3. Základní pojmy ve finanční matematice

- **Finanční matematika** = **souhrn matematických metod uplatněných v oblasti financí**.

- Lze ji využít například při **poskytování úvěrů**, při **investování** a také při jiných obchodních transakcích ve **finančnictví, bankovnictví** a **pojišťovnictví**.

- **Finanční gramotnost** = **soubor znalostí člověka** nezbytných k tomu, aby **finančně zabezpečil sebe** a svou rodinu s **využitím finančních produktů a služeb.**

- Základním pojmem, na kterém je založena většina finančních výpočtů, je **úrok**.

- **Z hlediska věřitele:** **úrok** = **odměna za dočasnou ztrátu kapitálu a za riziko, že tento kapitál nebude splacen v dohodnuté době a výši**.
- **Z hlediska dlužníka:** **úrok** = **cena za jemu poskytnutý úvěr.**

- Výše úroku bývá nejčastěji uvedena v procentech za určité období pomocí **úrokové míry**.

- Např. 5% p.a., kde zkratka **p.a.** pochází z latinského **per annum** a překládá se **za rok**, značí úrok ve výši 5 procent, který bude připsán nebo zaplacen jednou za rok, obvykle buď na jeho začátku nebo na jeho konci.

- Úrok nemusí být připisován vždy ročně, existují také jiná **úroková období**:
  - **pololetní**, per semestre (p.s.),
  - **čtvrtletní**, per quartale (p.q.),
  - **měsíční**, per mensem (p.m.),
  - **denní**, per diem (p.d.).

- **Doba splatnosti** (**úroková doba**) = **doba, po kterou je kapitál uložen či zapůjčen**.

- **Úrokové období** = **doba, na jejímž začátku nebo konci je připsán úrok z vkladu** (je zaplacen úrok z úvěru).

- Obecně nemusí být úrokové období stejně dlouhé jako doba splatnosti.

- **Úročení** je **způsob výpočtu úroku**.

- **Z hlediska délky doby splatnosti dělíme úročení** na
  - jednoduché,
  - složené,
  - smíšené.
- **Jednoduché úročení** se používá v případě, že **doba splatnosti nepřekročí jedno úrokové období**.
- **Složené úročení** se zase používá tehdy, **úročíme-li přes více úrokových období**.
- **Smíšené úročení** slouží pro případ, že dobu splatnosti lze vyjádřit jako součet celočíselného počtu úrokových období a zbytku, který je kratší než jedno úrokové období.

- **Z hlediska doby splacení úroku rozdělujeme úročení** na:
  - předlhůtní (anticipativní),
  - polhůtní (dekursivní).

- V případě **předlhůtního úročení** je **úrok zaplacen na začátku úrokového období**.
- V případě **polhůtního úročení** je **úrok zaplacen na konci úrokového období**.

4. Jednoduché úročení

- Jak již bylo uvedeno dříve, úročení dělíme na **polhůtní** a **předlhůtní**.

- V této kapitole probereme oba způsoby úročení, v případě, že se jedná o **jednoduché** úročení, podrobněji.

4.1 Jednoduché polhůtní úročení

- **Úrok** ve výpočtech budeme označovat u.
- **U jednoduchého polhůtního úročení** jej lze vypočítat jako **součin základního kapitálu, úrokové míry a doby, po kterou je kapitál uložen nebo zapůjčen** takto:

$$u = P \cdot i \cdot t,$$

kde

- P je základní kapitál (výše půjčky),
- i je roční **úroková míra vyjádřená desetinným číslem**
- t je **čas v letech**, po který je základní kapitál uložen (půjčen).

Vzorec

$$u = P \cdot i \cdot t$$

lze také přepsat do tvaru

$$u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360} \quad \text{nebo} \quad u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{365}$$

kde

- P je základní kapitál (výše půjčky),
- p je roční **úroková míra v procentech**
- k je **čas ve dnech**, po který je základní kapitál uložen (půjčen).

