} \left(x^2 - x - 2\right)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{2}^{3} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{-8}{3} - 2 + 4\right) + \left(\frac{-8}{3} + 2 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) + \left(9 - \frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{8}{3} - 2 - \frac{8}{3} + 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 3 - \frac{9}{2} - \frac{8}{3} + 6 = 17 - \frac{11}{2} - \frac{10}{3} = \frac{102 - 33 - 20}{6} = \frac{49}{6}$$

Obsah obrazce $P = \frac{49}{6}\left(j^2\right)$.

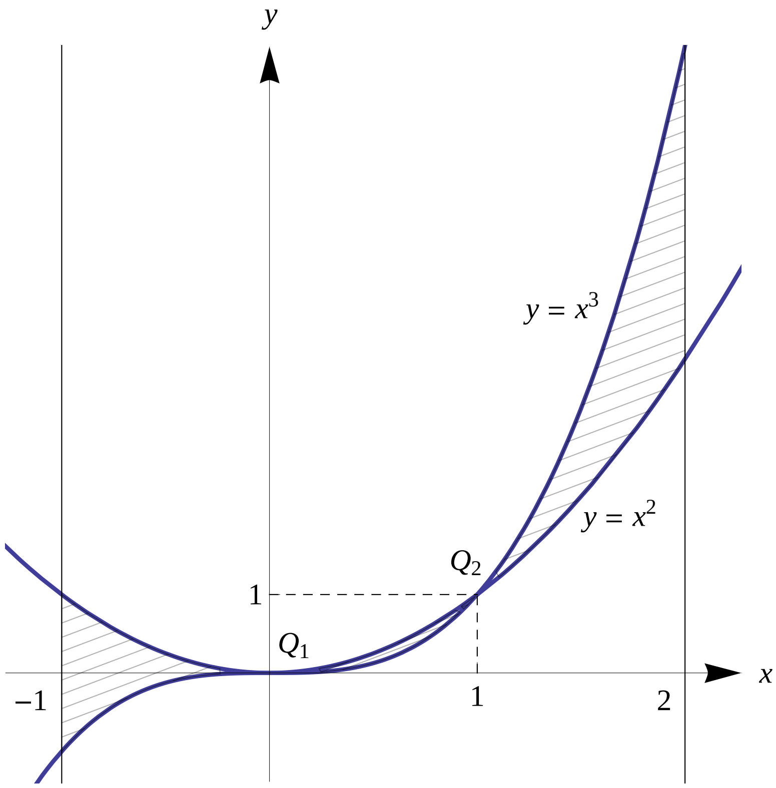
■

Příklad 3.18 *Určete obsah rovinného obrazce omezeného čarami $y = x^2$ a $y = x^3$ na intervalech a) $\langle 0, 1\rangle$, b) $\langle 0, 2\rangle$ a c) $\langle -1, 2\rangle$.*

Řešení

Průsečíky paraboly a kubické paraboly:

$x^2 = x^3$
$x^2\,(x-1) = 0$
$x_1 = 0, \quad Q_1 = [0, 0]$
$x_2 = 1, \quad Q_2 = [1, 1]$



Obrázek 18: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = x^2$ a $y = x^3$
Zdroj: Vlastní zpracování

a) interval $\langle 0, 1\rangle$

$$P_1 = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

$P_1 = \frac{1}{12}\,(j^2)$

b) interval $\langle 0, 2\rangle$

$$P_2 = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)\, \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^3 - x^2\right)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{12} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1 + 48 - 32 - 3 + 4}{12} = \frac{53-35}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$P_2 = \frac{3}{2}\,(j^2)$

c) interval $\langle -1, 2\rangle$

$$P_3 = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x^3\right)\, \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \left(x^3 - x^2\right)\, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$= -\frac{5}{3} - \frac{1}{4} + 4 = \frac{-20 - 3 + 48}{12} = \frac{25}{12}$$

$P_3 = \frac{25}{12}\left(j^2\right)$

■

Příklad 3.19 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a $g(x) = \frac{x^2}{2}$.*

Řešení

Nejdříve vypočítáme průsečíky obou grafů:

$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \quad / \cdot 2\left(1 + x^2\right)$

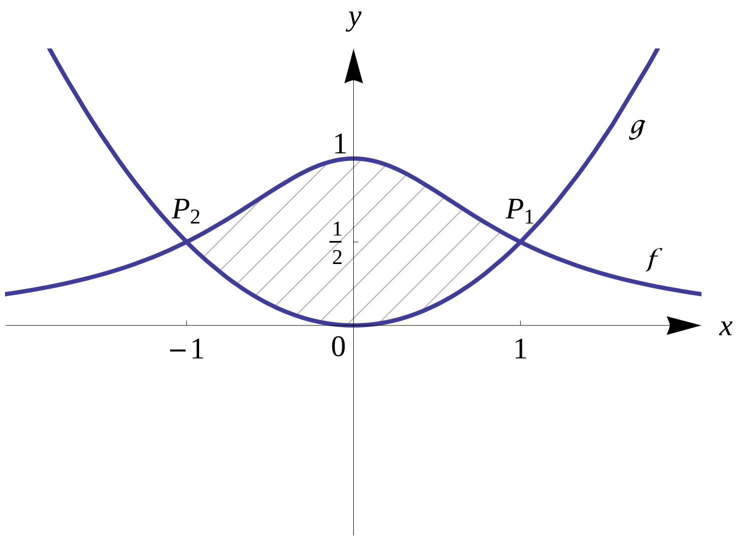
$2 = x^2 + x^4$

$x^4 + x^2 - 2 = 0$

$\left(x^2 + 2\right)\left(x^2 - 1\right) = 0$

$x_{1,2} = \pm 1,\ y_{1,2} = \frac{1}{2} \qquad P_1 = \left[1; \frac{1}{2}\right]$ a $P_2 = \left[-1; \frac{1}{2}\right]$

Funkce f je známá pod názvem „Kadeř Marie Agnesi.“



Obrázek 19: Plocha obrazce omezeného funkcemi $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a $g(x) = \frac{x^2}{2}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Využijeme souměrnosti obrazce vzhledem k ose y.

$$P = 2\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)\, \mathrm{d}x = 2\left[\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6}\right]_{0}^{1} = 2\left(\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{6}\right) = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

Obsah obrazce $P = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(j^2\right)$.

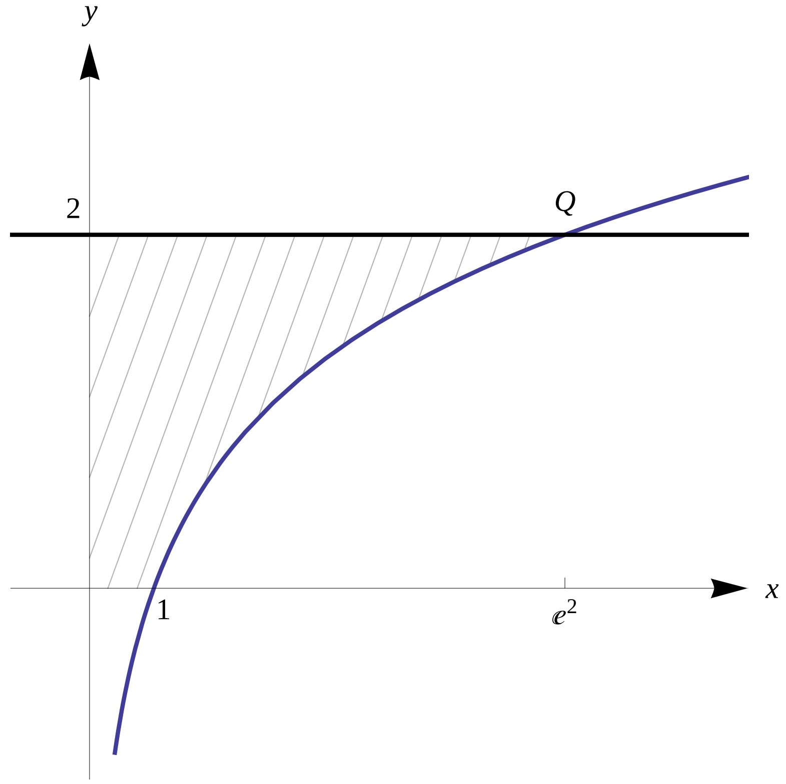
■

Příklad 3.20 *Vypočítejte obsah P obrazce omezeného grafem funkce $y = \ln x$, osou x a přímkou $y = 2$.*

Řešení

Průsečík logaritmické křivky a přímky $y = 2$:

$\ln x = 2$
$x = e^2 \qquad Q = [e^2; 2]$



Obrázek 20: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = \ln x$, $y = 2$ a osou x
Zdroj: Vlastní zpracování

$P = P_1 - P_2$, kde P_1 je obsah obdélníka o stranách 2 a e^2, tedy $P_1 = 2e^2$ a P_2 je obsah plochy pod parabolou na intervalu $\langle 1, e^2 \rangle$.

Poznámka.

