7. Spoření

- **Spořením** rozumíme **pravidelné ukládání určitých částek po konečně dlouhou dobu**.
- Součet všech úložek se nazývá **uložená částka**.
- Součet uložené částky a příslušných úroků se nazývá **částka naspořená**. Ta bývá obvykle cílem výpočtů v oblasti spoření.

- Rozlišujeme několik **typů spoření**:
  - **Krátkodobé** – **doba tohoto spoření nepřesáhne jedno úrokové období**. Úroky jsou připisovány na konci doby spoření. Jednotlivé složky jsou úročeny na základě **jednoduchého úročení**.
  - **Dlouhodobé** – **doba spoření bude delší než jedno (obvykle roční) úrokové období**. V rámci jednoho úrokového období spoříme pouze jednou. Úroky se připisují na konci každého úrokového období k naspořené částce a dále se s touto částkou úročí.
  - **Kombinované** – je **kombinací krátkodobého a dlouhodobého spoření.**
  - **Předlhůtní** – danou částku ukládáme na počátku pravidelného časového intervalu
  - **Polhůtní** – danou částku ukládáme na konci pravidelného časového intervalu

7.1 Krátkodobé předlhůtní spoření

- **Předpoklady**:
  - vždy **na začátku každé *m*-tiny roku** ukládáme částku ve výši ***x* Kč**,
  - ***i*** je **roční úroková sazba** vyjádřena jako desetinné číslo,
  - **úrokové období** je **1 rok**.

- V případě, že spoříme takto počátkem každé *m*-tiny úrokového období částku x Kč, bude mít **naspořená částka za jeden rok** tvar

$$S = mx\left(1 + \frac{m+1}{2m} i\right).$$

- **Příklad**: Jakou částku uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové míre 9% p.a.?

- **Příklad**: Jakou částku uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme počátkem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové míre 9% p.a.?

- Řešení: Jedná se o krátkodobé předlhůtní spoření, použijeme proto vzorec

$$S = mx\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right)$$

pro $m = 12$ a $x = 1200$.

$$S = 12 \cdot 1200\left(1 + \frac{12+1}{2 \cdot 12}0{,}09\right) = 15102\ (\text{Kč})$$

7.2 Krátkodobé polhůtní spoření

- **Předpoklady**:
  - vždy **na konci každé *m*-tiny roku** ukládáme částku ve výši ***x* Kč**,
  - ***i*** je **roční úroková sazba** vyjádřena jako desetinné číslo,
  - **úrokové období** je **1 rok**.

* V případě, že spoříme takto koncem každé *m*-tiny úrokového období částku x Kč, bude mít **naspořená částka za jeden rok** tvar

$$S = mx\left(1 + \frac{m-1}{2m} i\right).$$

- **Příklad**: Jakou částku uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme koncem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové míre 9% p.a.?

- **Příklad**: Jakou částku uspoříme do konce roku, jestliže ukládáme koncem každého měsíce 1 200 Kč při úrokové míre 9% p.a.?

- Řešení: Jedná se o krátkodobé polhůtní spoření, použijeme proto vzorec

$$S = mx\left(1 + \frac{m-1}{2m}i\right)$$

pro $m = 12$ a $x = 1200$.

$$S = 12 \cdot 1200\left(1 + \frac{12-1}{2 \cdot 12}0{,}09\right) = 14994\ (\text{Kč})$$

7.3 Dlouhodobé předlhůtní spoření

- **Předpoklady**:
  - vždy **na začátku roku** ukládáme částku ve výši ***x* Kč po dobu *n* let**,
  - ***i*** je **roční úroková sazba** vyjádřena jako desetinné číslo,
  - **úrokové období** je **1 rok**.

- V případě, že spoříme takto **začátkem** každého roku částku x Kč, bude mít **naspořená částka za *n* let** tvar

$$S = x(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

- **Příklad**: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně počátkem každého roku částku 20 000 Kč při roční úrokové míře 5%?