* Pro vyjádření k se používají 3 tzv. **standardy**:

1. **Anglický** standard ***ACT*/365** … měsíc má skutečný počet dnů, rok má 365 dnů a vzorec má tvar $u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{365}$
2. **Francouzský** standard ***ACT*/360**… měsíc má skutečný počet dnů, rok má 360 dnů a vzorec má tvar $u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360}$
3. **Německý** standard **30*E*/360**… měsíc má 30 dnů, rok má 360 dnů a vzorec má tvar

$$u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360}$$

- **Příklad**: Klient uložil do banky vklad ve výši 95 000 Kč dne 15.8.2018 a vybral jej i s úroky dne 31.12.2018. Jak velký byl úrok při úrokové míře 3% p.a. a použití francouzského standardu?

*

- **Řešení:**

$$u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360}$$

$$u = 95000 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{138}{360} = 1092{,}50 \text{ Kč}$$

*

- **Příklad**: Jak se výše úroku změní, použijeme-li německý standard $30E/360$ nebo anglický standard $ACT/365$?

$30E/360$ ... $u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360}$

$$u = 95000 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{135}{360} = 1068{,}80 \text{ Kč}$$

$ACT/365$ ... $u = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{365}$

$$u = 95000 \cdot \frac{3}{100} \cdot \frac{138}{365} = 1077{,}50 \text{ Kč}$$

Základní rovnice jednoduchého polhůtního úročení

$$S = P + u = P(1 + it) = P(1 + \frac{p}{100}\frac{k}{360})$$

kde

- *S* je **splatná částka**,
- *P* je **základní kapitál** (výše půjčky nebo vkladu),
- *i* je **úroková míra vyjádřená desetinným číslem**
- *t* je **čas v letech**, po který je základní kapitál uložen (půjčen)
- *p* je **úroková míra v procentech**
- *k* je **čas ve dnech**, po který je základní kapitál uložen (půjčen).

- Základní rovnice slouží k **výpočtu částky, která je**:
  - **vyplacena v případě bankovního vkladu**
  - **splacena v případě půjčky**

Současná a budoucí hodnota kapitálu

- **Hodnota peněz nezůstává v čase stejná**, mění se, např. vzhledem k inflaci.
- Při výpočtech, kde potřebujeme porovnávat finanční částky v různých časech, je pravidlem **vztahovat všechny tyto částky k jedinému časovému okamžiku**.
- Je-li tímto časovým okamžikem **teď**, nazývají se hodnoty přepočtených částek **současnými hodnotami**.
- Jestliže jsou částky **přepočítány do nějakého budoucího časového bodu**, nazývají se pak jejich hodnoty **budoucími hodnotami**.

- V případě jednoduchého úročení je tedy **splatná částka *S* budoucí hodnotou počátečního kapitálu *P*.**

- Naopak, **kapitál *P* je současnou hodnotou splatné částky *S***.

- Pro současnou hodnotu částky *S* dostaneme výpočtem ze vzorce

$$S = P(1+it)$$

vztah

$$P = \frac{S}{1+it}.$$

- **Příklad**: Za půl roku budeme potřebovat parcelu. Můžeme ji koupit teď za 615 000 Kč nebo za půl roku v ceně 620 000 Kč. Která z variant je pro nás výhodnější, můžeme-li částku 615 000 Kč nyní investovat při roční úrokové míre 3% p.a.?

- **Příklad**: Za půl roku budeme potřebovat parcelu. Můžeme ji koupit teď za 615 000 Kč nebo za půl roku v ceně 620 000 Kč. Která z variant je pro nás výhodnější, můžeme-li částku 615 000 Kč nyní investovat při roční úrokové míre 3% p.a.?

- **Řešení**: Porovnáme možnosti pomocí budoucí hodnoty:

$$S = P(1+it) = 615\,000(1+0{,}03\cdot 0{,}5) = 624\,225 \text{ Kč.}$$

* Budeme-li tedy 615 000 investovat, budeme mít za půl roku 624 225 Kč, za 620 000 koupíme parcelu a 4 225 Kč nám zbyde. Je tedy výhodnější parcelu koupit až za půl roku.