P_1 lze určit i takto: $P_1 = \displaystyle\int_0^{e^2} 2 \, \mathrm{d}x = \Big[2x\Big]_0^{e^2} = 2e^2$

$$P_2 = \int_1^{e^2} \ln x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right| = \Big[x \ln x\Big]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \cdot x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x\Big]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 1 \, \mathrm{d}x =$$

$$= e^2 \ln e^2 - 1 \ln 1 - \Big[x\Big]_1^{e^2} = e^2 \cdot 2 - 0 - \big(e^2 - 1\big) = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$$

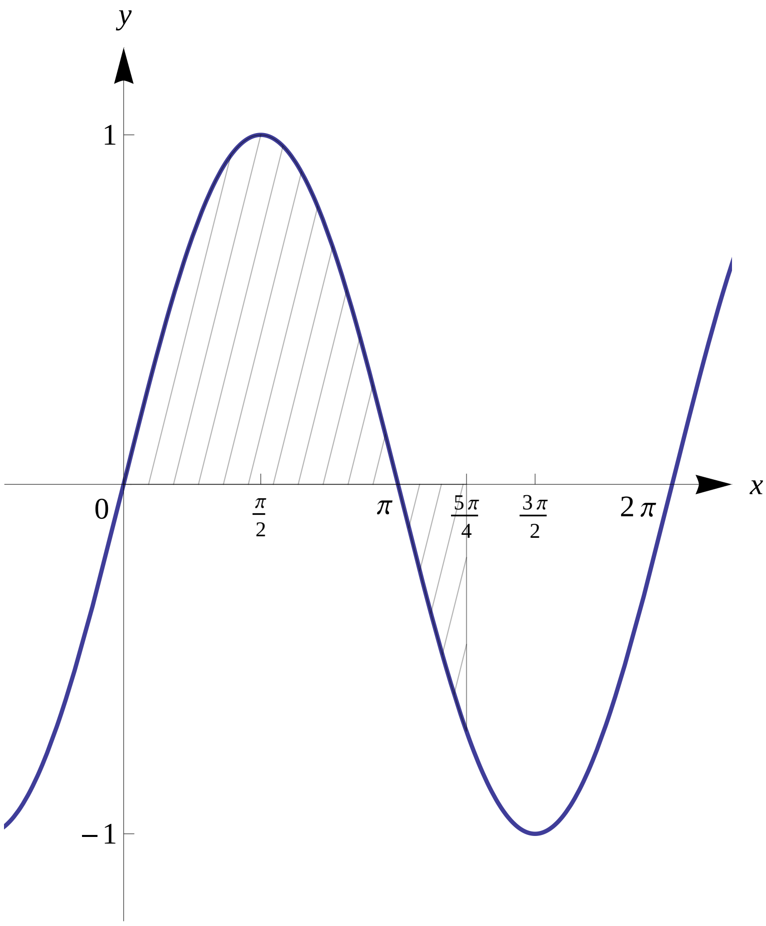
$$P = P_1 - P_2 = 2e^2 - \big(e^2 + 1\big) = e^2 - 1$$

Obsah obrazce $P = \big(e^2 - 1\big) \, \big(j^2\big)$.

■

Příklad 3.21 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce ohraničeného grafem funkce $f(x) = \sin x$ a osou x v intervalu $\langle 0; \frac{5\pi}{4} \rangle$.*

Řešení



Obrázek 21: Plocha obrazce omezeného funkcí $f(x) = \sin x$ a osou x
Zdroj: Vlastní zpracování

$$P = \int_0^{\pi} \sin x \ \mathrm{d}x - \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \sin x \ \mathrm{d}x = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} - \Big[-\cos x \Big]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} =$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \left(\cos \frac{5}{4}\pi - \cos\pi \right) = -(-1) + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - (-1) = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Obsah obrazce $P = \left(3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(j^2\right)$.

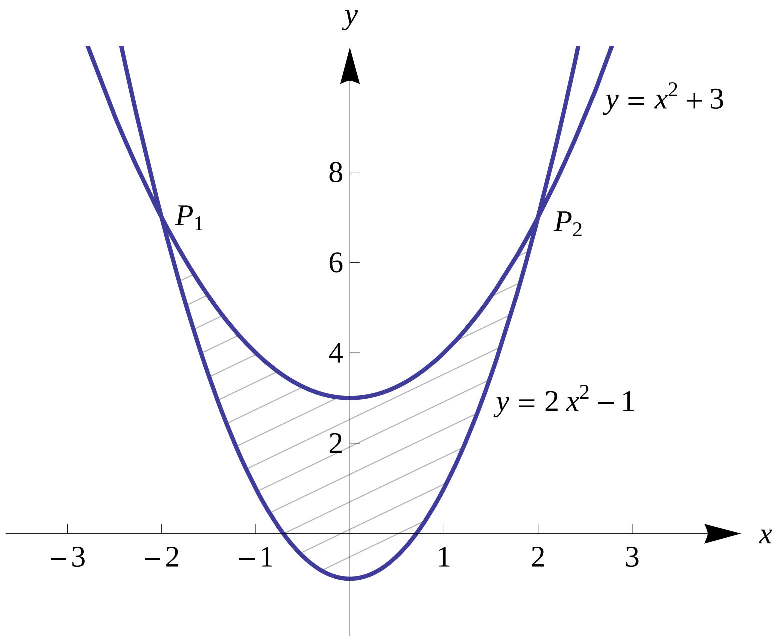
■

Příklad 3.22 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce mezi parabolami $y = x^2 + 3$ a $y = 2x^2 - 1$.*

Řešení

Průsečíky parabol:

$x^2 + 3 = 2x^2 - 1$
$x^2 = 4$
$x_{1,2} = \pm 2$
$P_1 = [-2; 7]$ a $P_2 = [2; 7]$



Obrázek 22: Plocha obrazce omezeného křivkami $y = x^2 + 3$ a $y = 2x^2 - 1$
Zdroj: Vlastní zpracování

Využijeme souměrnosti obrazce vzhledem k ose y.

$$P = 2\int_0^2 \left[\left(x^2+3\right) - \left(2x^2-1\right)\right]\ \mathrm{d}x = 2\int_0^2 \left(-x^2+4\right)\ \mathrm{d}x = 2\left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^2 = 2\left(-\frac{8}{3} + 8\right) =$$

$$= 2\frac{-8+24}{3} = \frac{32}{3}$$

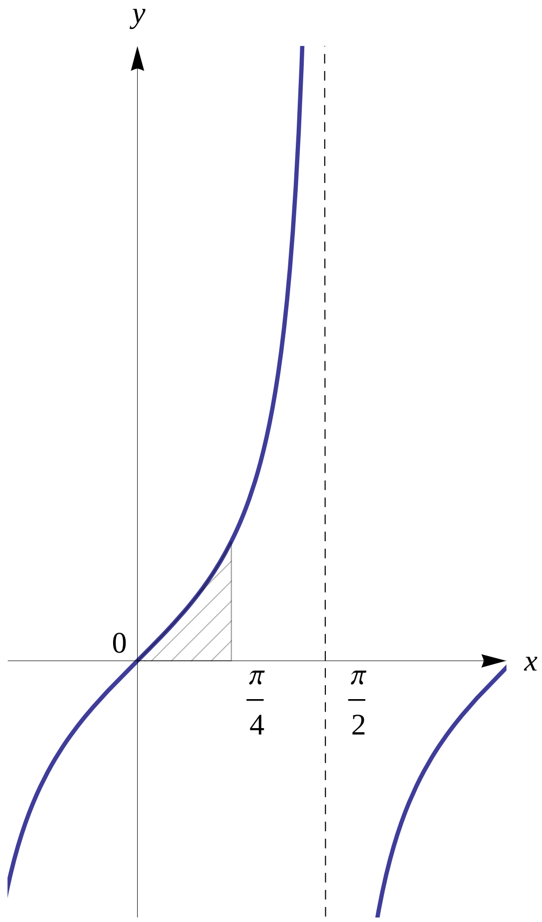
Obsah obrazce $P = 10\frac{2}{3}\ \left(j^2\right)$.

■

Výpočet objemu V tělesa vzniklého rotací rovinného útvaru omezeného křivkami $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ kolem osy x podle vzorce $V = \pi \int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x$.

Příklad 3.23 *Vypočítejte objem V tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce omezeného křivkami $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ kolem osy x.*

Řešení



Obrázek 23: Obrazec omezený křivkami $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$ a $x = \frac{\pi}{4}$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\ \mathrm{d}x$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)\ \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c$$

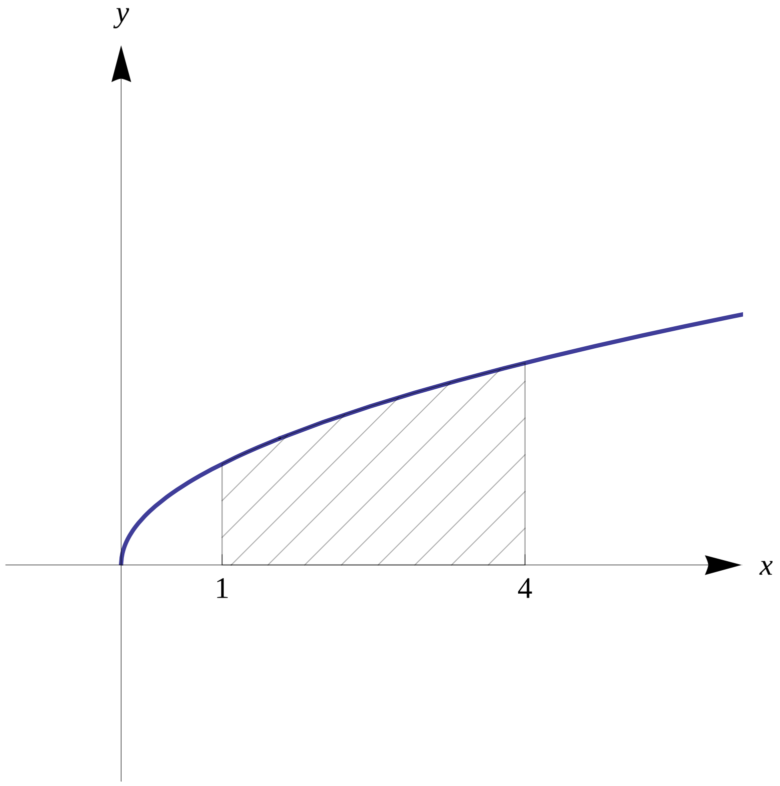
$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x\ \mathrm{d}x = \pi \Big[\operatorname{tg} x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - (\operatorname{tg} 0 - 0)\right] = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} - 0\right) = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Objem rotačního tělesa $V = \left[\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\right] (j^3)$.