- **Příklad**: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně počátkem každého roku částku 20 000 Kč při roční úrokové míře 5%?
- Řešení: Jedná se o dlouhodobé předlhůtní spoření, použijeme proto vzorec

$$S = x(1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

pro $n = 5$ a $x = 20000$.

$$S = 20000(1+0{,}05)\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} = 116038{,}30(\text{Kč})$$

7.4 Dlouhodobé polhůtní spoření

- **Předpoklady**:
  - vždy **na konci roku** ukládáme částku ve výši ***x* Kč** **po dobu *n* let**,
  - ***i*** je **roční úroková sazba** vyjádřena jako desetinné číslo,
  - **úrokové období** je **1 rok**.

- V případě, že spoříme takto **koncem** každého roku částku x Kč, bude mít **naspořená částka za *n* let** tvar

$$S = x\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

- **Příklad**: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně koncem každého roku částku 20 000 Kč při roční úrokové míře 5%?

- **Příklad**: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně koncem každého roku částku 20 000 Kč při roční úrokové míře 5%?
- Řešení: Jedná se o dlouhodobé polhůtní spoření, použijeme proto vzorec

$$S = x\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

pro $n = 5$ a $x = 20000$.

$$S = 20000\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05} = 110512{,}60(\text{Kč})$$

7.5 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého předlhůtního spoření

- **Předpoklady**:
  - vždy **na začátku každé *m*-tiny roku** ukládáme částku ve výši ***x* Kč** **po dobu *n* let**,
  - ***i*** je **roční úroková sazba** vyjádřena jako desetinné číslo,
  - **úrokové období** je **1 rok**.

- V případě, že spoříme takto počátkem každé *m*-tiny roku částku *x* Kč po dobu *n* let, bude mít **naspořená částka za *n* let** tvar

$$S = mx\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

- **Příklad**: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně počátkem každého čtvrtletí částku 5000 Kč při roční úrokové míře 5%?

- **Příklad**: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně počátkem každého čtvrtletí částku 5000 Kč při roční úrokové míře 5%?
- Řešení: Jedná se o kombinaci dlouhodobého a krátkodobého předlhůtního spoření, použijeme proto vzorec

$$S = mx\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

pro $n = 5$, $m = 4$ a $x = 5000$.

$$S = 4 \cdot 5000\left(1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4}0{,}05\right)\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05}$$
$$= 113966{,}10(\text{Kč})$$

7.6 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého polhůtního spoření

- **Předpoklady**:
  - vždy **na konci každé *m*-tiny roku** ukládáme částku ve výši ***x* Kč po dobu *n* let**,
  - ***i*** je **roční úroková sazba** vyjádřena jako desetinné číslo,
  - **úrokové období** je **1 rok**.

- V případě, že spoříme takto koncem každé *m*-tiny roku částku *x* Kč po dobu *n* let, bude mít **naspořená částka za *n* let** tvar

$$S = mx\left(1 + \frac{m-1}{2m} i\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

- **Příklad**: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně **koncem** každého čtvrtletí částku 5000 Kč při roční úrokové míře 5%?

- **Příklad**: Kolik naspoříme za 5 let, ukládáme-li pravidelně **koncem** každého čtvrtletí částku 5000 Kč při roční úrokové míře 5%?
- Řešení: Jedná se o kombinaci dlouhodobého a krátkodobého polhůtního spoření, použijeme proto vzorec

$$S = mx\left(1 + \frac{m-1}{2m}i\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

pro $n = 5$, $m = 4$ a $x = 5000$.

$$S = 4 \cdot 5000\left(1 + \frac{4-1}{2 \cdot 4}0{,}05\right)\frac{(1+0{,}05)^5 - 1}{0{,}05}$$
$$= 112584{,}70(\text{Kč})$$

8. Důchody

- Pod pojmem **důchod** ve finanční matematice rozumíme **pravidelně se opakující systém plateb**.

- Při počítání důchodů nás bude zajímat především jeho **současná hodnota** (present value) ***PV***, která je rovna součtu všech budoucích plateb diskontovaných k dnešnímu datu.
- Někdy se zjišťuje také **budoucí hodnota** (future value) důchodu, označená ***FV***, jakožto součet budoucích hodnot všech výplat.