4.2 Jednoduché předlhůtní úročení

- V **předlhůtním** neboli **anticipativním úročení** je **úrok vyplácen na začátku úrokového období**.
- **Příjemce kapitálu** tedy nedostává celou nominální částku, ale **obnos snížený o úrok**.

- **Úrok u jednoduchého předlhůtního úročení** je nazýván jako **diskont** a je označován písmenem D.
- Diskont D lze vypočítat jako **součin splatné částky, diskontní míry míry a doby, po kterou je kapitál uložen nebo zapůjčen** takto:

$$D = S \cdot d \cdot t,$$

kde

- S je **splatná částka**,
- d je **diskontní míra vyjádřená desetinným číslem,**
- t je **doba splatnosti v letech**.

- **Částka, která je skutečně půjčena**, se značí ***P*** a je rovna **částce *S* snížené o diskont**. Tj.

$$P = S - D = S - Sdt = S(1 - dt)$$

- Jednoduché diskontování (tj. předlhůtní úročení) nachází uplatnění při **obchodování s krátkodobými cennými papíry**.
- Typickým příkladem těchto cenných papírů jsou **pokladniční poukázky** a **směnky**, někdy k nim řadíme i depozitní certifikáty.

- **Příklad**: Jak velká částka bude vyplacena dlužníkovi, který si vypůjčil 12 000 Kč při diskontní míře 6% p.a. na dobu jednoho roku?

- **Příklad**: Jak velká částka bude vyplacena dlužníkovi, který si vypůjčil 12 000 Kč při diskontní míře 6% p.a. na dobu jednoho roku?

- **Řešení**: Odpověď nalezneme pomocí vztahu

$$P = S(1 - dt) = 12000(1 - 0{,}06) = 11280 \text{ Kč}.$$

- Dlužníkovi bude tedy vyplaceno 11 280 Kč.

5. Složené úročení

- Složeného úročení využíváme hlavně v odvětví **dlouhodobých investic**, kde se **počítají úroky z úroků**.
- Na rozdíl od jednoduchého úročení budeme v případě složeného úročení předpokládat, že **počáteční kapitál K_0 je úročen po více let**.
- Úrok bude ke vkladu připsán vždy na konci roku, a následující rok bude znovu spolu s vkladem úročen, vzniknou tedy úroky z úroků.
- Vzhledem k popsanému připisování úroků půjde o **polhůtní (roční) složené úročení**.

- Předpokládáme, že K_0 je počáteční kapitál. Zajímá nás, jak se změní jeho výše za n let, jestliže úroky jsou připisovány vždy na konci roku a další rok znovu úročeny při neměnné úrokové míře i.

Rok	Stav na konci roku
1	$K_1 = K_0(1+i)$
2	$K_2 = K_1(1+i) = K_0(1+i)^2$
3	$K_3 = K_2(1+i) = K_0(1+i)^3$
.	.
.	.
n	$K_n = K_0(1+i)^n$

- Z tabulky je zřejmé, že kapitál za n let dosáhne výše

$$K_n = K_0(1+i)^n,$$

kde $n = 1,2, \dots$

- Částky Kn , n = 1, 2. . . tvoří **geometrickou posloupnost s kvocientem 1+*i***, který se nazývá **úrokovací faktor** neboli **úročitel**.

- **Úročitel** můžeme interpretovat jako **budoucí hodnotu jednotkového kapitálu na konci prvního roku**.

- Z hlediska času je **částka K_n budoucí hodnotou počátečního kapitálu K_0**.
- Naopak, částka **K_0 je současnou hodnotou splatné částky K_n**.
- Současnou hodnotu K_0 vypočítáme z K_n takto:

$$K_0 = K_n \frac{1}{(1+i)^n}.$$

- Zlomek $\frac{1}{1+i}$ se nazývá **diskontní faktor** nebo **odúročitel** a je interpretován jako současná hodnota jednotkového kapitálu počítaná za období jednoho roku.