■

Příklad 3.24 *Vypočítejte objem V tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce omezeného křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$ a $x = 4$ kolem osy x.*

Řešení



Obrázek 24: Obrazec omezený křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$ a $x = 4$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$V = \pi \int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_1^4 x \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\right) = \pi \frac{15}{2}$$

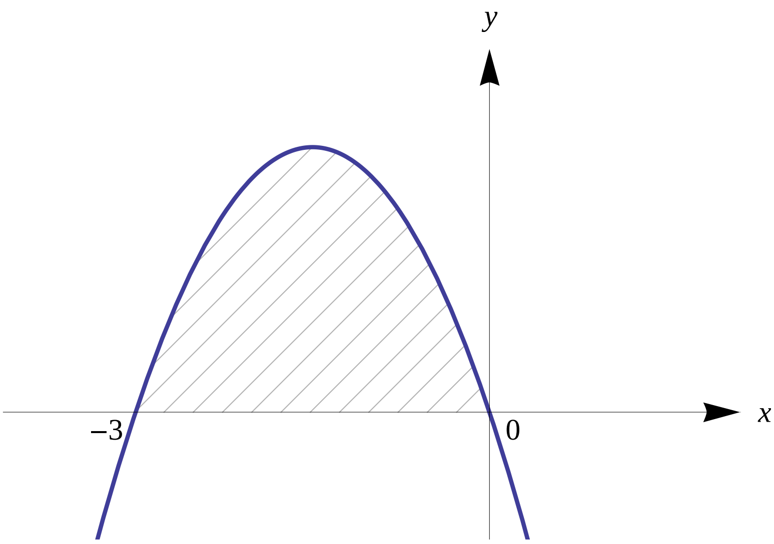
Objem rotačního tělesa $V = \frac{15}{2}\pi \left(j^3\right)$.

■

Příklad 3.25 *Vypočítejte objem V tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce kolem osy x, přičemž obrazec je omezen čarami $y = -3x - x^2$ a $y = 0$.*

Řešení

Průsečíky paraboly s osou x:
$-3x - x^2 = 0$
$-x(3 + x) = 0 \implies x_1 = 0;\ x_2 = -3$



Obrázek 25: Obrazec omezený křivkami $y = -3x - x^2$ a $y = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$V = \pi \int_{-3}^{0} \left(-3x - x^2\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-3}^{0} \left(9x^2 + 6x^3 + x^4\right) \, \mathrm{d}x = \pi \left[9\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_{-3}^{0} =$$

$$= \pi \left[0 - \left(3 \cdot (-3)^3 + \frac{3}{2}(-3)^4 + \frac{(-3)^5}{5}\right)\right] = -\pi \left(-3^4 + \frac{3}{2} \cdot 3^4 + \frac{(-3)^5}{5}\right) = -\pi \left(\frac{1}{2} \cdot 3^4 - \frac{3}{5} \cdot 3^4\right) =$$

$$= -\pi \cdot \frac{5 - 6}{10} \cdot 3^4 = -\pi \cdot \frac{-1}{10} \cdot 3^4 = \frac{81}{10}\pi$$

Objem daného tělesa je $V = 8{,}1\pi \left(j^3\right)$.

■

Příklad 3.26 *Vypočítejte objem V tělesa, které vznikne rotací obrazce kolem osy x, přičemž obrazec je omezen křivkami $y = \sqrt{x}$ a $y = \sqrt{2x-4}$ a osou x.*

Řešení

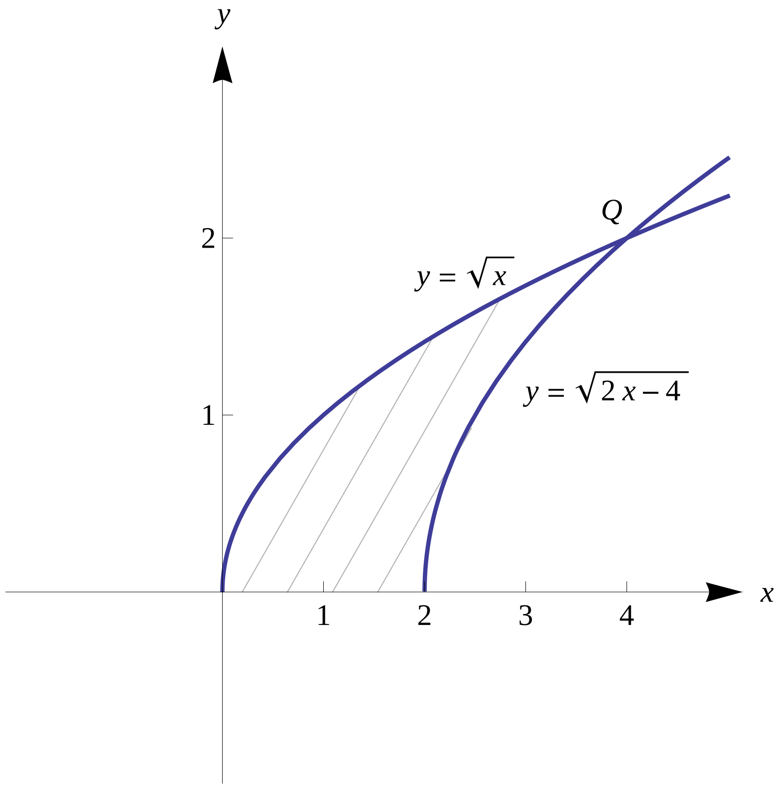
Obě křivky jsou paraboly s osou v ose x.

Určíme průsečík parabol:

$\sqrt{x} = \sqrt{2x-4} \quad / \, ^2$
$x = 2x - 4$
$x = 4 \qquad Q = [4; 2]$

Parabola $y = \sqrt{x}$ má vrchol v počátku.

Parabola $y = \sqrt{2x-4}$ má vrchol v bodě $[2; 0]$.



Obrázek 26: Obrazec omezený křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{2x-4}$ a osou x
Zdroj: Vlastní zpracování

$$V = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx - \pi \int_2^4 \left(\sqrt{2x-4}\right)^2 \, dx = \pi \left[\int_0^4 x \, dx - \int_2^4 (2x-4) \, dx \right] =$$

$$= \pi \left[\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 - \left[x^2 - 4x \right]_2^4 \right] = \pi \left[8 - 0 - (16 - 16 - 4 + 8) \right] = 4\pi$$

Objem daného tělesa je $V = 4\pi \, \left(j^3\right)$.

■

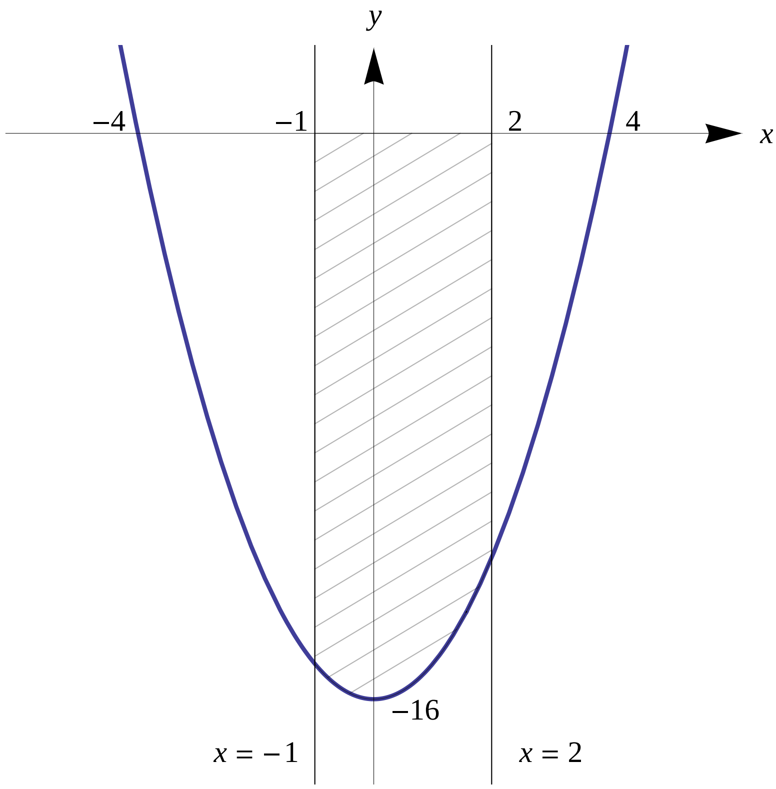
Příklad 3.27 *Vypočítejte objem V tělesa, které vznikne rotací rovinného obrazce kolem osy x, přičemž obrazec je omezen čarami $y = x^2 - 16$, $x = -1$, $x = 2$ a $y = 0$.*

Řešení

Průsečíky paraboly s osou x:

$x^2 - 16 = 0 \implies x_{1,2} = \pm 4$

Vrchol paraboly je v bodě $[0; -16]$.



Obrázek 27: Obrazec omezený křivkami $y = x^2 - 16$, $x = -1$, $x = 2$ a $y = 0$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left(x^2 - 16\right)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{2} \left(x^4 - 32x^2 + 256\right) \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{32x^3}{3} + 256x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \pi \left[\frac{2^5}{5} - \frac{32 \cdot 2^3}{3} + 256 \cdot 2 - \left(\frac{(-1)^5}{5} - \frac{32\,(-1)^3}{3} + 256\,(-1)\right)\right] =$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} - \frac{256}{3} + 512 - \left(\frac{-1}{5} + \frac{32}{3} - 256\right)\right] = \pi \left(\frac{33}{5} - \frac{288}{3} + 768\right) = \pi \left(\frac{33}{5} - 96 + 768\right) = 678\frac{3}{5}\pi$$

Objem daného tělesa je $V = 678\frac{3}{5}\pi \left(j^3\right)$.