- **Příklad**: Vymyslete, kde se s **důchody**, tj. s **pravidelně se opakujícími platbami**, setkáváte v běžném životě.

- K pojmenování **výplaty u důchodu** se používá také pojem **anuita**.

- **Výplatním obdobím** rozumíme **období mezi dvěma výplatami**.
- Může být stejně dlouhé jako úrokové období nebo může být kratší.

Klasifikace důchodů:

- podle **celkové doby výplat**
  - důchod **dočasný**,
  - důchod **věčný**;
- podle toho, je-li **výplata uskutečněna na začátku či na konci pravidelného intervalu**
  - důchod **předlhůtní**,
  - důchod **polhůtní**;
- podle toho, **odkdy se s výplatami začíná**
  - důchod **bezprostřední**,
  - důchod **odložený**;
- podle toho, je-li **výplatní období dlouhé jeden rok nebo je kratší než jeden rok**
  - důchod **roční**,
  - důchody **področní**.

- **Příklad**: U důchodů, které jste vymysleli v předchozím příkladu, určete jejich druh.

8.1 Důchody dočasné bezprostřední

- **Anuita** (výplata důchodu) je v tomto případě **omezena *n* časovými obdobími**.

- **S vyplácením anuit** ve výši a Kč **se začne ihned**.

- Tyto typy důchodů budeme dále dělit takto:
  - Důchod **předlhůtní roční**
  - Důchod **polhůtní roční**
  - Důchod **předlhůtní področní**
  - Důchod **polhůtní področní**

*

Důchod předlhůtní roční

- Předpokládáme, že **anuita ve výši *a* Kč** je vyplácena **počátkem každého roku** při roční neměnné úrokové míře *i* (s ročním úročením).
- Výplatní období je tedy jeden rok a je shodné s úrokovým obdobím.

$$PV = a(1+i)\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy **počátkem** roku po dobu 5 let. S výplatami, které činí 1 200 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a.

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy počátkem roku po dobu 5 let. S výplatami, které činí 1 200 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a.
- Řešení: Současnou hodnotu zjistíme ze vztahu

$$PV = a(1+i)\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$PV = 1200(1+0,05)\frac{1-\frac{1}{(1+0,05)^5}}{0,05} = 5455,10 \text{ (Kč)}.$$

Současná hodnota důchodu činí 5 455,10 Kč. Jinými slovy, abychom mohli na počátku každého roku po dobu 5 let pobírat důchod ve výši 1 000 Kč, musíme teď složit částku 5 455,10 Kč.

Důchod polhůtní roční

- Předpokládáme, že **anuita ve výši *a* Kč** je vyplácena **koncem každého roku** při roční neměnné úrokové míře i (s ročním úročením).
- Výplatní období je tedy jeden rok a je shodné s úrokovým obdobím.

$$PV = a\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy **koncem** roku po dobu 5 let. S výplatami, které činí 1 200 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a.

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy **koncem** roku po dobu 5 let. S výplatami, které činí 1 200 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a.
- Řešení: Současnou hodnotu zjistíme ze vztahu

$$PV = a\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

$$PV = 1200\frac{1-\frac{1}{(1+0,05)^5}}{0,05} = 5195,40\ (\text{Kč}).$$

Současná hodnota důchodu činí 5195, 40 Kč.

Důchod předlhůtní področní

- Předpokládáme, že **anuita ve výši *a* Kč** je vyplácena **počátkem každé *m*-tiny roku** **po dobu *n* let** při neměnné nominální (roční) úrokové míře *i*, přičemž úrok je připsán *m*-krát za rok.
- Výplatní období je tedy jedna *m*-tina roku a je shodné s úrokovým obdobím.

$$PV = a\frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{mn}}{1-\frac{1}{1+\frac{i}{m}}}$$

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy **počátkem každého měsíce** po dobu 5 let. S výplatami, které činí 100 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a. Úroky jsou připisovány měsíčně.