- **Příklad**: Jak vzroste částka 10 000 Kč uložená na účtu po dobu 5 let při ročním složeném úročení? Úroková míra je 10% p.a.

- **Příklad**: Jak vzroste částka 10 000 Kč uložená na účtu po dobu 5 let při ročním složeném úročení? Úroková míra je 10% p.a.

- **Řešení:** Pro výpočet použijeme vzorec

$$K_n = K_0(1+i)^n,$$

pro $n = 5$. Tj.

$$K_5 = 10000(1+0,1)^5 = 16105,10 \text{ (Kč)}.$$

Částka 10 000 Kč vzroste za uvedených podmínek na 16 105,10 Kč.

- **Příklad**: Jakou částku musíme dnes složit na účet, abychom z něj za 3 roky mohli vybrat 20 000 Kč? Úroková míra je 6% p.a.

- **Příklad**: Jakou částku musíme dnes složit na účet, abychom z něj za 3 roky mohli vybrat 20 000 Kč? Úroková míra je 6% p.a.

- **Řešení:** Pro výpočet použijeme vzorec

$$K_0 = K_n \frac{1}{(1+i)^n}$$

pro $n = 3$. Tj.

$$K_0 = 20000 \frac{1}{(1+0,06)^3} = 16792,40 \text{ (Kč)}.$$

Na účet dnes musíme vložit 16 792,40 Kč.

5.1 Složené úročení s častějším připisováním úroků

- Na začátku roku uložíme částku K_0 a **na konci každé *m*-tiny roku připíšeme úrok** na základě **složeného úročení** **při roční úrokové míře *i***.

- Vzhledem k tomu, že je úrokové období kratší než jeden rok, je nutné **roční úrokovou míru vydělit příslušnou hodnotou *m***.

- Za n let kapitál dosáhne výše

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{nm}$$

kde $n = 1, 2, \ldots$

- **Příklad**: Na kolik vzroste vklad 10 000 Kč uložený 5 roků při úrokové míře 10% p.a. se čtvrtletním připisováním úroků?

- **Příklad**: Na kolik vzroste vklad 10 000 Kč uložený 5 roků při úrokové míře 10% p.a. se čtvrtletním připisováním úroků?
- **Řešení:** Pro výpočet použijeme vzorec

$$K_n = K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}$$

pro $n = 5$ a $m = 4$. Tj.

$$K_5 = 10000\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{20} = 16386{,}20\ Kč$$

- Částka 10 000 Kč vzroste za uvedených podmínek na 16386,20 Kč.

- Je to samozřejmě více než kdyby byly úroky připisovány jen jednou ročně (viz Příklad dříve, kde při ročním připisováním úroků a jinak stejném zadání vyšlo 16 105,10 Kč.)

- Nejpoužívanější hodnoty *m* pro počet úrokových období jsou:
  - **1 – roční,**
  - **2 – pololetní,**
  - **4 – čtvrtletní,**
  - **12 – měsíční,**
  - **52 – týdenní,**
  - **365 – denní.**

*

5.2 Smíšené úročení

- Smíšené úročení je **kombinací složeného a jednoduchého úročení** v případě, že **doba splatnosti *n* není vyjádřena přirozeným číslem**.
- **Doba splatnosti *n*** je zde dána jako **součet celého počtu roků *N*** a **zbytku *Z***, který je kratší než jeden rok.
- Po dobu *N* jsou úroky připisovány vždy na konci úrokového období a v dalším období znovu úročeny, pouze na konci doby splatnosti (**za dobu *Z***) **se úročí jednoduše.**
- Za dobu $n = N+Z$ kapitál dosáhne výše

$$K_n = K_0(1+i)^N(1+iZ)$$