■

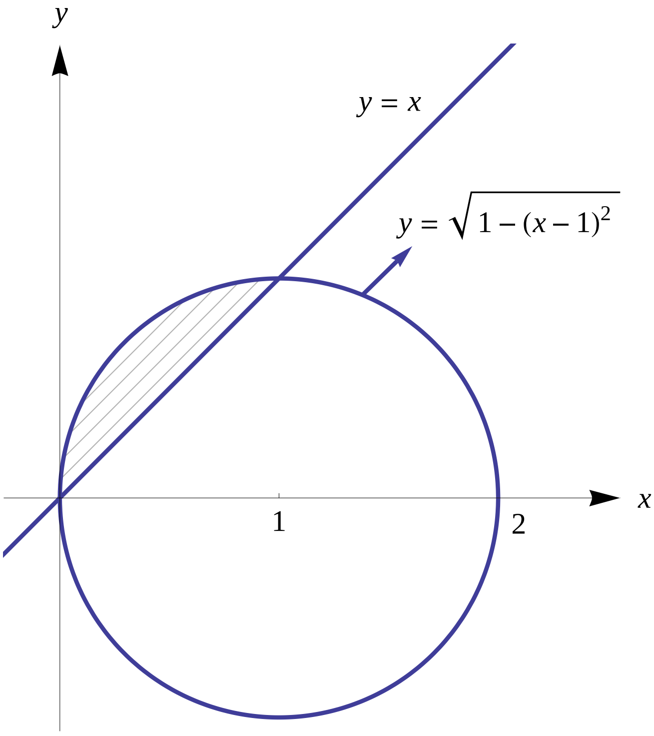
Příklad 3.28 *Vypočtěte objem V tělesa, které vznikne rotací menšího rovinného obrazce ohraničeného kružnicí $(x-1)^2+y^2=1$ a přímkou $y=x$ kolem osy x.*

Řešení

Rovnice $(x-1)^2+y^2=1$ je rovnice kružnice se středem $S=[1;0]$ a poloměrem $r=1$.
Stanovíme rovnici horní půlkružnice:

$y^2=1-(x-1)^2 \Rightarrow |y|=\sqrt{1-(x-1)^2}$

Protože $y\geq 0$, obdržíme $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$.



Obrázek 28: Obrazec omezený kružnicí $(x-1)^2+y^2=1$ a přímkou $y=x$
Zdroj: Vlastní zpracování

$$V=\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{1-(x-1)^2}\right)^2-x^2\right]\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(1-(x-1)^2-x^2\right)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\pi\int_0^1\left(1-x^2+2x-1-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(2x-2x^2\right)\,\mathrm{d}x=$$

$$=2\pi\int_0^1\left(x-x^2\right)\,\mathrm{d}x=2\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2\pi\frac{3-2}{6}=2\pi\cdot\frac{1}{6}=\frac{\pi}{3}$$

Objem rotačního tělesa $V=\frac{\pi}{3}\left(j^3\right)$.

Poznámka.
Objem lze vypočítat i na základě stereometrických vzorců. Vytvořené rotační těleso je polokoule, z níž je vyříznut kužel.

$V=\frac{2}{3}\pi r^3-\frac{1}{3}\pi r^2 v=\frac{2}{3}\pi 1^3-\frac{1}{3}\pi 1^2\cdot 1=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$

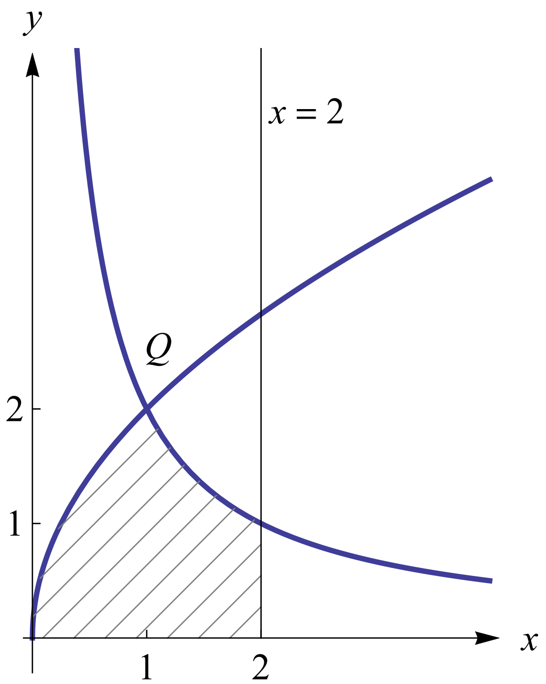
■

Příklad 3.29 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného křivkami $y = 2\sqrt{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $x = 2$ a osou x. Dále určete objem V tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x.*

Řešení

Křivka $y = 2\sqrt{x}$ je parabola s vrcholem v počátku a osou v ose x.
Křivka $y = \frac{2}{x}$ je hyperbola se středem v počátku.
Určíme průsečík paraboly a hyperboly:

$2\sqrt{x} = \frac{2}{x} \quad / : 2 \qquad y(1) = 2\sqrt{1} = 2$
$\sqrt{x} = \frac{1}{x} \quad /x \qquad Q = [1; 2]$
$x^{\frac{3}{2}} = 1$
$x = 1$



Obrázek 29: Obrazec omezený křivkami $y = 2\sqrt{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $x = 2$ a osou x
Zdroj: Vlastní zpracování

$$P = \int_0^1 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + 2\Big[\ln|x|\Big]_1^2 = \frac{4}{3}(1-0) + 2(\ln 2 - \ln 1) =$$

$$= \frac{4}{3} + 2\ln 2 = \frac{4}{3} + \ln 4$$

$$V = \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{x}\right)^2\,\mathrm{d}x + \pi \int_1^2 \left(\frac{2}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\left\{\int_0^1 4x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x\right\} =$$

$$= \pi\left\{\left[2x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{4}{x}\right]_1^2\right\} = \pi\left\{2 - \frac{4}{2} + \frac{4}{1}\right\} = 4\pi$$

Obsah rovinného obrazce $P = \left[\frac{4}{3} + \ln 4\right]\left(j^2\right)$ a objem rotačního tělesa $V = 4\pi\left(j^3\right)$.

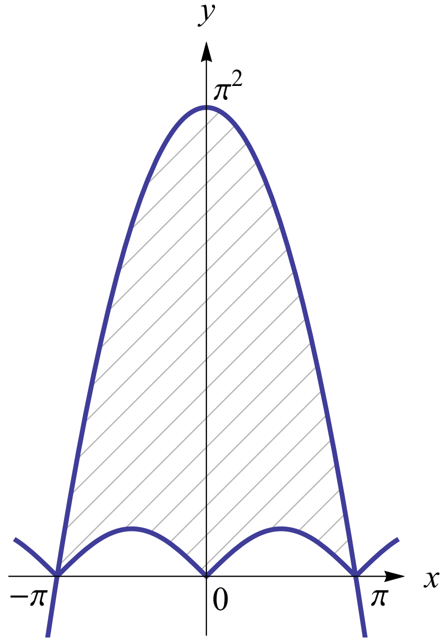
■

Příklad 3.30 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného křivkami $y = \pi^2 - x^2$ a $y = |\sin x|$ a objem V tělesa vzniklého rotací tohoto obrazce kolem osy x.*

Řešení

Průsečíky paraboly s osou x:

$\pi^2 - x^2 = 0 \qquad P_1 = [-\pi; 0]\,,\ P_2 = [\pi; 0]$
$x^2 = \pi^2$
$x_{1,2} = \pm\pi$



Obrázek 30: Obrazec omezený křivkami $y = \pi^2 - x^2$ a $y = |\sin x|$
Zdroj: Vlastní zpracování

Obrazec je souměrný podle osy y.

$$P = 2\int_0^{\pi} \left(\pi^2 - x^2 - \sin x\right)\ \mathrm{d}x = 2\left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3} + \cos x\right]_0^{\pi} =$$

$$= 2\left[\pi^3 - \frac{\pi^3}{3} + \cos\pi - \cos 0\right] = 2\left(\frac{2}{3}\pi^3 - 1 - 1\right) = \frac{4}{3}\pi^3 - 4$$

$$V = 2\pi\int_0^{\pi} \left[\left(\pi^2 - x^2\right)^2 - \sin^2 x\right]\ \mathrm{d}x = 2\pi\int_0^{\pi} \left(\pi^4 - 2\pi^2 x^2 + x^4 - \sin^2 x\right)\ \mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\left[\pi^4 x - 2\pi^2\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = 2\pi\left[\pi^5 - \frac{2}{3}\pi^5 + \frac{1}{5}\pi^5 - \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\sin 2\pi\right] =$$

$$= 2\pi\left(\frac{15 - 10 + 3}{15}\pi^5 - \frac{1}{2}\pi\right) = 2\pi\left(\frac{8}{15}\pi^5 - \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{16}{15}\pi^6 - \pi^2$$

Obsah obrazce $P = \left[\frac{4}{3}\pi^3 - 4\right]\left(j^2\right)$.

Objem rotačního tělesa $V = \left[\frac{16}{15}\pi^6 - \pi^2\right]\left(j^3\right)$.

Poznámka.
Při výpočtu integrálu jsme využili vzorec $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$.

■

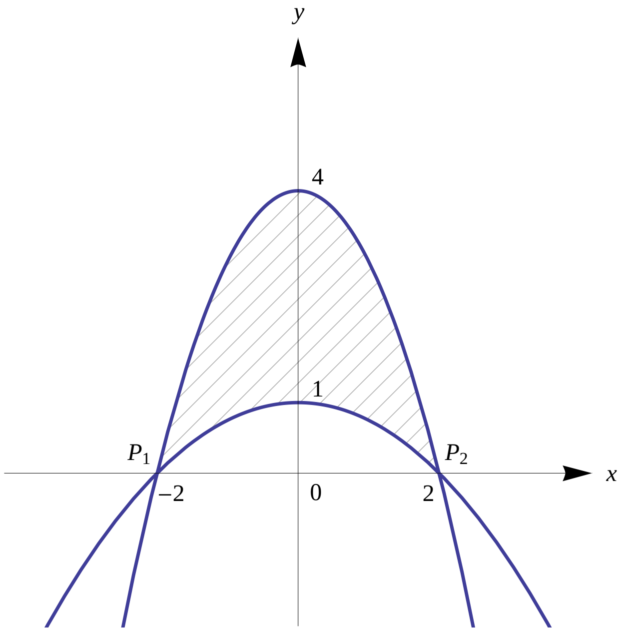
Příklad 3.31 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného křivkami $y = 4 - x^2$ a $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ a objem V dutého tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x.*

Řešení

Obě křivky jsou paraboly s vrcholy na ose y a jsou otevřené směrem dolů.
Parabola $y = 4 - x^2$ má vrchol v bodě $[0; 4]$ a parabola $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ má vrchol v bodě $[0; 1]$.
Průsečíky parabol s osou x:

$$\begin{array}{ll} -\frac{1}{4}x^2 + 1 = 0 & 4 - x^2 = 0 \\ -x^2 + 4 = 0 & x^2 = 4 \\ x^2 = 4 & x_{1,2} = \pm 2 \\ x_{1,2} = \pm 2 & \end{array}$$

Obě paraboly protínají osu x v bodech $P_1 = [-2; 0]$ a $P_2 = [2; 0]$.