*

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy počátkem každého měsíce po dobu 5 let. S výplatami, které činí 100 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a. Úroky jsou připisovány měsíčně.

- **Řešení:** Současnou hodnotu zjistíme ze vztahu

$$PV = a\frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{mn}}{1-\frac{1}{1+\frac{i}{m}}}$$

$$PV = 100\frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{0,05}{12}}\right)^{12\cdot 5}}{1-\frac{1}{1+\frac{0,05}{12}}} = 5321,10\ Kč$$

Současná hodnota daného měsíčního důchodu je v případě měsíčního úročení 5 321,10 Kč

Důchod polhůtní področní

- Předpokládáme, že **anuita ve výši *a* Kč** je vyplácena **koncem každé *m*-tiny roku po dobu *n* let** při neměnné nominální (roční) úrokové míře *i*, přičemž úrok je připsán *m*-krát za rok.
- Výplatní období je tedy jedna *m*-tina roku a je shodné s úrokovým obdobím.

$$PV = a\frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{mn}}{\frac{i}{m}}$$

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy **koncem každého měsíce** po dobu 5 let. S výplatami, které činí 100 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a. Úroky jsou připisovány měsíčně.

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu důchodu vypláceného vždy **koncem každého měsíce** po dobu 5 let. S výplatami, které činí 100 Kč, začneme hned. Úroková míra činí 5% p.a. Úroky jsou připisovány měsíčně.

- **Řešení**: Současnou hodnotu zjistíme ze vztahu

$$PV = a\frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{i}{m}}\right)^{mn}}{\frac{i}{m}}$$

$$PV = 100\frac{1-\left(\frac{1}{1+\frac{0,05}{12}}\right)^{60}}{\frac{0,05}{12}} = 5299,10\ (\text{Kč}).$$

Současná hodnota daného měsíčního důchodu je v případě měsíčního úročení 5 299,10 Kč

*

8.2 Důchody věčné

- V tomto případě jsou **anuity v hodnotě *a* Kč vypláceny v pravidelných intervalech stále** (do nekonečna).
- Z toho důvodu je věčný důchod limitním případem příslušného dočasného důchodu.
- Výpočty současných hodnot věčných důchodů lze provést pomocí výpočtu limity z důchodu dočasného.
- Současná hodnota **předlhůtního věčného ročního** důchodu:

$$PV = \frac{a(1+i)}{i}$$

- Současná hodnota **polhůtního věčného ročního** důchodu:

$$PV = \frac{a}{i}$$

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu věčného důchodu 1 200 Kč vypláceného

a) počátkem,

b) koncem

každého roku při úrokové míre 5% p.a.

- **Příklad**: Vypočtete současnou hodnotu věčného důchodu 1 200 Kč vypláceného

a) počátkem,

b) koncem

každého roku při úrokové míre 5% p.a.

- **Řešení**:

a)

$$\frac{1200\ (1+0,05)}{0,05} = 25200\ (\text{Kč}),$$

b)

$$\frac{1200}{0,05} = 24000\ (\text{Kč}).$$

Současné hodnoty věčných důchodů činí 25 200 a 24 000 Kč.

- **Využití věčného důchodu**:
  - při výpočtu **ceny konzoly**, což je obligace s časové neomezeným vyplácením kupónových plateb,
  - při výpočtu hodnoty **akcie**, kde se předpokládá **časové neomezené vyplácení dividend**.

*

8.3 Důchody odložené

- Na rozdíl od bezprostředního důchodu zde budeme předpokládat, že **výplata důchodu bude opožděna o *k* let**.

- **Současnou hodnotu odloženého důchodu** získáme **diskontováním současné hodnoty** příslušného **bezprostředního důchodu o dobu odkladu**.

- Pro diskontování se používá u ročních důchodů **diskontní faktor** $v = \frac{1}{1+i}$ a u področních $v = \frac{1}{1+\frac{i}{m}}$

- V případě **področních** důchodů je třeba **diskontovat o *km* výplatních období**.