Obrázek 31: Obrazec omezený křivkami $y = 4 - x^2$ a $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$
Zdroj: Vlastní zpracování

Využijeme souměrnosti obrazce podle osy y.

$$P = 2\int_0^2 \left[(4 - x^2) - \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1\right)\right]\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 \left(3 - \frac{3}{4}x^2\right)\,\mathrm{d}x = 6\left[x - \frac{x^3}{12}\right]_0^2 =$$

$$= 6 \cdot \left(2 - \frac{8}{12}\right) = 6\left(2 - \frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8$$

$$V = 2\pi\int_0^2 \left[(4 - x^2)^2 - \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2\right]\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\int_0^2 \left(15 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{16}x^4\right)\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot 15\left[x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{16}\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 30\pi\left(2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{32}{5}\right) =$$

$$= 30\pi\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = 30\pi\frac{30 - 20 + 6}{15} = 2\pi \cdot 16 = 32\pi$$

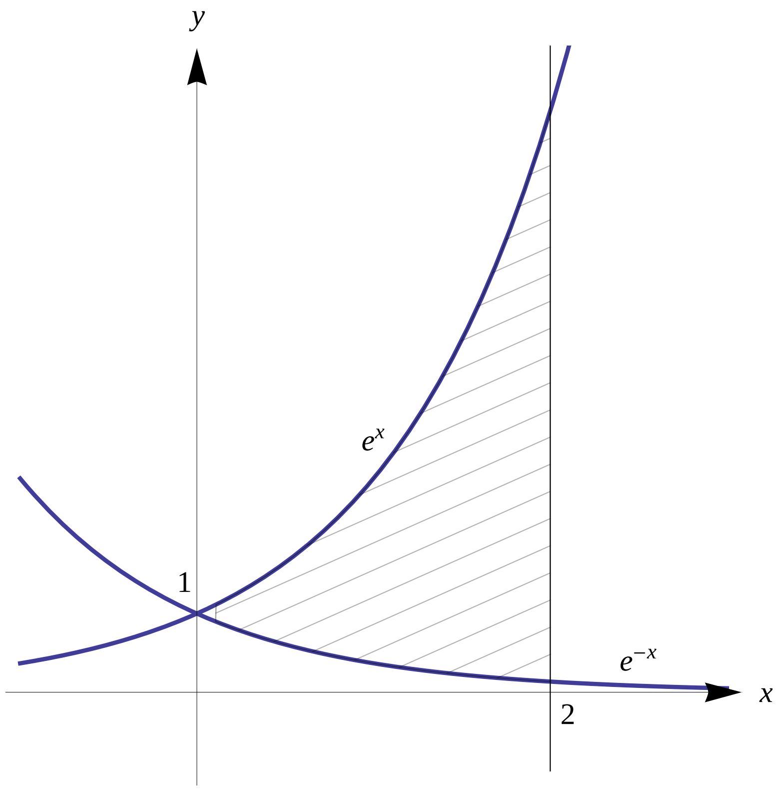
Obsah rovinného obrazce $P = 8\,(j^2)$ a objem rotačního tělesa $V = 32\pi\,(j^3)$.

■

Příklad 3.32 *Vypočítejte obsah P rovinného obrazce omezeného grafy funkcí $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$, osou y a přímkou $x = 2$. Vypočítejte objem V tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x. Dovedete si vzniklé rotační těleso představit?*

Řešení

Grafy funkcí f a g jsou exponenciály, které se protínají na ose y v bodě $[0,1]$.



Obrázek 32: Obrazec omezený funkcemi $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$, přímkou $x = 2$ a osou y
Zdroj: Vlastní zpracování

$$P = \int_0^2 \left(e^x - e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x = \Big[e^x - \left(-e^{-x}\right)\Big]_0^2 = \Big[e^x + e^{-x}\Big]_0^2 = e^2 + e^{-2} - e^0 - e^0 = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2$$

$$V = \pi \int_0^2 \Big[(e^x)^2 - \left(e^{-x}\right)^2\Big]\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^2 \left(e^{2x} - e^{-2x}\right)\,\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\Big[e^{2x} + e^{-2x}\Big]_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(e^4 + e^{-4} - e^0 - e^0\right) = \frac{\pi}{2}\left(e^4 + \frac{1}{e^4} - 2\right)$$

Obsah obrazce $P = \left[e^2 + \frac{1}{e^2} - 2\right]\left(j^2\right)$ a objem rotačního tělesa $V = \left[\frac{\pi}{2}\left(e^4 + \frac{1}{e^4} - 2\right)\right]\left(j^3\right)$.

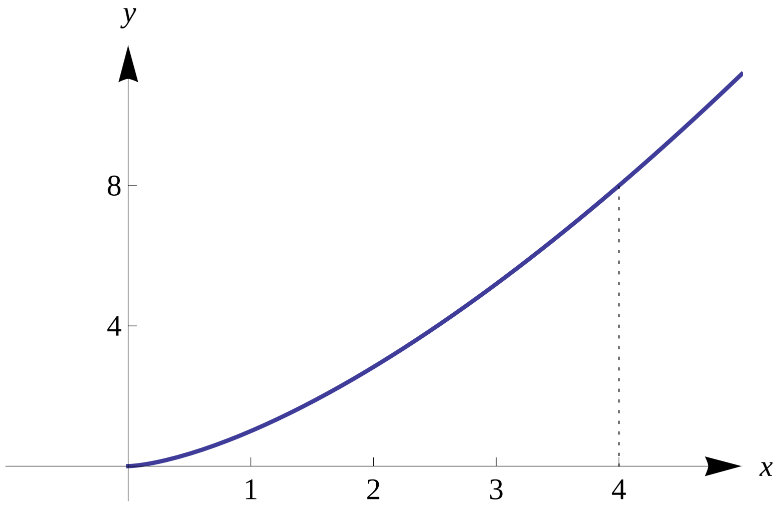
■

Výpočet délky l rovinné křivky $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$ podle vzorce

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, \mathrm{d}x.$$

Příklad 3.33 *Vypočítejte délku l grafu funkce $f(x) = \sqrt{x^3}$ na intervalu $x \in \langle 0; 4\rangle$.*

Řešení



Obrázek 33: Graf funkce $f(x) = \sqrt{x^3}$
Zdroj: Vlastní zpracování

Vypočteme $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$.

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, \mathrm{d}x$$

Vypočteme nejprve neurčitý integrál.

$$\int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{9}{4}x = z \\ \frac{9}{4}\mathrm{d}x = \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}x = \frac{4}{9}\mathrm{d}z \end{array} \right| = \frac{4}{9}\int \sqrt{z}\, \mathrm{d}z = \frac{4}{9}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{z^3} = \frac{8}{27}\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}$$

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, \mathrm{d}x = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}\cdot 4\right)^3} - \sqrt{(1+0)^3}\right) =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

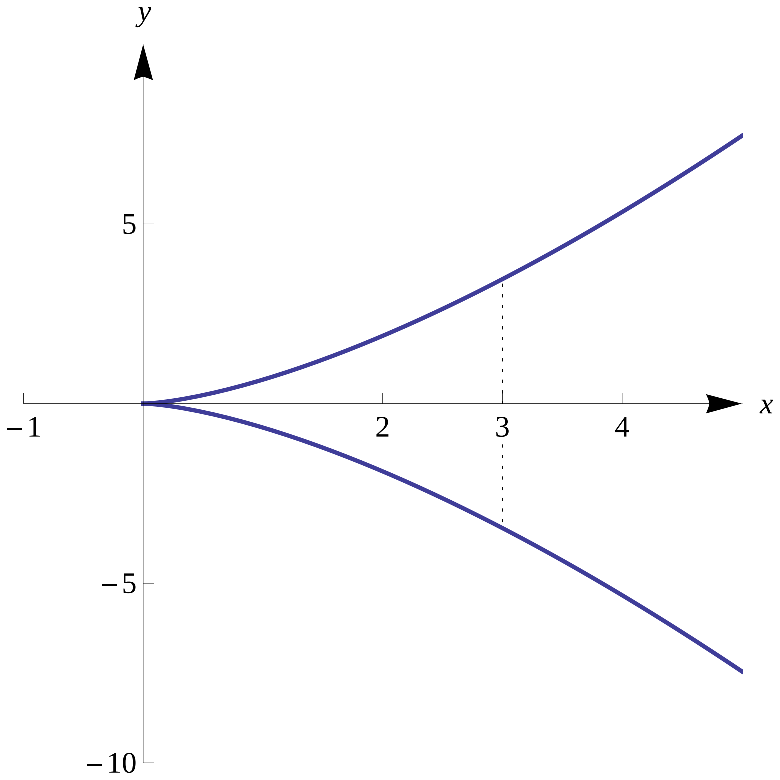
Délka křivky $l = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$ (j).

■

Příklad 3.34 *Vypočítejte délku l oblouku křivky $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ na intervalu $x \in \langle 0; 3\rangle$.*

Řešení

Křivka je semikubická parabola, která je souměrná podle osy x. Spočítáme délku l_1 poloviny oblouku, který se nachází nad osou x.



Obrázek 34: Graf křivky $y^2 = \frac{4}{9}x^3$
Zdroj: Vlastní zpracování

Vypočteme $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ a $y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$.

$$l_1 = \int_0^3 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(1+x)^3}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+3)^3} - \sqrt{(1+0)^3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - 1\right) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

$$l = 2l_1 = 2 \cdot \frac{14}{3} = \frac{28}{3}$$

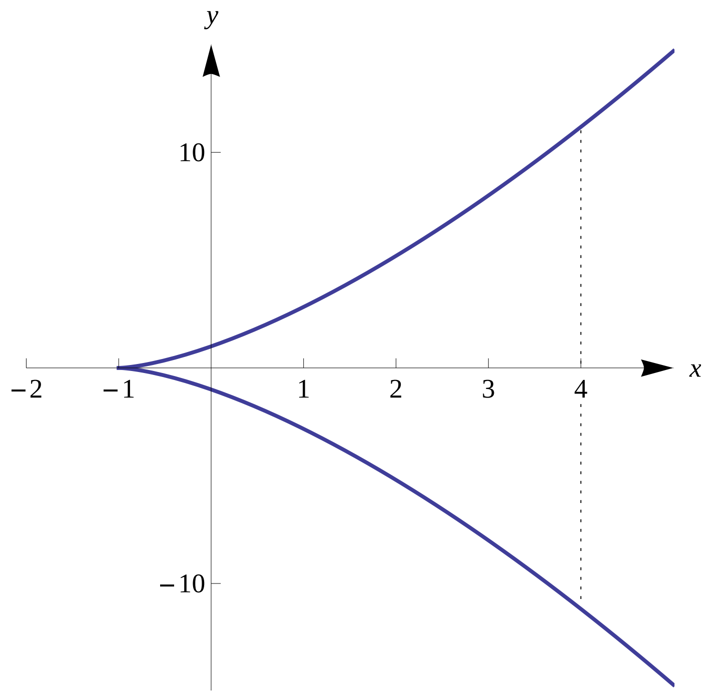
Délka oblouku křivky $l = \frac{28}{3}\,(j)$.

■

Příklad 3.35 *Vypočítejte délku l oblouku křivky $y^2 = (x+1)^3$ na intervalu $x \in \langle -1; 4 \rangle$.*

Řešení

Křivka je semikubická parabola souměrná podle osy x, takže délka oblouku $l = 2l_1$, kde l_1 je část oblouku nacházející se nad osou x.



Obrázek 35: Graf křivky $y^2 = (x+1)^3$
Zdroj: Vlastní zpracování

Vypočteme $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$ a $y' = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$.

$$l_1 = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+1)}\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{4} \sqrt{\frac{13+9x}{4}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{4} \sqrt{13+9x}\, \mathrm{d}x$$

Vypočteme neurčitý integrál.

$$\int \sqrt{13+9x}\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 13+9x = z \\ 9\mathrm{d}x = \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}x = \frac{1}{9}\mathrm{d}z \end{array} \right| = \frac{1}{9}\int \sqrt{z}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{9}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{27}\sqrt{z^3} = \frac{2}{27}\sqrt{(13+9x)^3}$$

$$l_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{4} \sqrt{13+9x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{27}\left[\sqrt{(13+9x)^3}\right]_{-1}^{4} = \frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3} - \sqrt{4^3}\right) = \frac{1}{27}(49\cdot 7 - 4\cdot 2) =$$

$$= \frac{1}{27}(343-8) = \frac{1}{27}\cdot 335 = \frac{335}{27}$$

$$l = 2l_1 = 2\cdot\frac{335}{27} = \frac{670}{27}$$

Délka oblouku křivky $l = \frac{670}{27}\,(j)$.

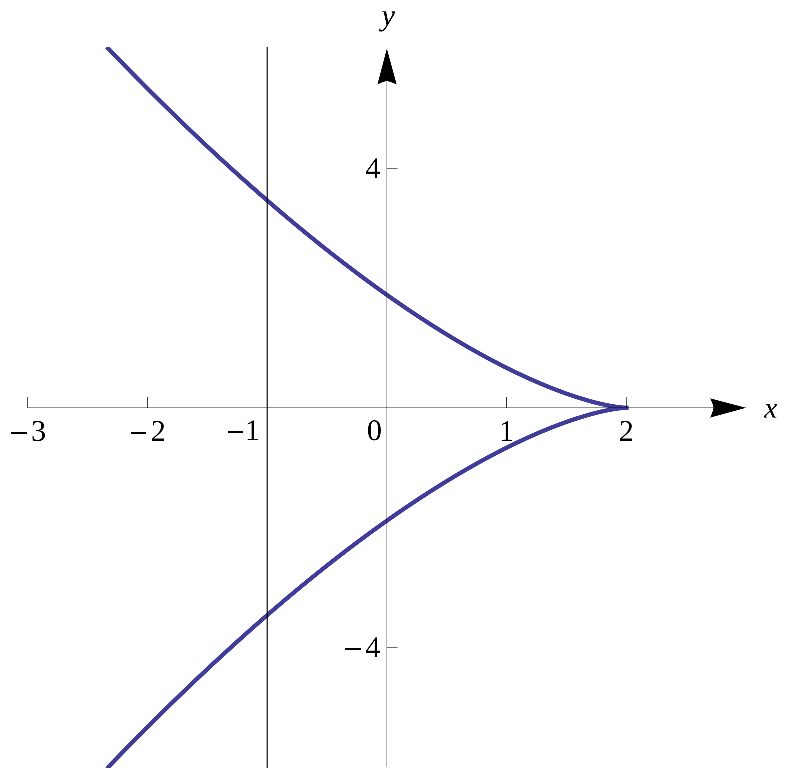
■

Příklad 3.36 *Vypočítejte délku l oblouku křivky $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$ ležící v pravé polorovině ohraničené přímkou $x = -1$.*

Řešení

Křivka je semikubická parabola souměrná podle osy x, takže oblouk se skládá ze dvou shodných částí. Pravou mez určíme jako průsečík grafu křivky s osou x (tj. $y = 0$).

$0 = \frac{4}{9}(2-x)^{\frac{3}{2}} \implies x = 2 \qquad Q = [2; 0]$



Obrázek 36: Graf křivky $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$
Zdroj: Vlastní zpracování

Vypočteme $y = \frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}$ pro $x \in \langle -1, 2\rangle$.
$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(2-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -(2-x)^{\frac{1}{2}}$

$$l_1 = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + \left[-(2-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2}\, dx = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + (2-x)} = \int_{-1}^{2} \sqrt{3-x}\, dx = -\left[\frac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\left[\sqrt{(3-x)^3}\right]_{-1}^{2} = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{1} - \sqrt{4^3}\right) = -\frac{2}{3}(1-8) = -\frac{2}{3} \cdot (-7) = \frac{14}{3}$$

$$l = 2l_1 = 2 \cdot \frac{14}{3} = \frac{28}{3}$$

Délka oblouku křivky $l = \frac{28}{3}$ (j).

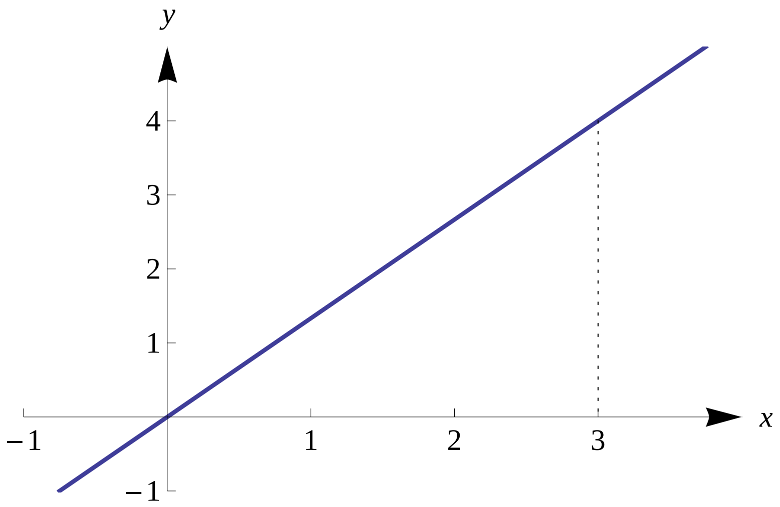
■

Výpočet obsahu S plochy, která vznikne rotací grafu funkce $y = f(x)$ kolem osy x, když $x \in \langle a; b\rangle$, podle vzorce $S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, \mathrm{d}x$.

Příklad 3.37 *Vypočítejte obsah S plochy, která vznikne rotací grafu funkce $f(x) = \frac{4}{3}x$, $x \in \langle 0; 3\rangle$, kolem osy x.*

Řešení

Grafem funkce je přímka procházející počátkem souřadnic.



Obrázek 37: Graf funkce $f(x) = \frac{4}{3}x$
Zdroj: Vlastní zpracování

Vypočteme $f'(x) = \frac{4}{3}$.

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{4}{3}x\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}\, \mathrm{d}x = 2\pi \cdot \frac{4}{3}\int_0^3 x\sqrt{1 + \frac{16}{9}}\, \mathrm{d}x = \frac{8}{3}\pi \int_0^3 x\sqrt{\frac{25}{9}}\, \mathrm{d}x = \frac{8}{3}\pi \cdot \frac{5}{3}\int_0^3 x\, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{40}{9}\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{40}{9}\pi\left(\frac{9}{2} - 0\right) = 20\pi$$

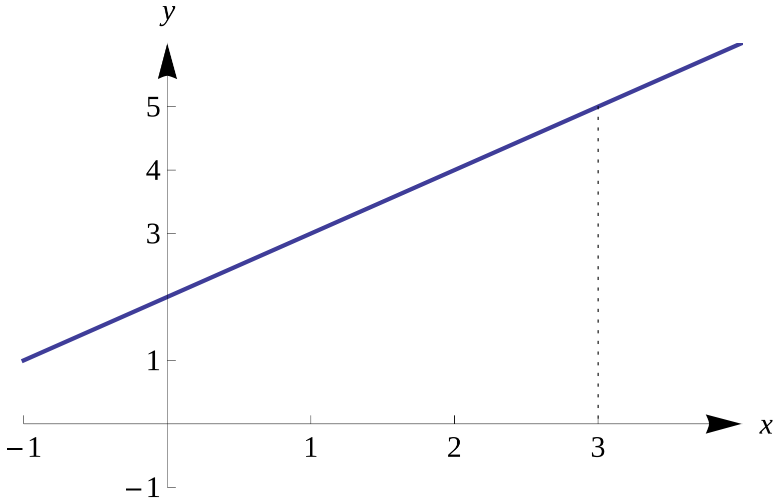
Obsah rotační plochy $S = 20\pi\ \left(j^2\right)$.

Poznámka.
Víte, co jste vlastně spočítali? Pokud tipujete, že obsah pláště rotačního kužele, tak tipujete správně. Podle známého stereometrického vzorce je obsah S pláště rotačního kužele o poloměru podstavy $r = 4$ a straně $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ roven $S = \pi r s = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi$.

■

Příklad 3.38 *Určete obsah S plochy, která vznikne rotací úsečky $y = x + 2$, $x \in \langle 0; 3\rangle$, kolem osy x.*

Řešení



Obrázek 38: Graf funkce $y = x + 2$
Zdroj: Vlastní zpracování

Vypočteme $y' = 1$.

$$S = 2\pi \int_0^3 (x+2)\sqrt{1+1^2}\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\pi \int_0^3 (x+2)\ \mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{9}{2} + 6 - 0\right) = 2\sqrt{2}\pi \frac{9+12}{2} = 21\sqrt{2}\pi$$

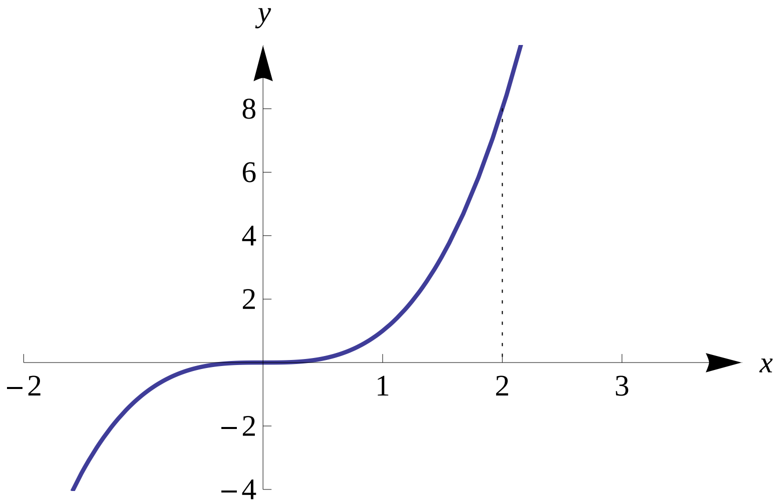
Obsah rotační plochy $S = 21\sqrt{2}\pi\ \left(j^2\right)$.

Poznámka.
V tomto případě jsme spočítali obsah S pláště rotačního komolého kužele, který má poloměry podstav $r_1 = 2$ a $r_2 = 5$ a stranu $s = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
Výpočet dle stereometrického vzorce $S = \pi\,(r_1 + r_2) = \pi\,(2+5)\cdot 3\sqrt{2} = 21\sqrt{2}\pi$

■

Příklad 3.39 *Spočítejte obsah S rotační plochy, která vznikne rotací části grafu funkce $f(x) = x^3$, $x \in \langle 0; 2\rangle$, kolem osy x.*

Řešení



Obrázek 39: Graf funkce $f(x) = x^3$
Zdroj: Vlastní zpracování

Vypočteme $f'(x) = 3x^2$.

$$S = 2\pi \int_0^2 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\ \mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 x^3\sqrt{1+9x^4}\ \mathrm{d}x$$

$$\int x^3\sqrt{1+9x^4}\ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} 1+9x^4 = z \\ 36x^3\mathrm{d}x = \mathrm{d}z \\ x^3\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{36} \end{array} \right| = \frac{1}{36}\int \sqrt{z}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{36}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{36}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{z^3} = \frac{1}{3\cdot 18}\sqrt{(1+9x^4)^3}$$

$$S = 2\pi \int_0^2 x^3\sqrt{1+9x^4}\ \mathrm{d}x = 2\pi\frac{1}{3\cdot 18}\left[\sqrt{(1+9x^4)^3}\right]_0^2 = \frac{\pi}{27}\left(\sqrt{(1+9\cdot 2^4)^3} - \sqrt{(1+0)^3}\right) =$$

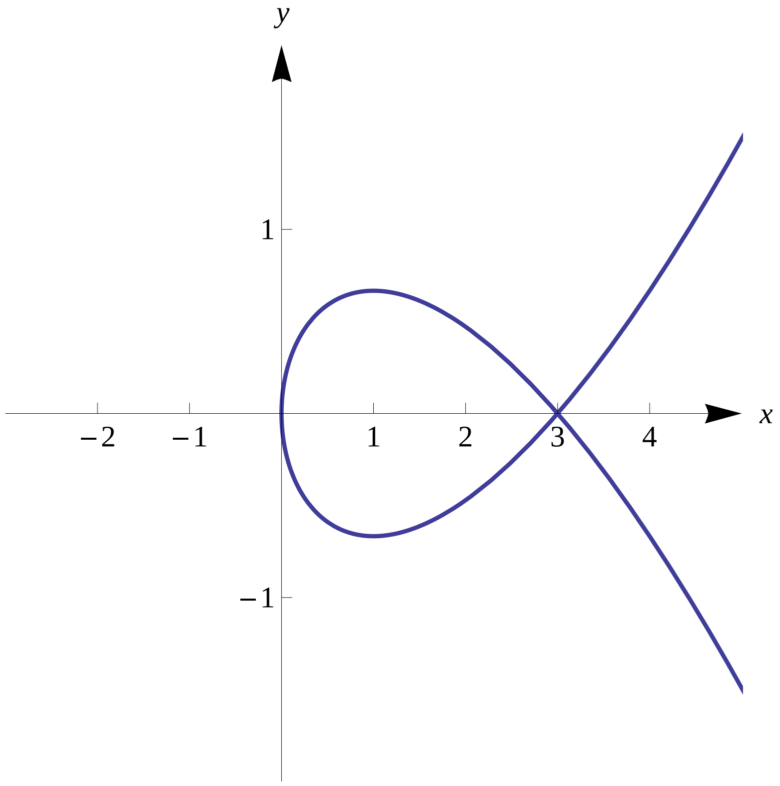
$$= \frac{\pi}{27}\left(\sqrt{145^3} - 1\right)$$

Obsah rotační plochy $S = \left[\frac{\pi}{27}\left(\sqrt{145^3}-1\right)\right]\ (j^2)$.

■

Příklad 3.40 *Vypočítejte obsah S plochy vytvořené rotací kolem osy x části křivky $9y^2 = x(3-x)^2$ na intervalu $\langle 0; 3\rangle$.*

Řešení



Obrázek 40: Graf křivky $9y^2 = x(3-x)^2$
Zdroj: Vlastní zpracování

Vypočteme: $y = \frac{1}{3}(3-x)\cdot\sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{3}\left[-1\cdot\sqrt{x} + (3-x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

$$y' = \frac{1}{3}\frac{-2x+3-x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{3}\frac{-3x+3}{2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

$$S = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}\int_0^3 (3-x)\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^3 (3-x)\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{4x+1-2x+x^2}{4x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}\int_0^3 (3-x)\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_0^3 (3-x)\sqrt{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\int_0^3 (3-x)(x+1)\,\mathrm{d}x =$$

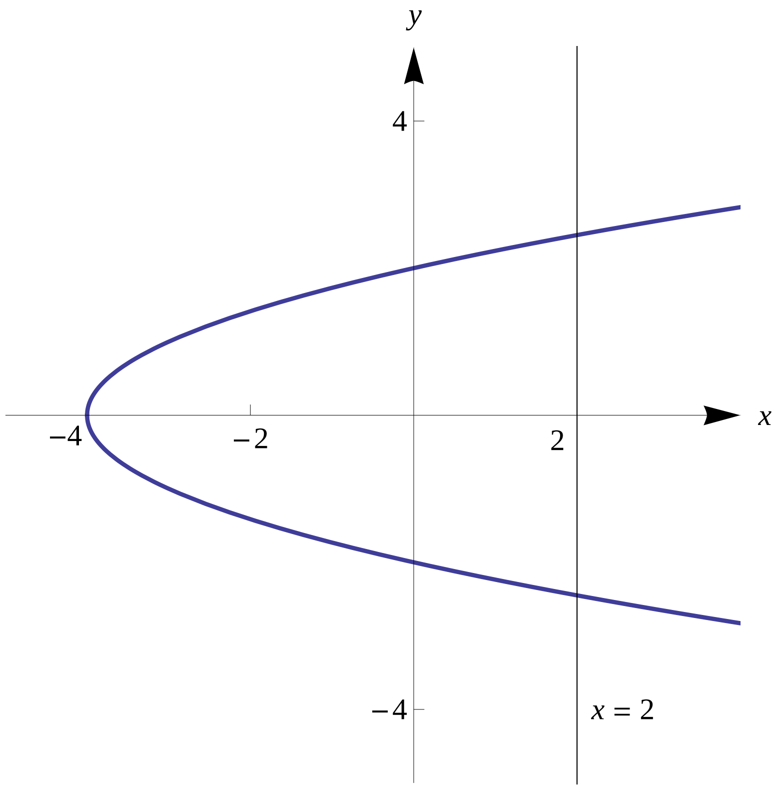
$$= \frac{\pi}{3}\int_0^3 \left(-x^2+2x+3\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_0^3 = \frac{\pi}{3}(-9+9+9) = 3\pi$$

Obsah rotační plochy $S = 3\pi\left(j^2\right)$.

■

Příklad 3.41 *Vypočítejte obsah S plochy vytvořené otáčením oblouku křivky $y^2 = 4 + x$ vyťatého přímkou $x = 2$ při rotaci kolem osy x.*

Řešení



Obrázek 41: Graf křivky $y^2 = 4 + x$
Zdroj: Vlastní zpracování

Vypočteme $y = \sqrt{4+x}$ a $y' = \frac{1}{2\sqrt{4+x}}$.

$$S = 2\pi \int_{-4}^{2} \sqrt{4+x}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{4+x}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-4}^{2} \sqrt{4+x}\sqrt{\frac{4\,(4+x)+1}{4\,(4+x)}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \int_{-4}^{2} \sqrt{4+x} \cdot \frac{\sqrt{17+4x}}{2\sqrt{4+x}}\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-4}^{2} \sqrt{17+4x}\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \left[\frac{1}{4}\frac{\sqrt{(17+4x)^3}}{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3}\left[\sqrt{(17+4x)^3}\right]_{-4}^{2} = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{25^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{\pi}{6}\,(25 \cdot 5 - 1) = \frac{\pi}{6} \cdot 124 = \frac{62}{3}\pi$$

Obsah rotační plochy $S = \frac{62}{3}\,(j^2)$.

■

b) Další aplikace

Příklad 3.42 *Automechanik, kterému zbývá 10 let do důchodu, zvažuje nabídku od dvou firem. U první je roční nástupní plat 16 000 Kč a v dalších letech bude jeho mzda růst podle vztahu* $f_1(t) = 16\ 000 + 400t^2$. *U druhé firmy je nástupní plat 22 000 Kč a v dalších letech se bude jeho mzda vyvíjet podle vztahu* $f_2(t) = 22\ 000 + 400t$. *U které firmy by měl nastoupit, když chce mít během deseti let práce co největší příjem?*

Řešení

Výdělek za 10 let lze spočítat pomocí určitého integrálu. U 1. firmy bude činit

$$\int_0^{10} \left(16\ 000 + 400\ t^2\right)\ dt = \left[16\ 000\ t + 400\ \frac{t^3}{3}\right]_0^{10} = 160\ 000 + 400\ \frac{10^3}{3} = 293\ 33\overline{3} \doteq 293\ 333\,[\text{Kč}]$$

U 2. firmy

$$\int_0^{10} (22\ 000 + 400\ t)\ dt = \left[22\ 000\ t + 400\ \frac{t^2}{2}\right]_0^{10} = 220\ 000 + 400\ \frac{10^2}{2} = 240\ 000\,[\text{Kč}]$$

Rozdíl v příjmech za 10 let: $293\ 333 - 240\ 000 = 53\ 333\,[\text{Kč}]$

Automechanik si za 10 let u první firmy vydělá 293 333 Kč a u druhé 240 000 Kč. Přestože nástupní plat je u druhé firmy vyšší, bude pro automechanika výhodnější nastoupit k 1. firmě, kde si za 10 let vydělá o 53 333 Kč víc.

■

Příklad 3.43 *Celkový příjem z prodeje nového mobilního telefonu lze vyjádřit funkcí* $TR = 95\ 000\ t$, *kde* t *je doba v měsících od zahájení prodeje. Spočítejte průměrný příjem mezi 3. a 6. měsícem prodeje.*

Řešení

Celkový příjem: $\displaystyle\int_3^{6} 95\ 000\ t\ dt = \left[95\ 000\ \frac{t^2}{2}\right]_3^{6} = 1\ 282\ 500\,[\text{Kč}]$

Průměrný příjem se stanoví jako podíl celkového příjmu za sledované období a délky sledovaného období.

Průměrný příjem: $\displaystyle\frac{1\ 282\ 500}{6-3} = 427\ 500\ \ [\text{Kč}]$

Průměrný příjem z prodeje telefonu činil za období mezi 3. a 6. měsícem prodeje 427 500 Kč.

■

Příklad 3.44 *Funkce poptávky po vstupenkách na koncert hudební skupiny má tvar* $P_D = 1600 - Q$. *Funkce nabídky má tvar* $P_q = 100 + \frac{Q}{4}$. *Určete přebytek spotřebitele, přebytek výrobce a celkový přebytek.*

Řešení

Funkce nabídky a poptávky jsou závislé na množství vstupenek Q.
Nejprve musíme najít rovnovážné množství vstupenek Q_E, pro které se cena poptávky rovná ceně nabídky. Položíme $1600 - Q = 100 + \frac{Q}{4}$.

$\frac{5}{4}Q = 1\ 500 \implies Q = 1\ 200.$

Rovnovážné množství $Q_E = 1\ 200\,[\text{ks}]$.
Tomu odpovídá rovnovážná cena $P_E = 1\ 600 - 1\ 200 = 400\,[\text{Kč/ks}]$.
Nyní můžeme spočítat přebytek výrobce

$$\int_0^{Q_E} (P_D - P_E)\ dQ = \int_0^{1200} ((1600 - Q) - 400)\ dQ = \left[120\ Q - \frac{Q^2}{2}\right]_0^{1200} = 720\ 000\ \ [\text{Kč}]$$

přebytek spotřebitele

$$\int_0^{Q_E} (P_E - P_q)\ \mathrm{d}Q = \int_0^{1200} \left(400 - \left(100 + \frac{Q}{4}\right)\right)\ \mathrm{d}Q = \left[300\ Q - \frac{Q^2}{8}\right]_0^{1200} = 180\ 000\ \ [\text{Kč}]$$

celkový přebytek

$$\int_0^{Q_E} (P_D - P_q)\ \mathrm{d}Q = \int_0^{1200} \left(1600 - Q - \left(100 + \frac{Q}{4}\right)\right)\ \mathrm{d}Q = \left[1500\ Q - \frac{5\ Q^2}{8}\right]_0^{1200} = 900\ 000\ \ [\text{Kč}]$$

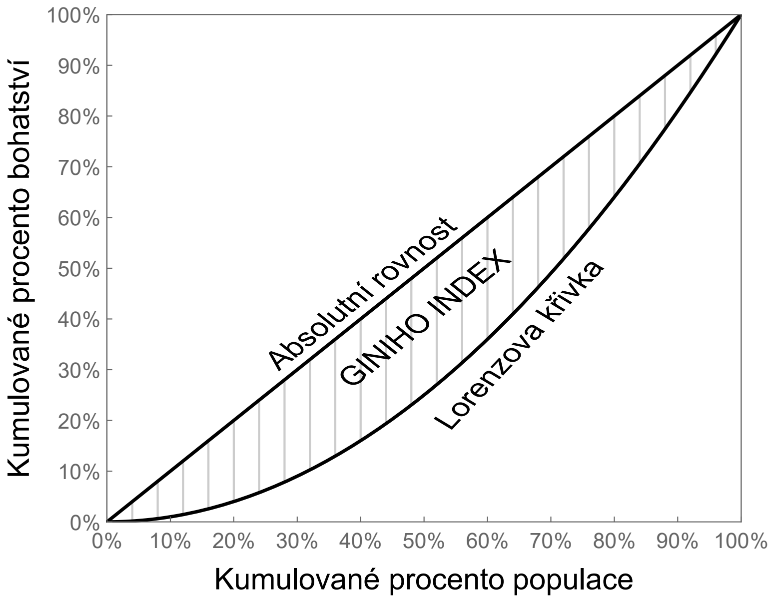
V rovnovážné situaci se prodá 1 200 lístků za 400 Kč. Přebytek spotřebitele pak bude 180 000 Kč, přebytek výrobce 720 000 Kč a celkový přebytek 900 000 Kč.

■

Příklad 3.45 *Spočítejte Giniho koeficient, jestliže Lorenzova křivka má tvar* $L(x) = 1,25x^2 - 0,25x$. (Bauer a spol., 2015)

Řešení

Bohatství společnosti je možné dělit různými způsoby. Mezními způsoby dělení bohatství jsou pak absolutní rovnost (všichni dostanou stejně) a absolutní nerovnost (jeden bere vše). Skutečné dělení bohatství společnosti se pohybuje někde mezi těmito dvěma způsoby a lze znázornit pomocí Lorenzovy křivky. Rozdíl mezi absolutní rovností a skutečností lze číselně zachytit jako tzv. Giniho index. (Čím je tento index nižší, tím rovnoměrněji se dělí bohatství společnosti).



Obrázek 42: Grafické znázornění Giniho indexu
Zdroj: Vlastní zpracování

Giniho index se počítá následovně

$$GC = 1 - 2 \int_0^1 L\,(x)\ \mathrm{d}x$$

V našem případě

$$GC = 1-2 \int_0^1 \left(1,25x^2 - 0,25x\right)\ \mathrm{d}x = 1-2\left[1,25\frac{x^3}{3} - 0,25\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1-2\cdot\left(1,25 \cdot \frac{1}{3} - 0,25\frac{1}{2}\right) = 0,41\overline{6}.$$

Úroveň Giniho indexu v dané ekonomice je $0,41\overline{6}$. Nejedná se tedy o extrémně vysokou úroveň rozdělování bohatství společnosti. (V našem případě absolutní rovnosti je Giniho koeficient roven nule).

■

Literatura

Doporučená literatura

[1] DĚMIDOVIČ, B. P.,: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*, 1. vyd., Praha: Fragment, 2003, 459 s., ISBN 80-7200-587-1, 2003

[2] DRÁBEK, P., MÍKA, S.: *Matematická analýza I*, 5. vyd. Plzeň, ZČU Plzeň, 2003. 158 stran. ISBN 80-7082-978-8

[3] KAŇKA, M., COUFAL, J., KLŮFA, J.: *Učebnice matematiky pro ekonomy*, Ekopress Praha 2007

[4] MOŠOVÁ, V.: *Matematická analýza II.*, 1.vyd, UP Olomouc 2005. 134 stran. ISBN 80-244-1005-2

Seznam obrázků

RNDr. Vladimíra Mádrová, CSc.
RNDr. Vratislava Mošová, CSc.

Integrální počet

Vydala Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s.
Jeremenkova 1142/42, 772 00 Olomouc
www.mvso.cz
tel./fax: +420 587 332 311

Vytiskl Vydavatel
Nová Ulice 560/404
www.vydavatel.cz
+420 777 666 555

Zdrojové umístění URL: http://www.adresa.cz/dokument.pdf
Text neprošel jazykovou úpravou.
Grafický návrh obálky zpracoval Jméno Příjmení

1. vydání
© Moravská vysoká škola Olomouc, o. p. s.
ISBN: 978-1-56619-909-4